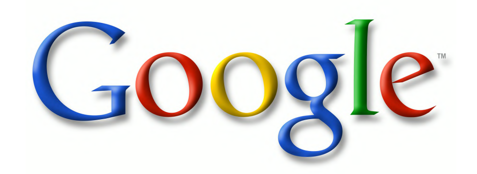












Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

9.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXIX
Jahrgang 1899.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 140. Stiftungstages am 11. März 1899.

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 15. November 1899.

Sitzung vom 7. Januar 1899.

Sitzung vom 4. Februar 1899.

Sitzung vom 4. März 1899.

Sitzung vom 6. Mai 1899.

Sitzung vom 3. Juni 1899.

Sitzung vom 8. Juli 1899.



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

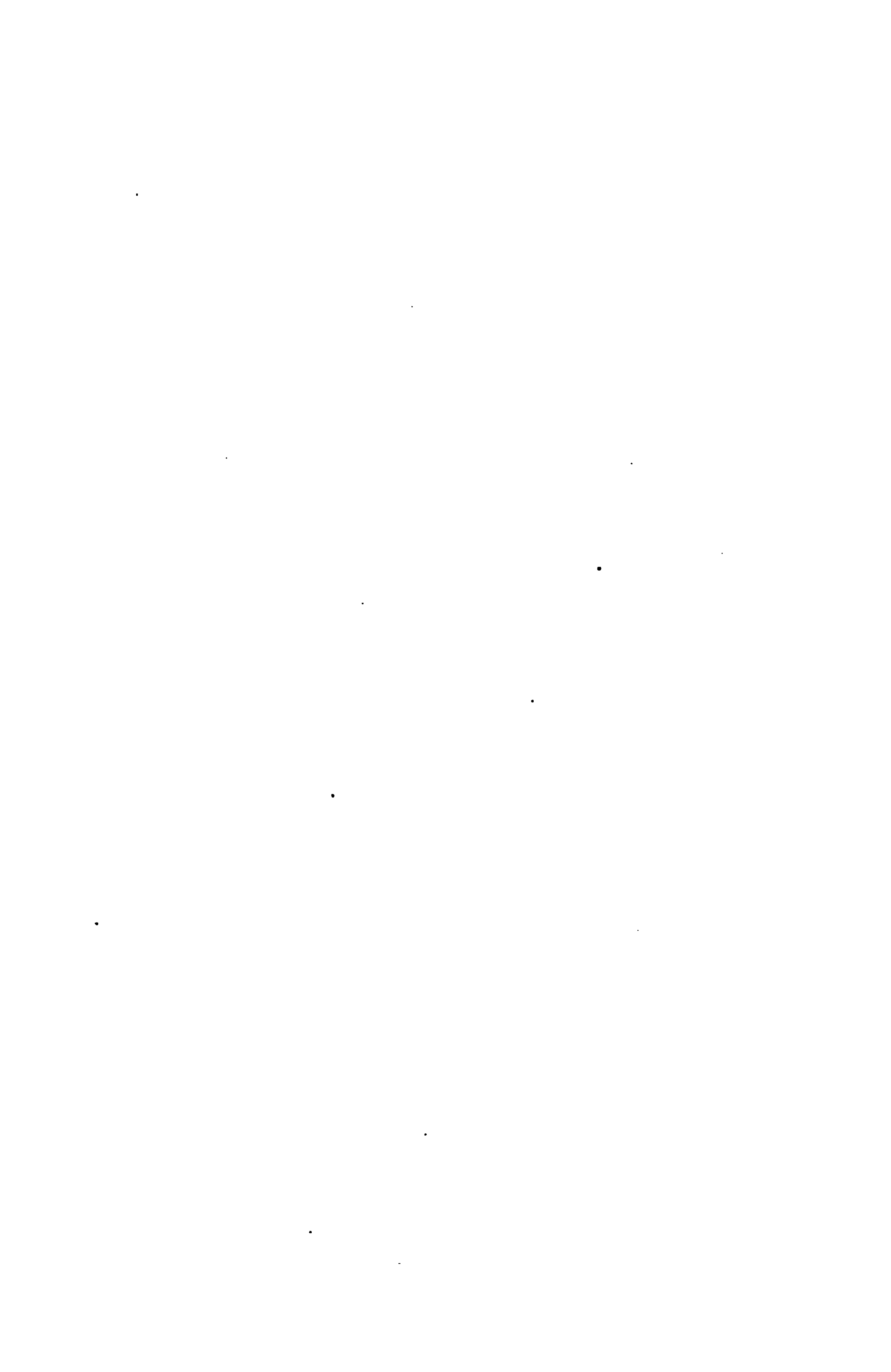
Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 7. Januar 1899.

1. Herr H. Seeliger überreicht eine Abhandlung: „Ueber die Vertheilung der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler".

2. Herr E. v. Lommel legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Hermann Ebert, Professor an der hiesigen technischen Hochschule: „Zur Mechanik der Glimmlichtphänomene" vor.

3. Herr Ad. v. Baeyer hält einen Vortrag: „Ueber eine neue Methode zur Untersuchung von terpenartigen Körpern". Derselbe wird anderweit veröffentlicht werden.



Ueber die Vertheilung der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 7. Januar.)

Es war schon lange mein Wunsch, meine vor vielen Jahren in den „Astron. Nachrichten“ [1]) veröffentlichten Untersuchungen über das genannte Thema von Neuem darzustellen. Die früheren Aufsätze leiden an einigen Stellen an allzu grosser Kürze, was ihre Lectüre unnöthig erschweren musste und umgekehrt dürften an andern Stellen Kürzungen zum Vortheile gereichen. Ich benutze ausserdem diese Gelegenheit, um ein Versehen zu corrigiren, das in dem ersten der beiden Aufsätze untergelaufen ist und durch welches zwei Formeln beeinflusst worden sind. Ich bin Herrn Professor Harzer aufrichtig dankbar, dass er mich auf die Nothwendigkeit einer Correctur aufmerksam gemacht hat.

Wenn man eine Reihe von Messungsresultaten durch eine Interpolationsformel oder durch eine ausgearbeitete Theorie darzustellen hat, so wird eine solche Darstellung dann als eine zufriedenstellende angesehen werden können, wenn die übrig bleibenden Fehler im Mittel eine gewisse durch die Genauigkeit der Messungen bedingte Grösse nicht überschreiten und wenn die Fehlerreihe die Kriterien des Zufalls erfüllt. Für eine Fehlerreihe, deren Anordnung durch Zufall entstanden ist, wird es sehr unwahrscheinlich sein, dass sich etwa die positiven Fehler zu wenigen grossen Gruppen zusammenfinden werden,

[1]) Nr. 2284 und 2323.

vielmehr wird mit überwiegender Wahrscheinlichkeit eine Vertheilung der Vorzeichen entstehen, die sich von einer gewissen wahrscheinlichsten Vertheilung nicht allzu sehr entfernt. Die Anzahl der **Zeichenwechsel** wird sich, mit andern Worten gesagt, zu der Anzahl der Zeichenfolgen in ein bestimmtes Verhältniss setzen und zwar mit einer um so grösseren Wahrscheinlichkeit, je grösser die Zahl der Fehler ist, aus welcher sich die vorliegende Reihe zusammensetzt. Auf diese längst bekannte Wahrheit wird bei Ausgleichungsrechnungen nicht selten Rücksicht genommen, die nähere Behandlung der sich so darbietenden Wahrscheinlichkeitsaufgabe dürfte aber von mir zuerst gegeben worden sein. Betrachtet man weiter die erste Differenzenreihe der ursprünglichen Fehlerreihe, so wird in dieser die Zahl der positiven und der negativen Differenzen ebenfalls gewissen Gesetzen des Zufalls zu gehorchen haben. Man kann noch weiter gehen und auch die Zahl der Zeichenwechsel in der ersten Differenzenreihe untersuchen, jedoch beschränke ich mich, was für eventuelle Anwendungen allein in Frage kommen dürfte, im Folgenden nur auf die Betrachtung der Zeichenwechsel in der gegebenen Fehlerreihe (§ 1) und die Anzahl der positiven Vorzeichen in der ersten Differenzenreihe (§ 2).

1.

Wir denken uns die positiven Fehler etwa durch schwarze und die negativen Fehler durch weisse Kugeln dargestellt. Für eine Fehlerreihe, deren Anordnung durch Zufall entstanden ist, bietet sich dann die folgende Aufgabe dar: Es seien $\mu = m + n$ Kugeln, von denen m schwarz $(+)$ und n weiss $(-)$ sind, absichtslos, also den Gesetzen des Zufalls gemäss, in eine Reihe neben einander gelegt. Es soll die Wahrscheinlichkeit W_y dafür bestimmt werden, dass in dieser Reihe y Uebergänge von Kugeln der einen zu solchen der andern Farbe oder kurz gesagt y Farbenwechsel stattfinden. Wird $m > n$ angenommen, so können offenbar höchstens $2n$ Farbenwechsel stattfinden, da diese Maximalzahl nur dann erzielt werden kann, wenn jede

weisse Kugel zwischen zwei schwarze zu liegen kommt. Es ist also jedenfalls

$$y \leq 2n.$$

Für $m = n$ ist, wie sofort ersichtlich, diese Maximalzahl $2n - 1$. Ferner soll $n > 0$ vorausgesetzt werden, woraus dann folgt:

$$1 \leq y \leq 2n.$$

Die Abzählung aller möglichen Fälle, in denen y Farbenwechsel vorkommen, geschieht am einfachsten, wenn man gerade und ungerade y unterscheidet. Ist $y = 2x$ und bezeichnet man eine Aufeinanderfolge (Gruppe) von lauter schwarzen Kugeln mit $G(+)$ und eine solche von lauter weissen Kugeln mit $G(-)$, so sind die beiden Anordnungen möglich:

$$\left.\begin{array}{l} G_1(+)\,G_1(-)\,G_2(+)\,G_2(-)\ldots G_x(+)\,G_x(-)\,G_{x+1}(+) \\ G_1(-)\,G_1(+)\,G_2(-)\,G_2(+)\ldots G_x(-)\,G_x(+)\,G_{x+1}(-). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Bezeichnet man also mit $f(y, n)$ die Anzahl, wie oft n Elemente in y Gruppen, von denen jede wenigstens ein Element enthält, untergebracht werden können, wobei aber nur jene Vertheilungen als von einander verschieden angesehen werden sollen, die sich durch die Anzahl der in jeder Gruppe enthaltenen Elemente von einander unterscheiden und bildet man auf diese Weise die Anzahl aller möglichen Fälle (1), so findet man:

$$A_{2x} = \Pi(m)\,\Pi(n)\,[f(x, n)\,f(x+1, m) + f(x+1, n)\,f(x, m)].$$

$\Pi(n)$ ist hierin die Gauss'sche Bezeichnung für $n! = 1.2\ldots n$. Der Factor $\Pi(m)\,\Pi(n)$ kommt dadurch zu Stande, dass alle Elemente $+$ und ebenso alle Elemente $-$ unter sich vertauscht werden müssen, um alle möglichen Fälle zu erhalten.

In gleicher Weise kommen für $y = 2x + 1$ die beiden Anordnungen:

$$\begin{array}{l} G_1(+)\,G_1(-)\,G_2(+)\,G_2(-)\ldots G_{x+1}(+)\,G_{x+1}(-) \\ G_1(-)\,G_1(+)\,G_2(-)\,G_2(+)\ldots G_{x+1}(-)\,G_{x+1}(+) \end{array}$$

in Betracht und hieraus ergiebt sich:

$$A_{2x+1} = 2\,\Pi(m)\,\Pi(n)\,f(x+1, n)\,f(x+1, m).$$

Die Wahrscheinlichkeiten W_{2x} und W_{2x+1} für das Vorkommen von $2x$ bezw. $2x+1$ Zeichenwechseln ergeben sich durch Division der Anzahlen A durch die Zahl der möglichen Vertauschungen aller Elemente, also:

$$W_{2x} = \frac{A_{2x}}{\Pi(m+n)}, \qquad W_{2x+1} = \frac{A_{2x+1}}{\Pi(m+n)}.$$

Es ist nun noch die Anzahl $f(y+1, n)$ zu finden, welche angiebt, wie oft sich n Elemente in $y+1$ Gruppen unterbringen lassen. Man erreicht diese Anordnung auch, wenn man zuerst 1 Element absondert und die $n-1$ übrig bleibenden in y Gruppen vertheilt, oder 2 Elemente in eine Gruppe bringt und die übrigen $n-2$ in y Gruppen u. s. f., schliesslich $n-y$ Elemente in eine Gruppe und die y übrig bleibenden in y Gruppen. Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft, denn jede Gruppe soll mindestens ein Element enthalten. Die eben beschriebene Procedur durch eine Formel dargestellt giebt:

$$f(y+1, n) = f(y, n-1) + f(y, n-2) + \ldots + f(y, y).$$

Fügt man die Bedingungen

$$f(y, y) = 1, \qquad f(1, n) = 1$$

hinzu, so ist die Funktion f vollständig bestimmt, denn man kann nun leicht $f(2, n)$, $f(3, n)$ etc. berechnen. Man findet so:

$$f(y, n) = \frac{n-1 \,.\, n-2 \ldots n-y+1}{1 \,.\, 2 \ldots y-1} = \binom{n-1}{y-1} = \frac{\Pi(n-1)}{\Pi(y-1)\,\Pi(n-y)}.$$

Hiermit ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} W_{2x} &= \frac{\Pi(m)\,\Pi(n)}{\Pi(m+n)}\binom{n-1}{x-1}\binom{m-1}{x-1} \cdot \frac{m+n-2x}{x} \\ W_{2x+1} &= 2\,\frac{\Pi(m)\,\Pi(n)}{\Pi(m+n)} \cdot \binom{n-1}{x-1}\binom{m-1}{x-1} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Als Rechencontrole kann aufgestellt werden:

$$1 = \sum_{x=1}^{x=n} W_{2x} + \sum_{x=0}^{x=n-1} W_{2x+1}$$

$$= \frac{\Pi(m)\,\Pi(n)}{\Pi(m+n)} \cdot (m+n) \cdot \sum_{x=1}^{x=n} \binom{n-1}{x-1} \binom{m-1}{x-1} \frac{1}{x}.$$

In der That kann man die letzte Summe auch als hypergeometrische Reihe

$$F(-n+1,\ -m+1, 2, 1) = \frac{\Pi(m+n-1)}{\Pi(m)\,\Pi(n)}$$

schreiben.

Es wird sich empfehlen, statt der W die Grösse V_x

$$V_x = W_{2x} + W_{2x-1} = \frac{\Pi(m)\,\Pi(n)}{\Pi(m+n)} \binom{n-1}{x-1} \binom{m-1}{x-1} \frac{m+n}{x} \tag{3}$$

zu betrachten und dem x alle Werthe von 1 bis n zu ertheilen, da $m > n$ vorausgesetzt worden ist.

Hat man nun eine Reihe von positiven Gliedern:

$$g_1\, g_2 \ldots g_l\, g_{l+1} \ldots g_m\, g_{m+1} \ldots g_r \ldots g_\mu \tag{4}$$

und nehmen die g von links nach rechts zu bis zu einem Maximalglied g_m, von wo ab sie wieder fortwährend abnehmen sollen, so aber, dass:

$$\frac{g_m}{g_{m-1}} < \frac{g_l}{g_{l-1}}, \quad \frac{g_{m-1}}{g_{m-2}} < \frac{g_{l-1}}{g_{l-2}} \quad \text{etc.}$$

$$\frac{g_m}{g_{m+1}} < \frac{g_r}{g_{r+1}}, \quad \frac{g_{m+1}}{g_{m+2}} < \frac{g_{r+1}}{g_{r+2}} \quad \text{etc.}$$

oder, was dasselbe bedeutet:

$$\frac{g_m}{g_l} < \frac{g_{m-1}}{g_{l-1}} < \frac{g_{m-2}}{g_{l-2}} \ldots$$

$$\frac{g_m}{g_r} < \frac{g_{m+1}}{g_{r+1}} < \frac{g_{m+2}}{g_{r+2}} \ldots$$

Dann folgt sofort:

$$\frac{g_m}{g_l} < \frac{g_m + g_{m-1} + g_{m-2} + \cdots + g_l}{g_l + g_{l-1} + g_{l-2} + \cdots + g_{2l-m}}; \ \frac{g_m}{g_{l'}} < \frac{g_m + g_{m+1} + \cdots + g_{l'}}{g_{l'} + g_{l'+1} + \cdots + g_{2l'-m}}.$$

Bezeichnet man mit $(l m)$ die Summe der Glieder $g_l + g_{l+1} + \cdots + g_m$ und mit $(m l')$ die Summe $g_m + g_{m+1} + \cdots + g_{l'}$, so ist also:

$$(l m) > \frac{g_m}{g_l}(g_l + g_{l-1} + \cdots + g_{2l-m})$$

$$(m l') > \frac{g_m}{g_{l'}}(g_{l'} + g_{l'+1} + \cdots + g_{2l'-m}).$$

Ist ferner L die Summe aller Glieder in (4) links von g_l, das letztere nicht mit eingeschlossen, und R die Summe aller Glieder rechts von $g_{l'}$, dieses ebenfalls ausgeschlossen, so ist offenbar:

$$\begin{aligned} L &< (g_l + g_{l-1} + \cdots + g_{2l-m})\frac{l-1}{m-l+1} \\ R &< (g_{l'} + g_{l'+1} + \cdots + g_{2l'-m})\frac{\mu - l'}{l'-m+1} \end{aligned} \tag{5}$$

und man hat demzufolge:

$$(l m) > \frac{g_m}{g_l} L \cdot \frac{m-l+1}{l-1}; \ (m l') > \frac{g_m}{g_{l'}} R \cdot \frac{l'-m+1}{\mu - l'}; \tag{6}$$

nennt man den kleineren der beiden Factoren von L und R in diesen beiden Gleichungen a, so ist sicher:

$$(l m) + (m l') > a(L + R).$$

Ist Σ die Gesammtsumme aller Glieder (4) und $(l l')$ die Summe aller Glieder zwischen g_l und $g_{l'}$, wobei indessen strenge genommen g_m doppelt gezählt wird, was übrigens bei einer sehr grossen Zahl von Gliedern nicht in Frage kommt, so hat man:

$$(l l') = (l m) + (m l'); \ \Sigma = (l l') + L + R,$$

und deshalb

$$(l l') > \frac{a \Sigma}{1 + a}. \tag{7}$$

Diese nach der Ars conjectandi von J. Bernoulli gebildeten Formeln sollen nun auf die Function (3) angewendet werden. Hier ist

$$\frac{V_x}{V_{x-1}} = \frac{(n-x+1)(m-x+1)}{x\cdot(x-1)}.$$

Dieser Quotient nimmt, wenn man von $x = 2$ ausgehend x wachsen lässt, fortwährend ab. Er ist zuerst grösser als 1, von einer bestimmten Stelle an wird er aber < 1. Daraus folgt, dass die V_x bis zu einem gewissen Werth von x wachsen, hier ein Maximum erreichen, um wieder fortwährend abzunehmen. Die Einzelwerthe von V_x erfüllen also die für die y angenommenen Bedingungen. Das Maximum findet bei einer der beiden ganzen Zahlen statt, welche den Werth:

$$x = \frac{mn}{m+n+1} + 1$$

einschliessen. Nennt man diese beiden Zahlen ν und $\nu + 1$, so ist also

$$\nu - 1 < \frac{mn}{m+n+1} < \nu.$$

Man setze in der ersten Formel (6):

$$m = \nu,\ l = \nu - t,\ a_1 = \frac{V_\nu}{V_{\nu-t}}\cdot\frac{t+1}{\nu-t-1},$$

und in der zweiten

$$m = \nu + 1,\ l' = \nu + t,\ \mu = n,\ a_2 = \frac{V_{\nu+1}}{V_{\nu+t}}\cdot\frac{t}{n-\nu-t}.$$

Da dann $\Sigma = 1$, so wird, wenn das kleinere der beiden a gewählt wird, die Wahrscheinlichkeit Ω dafür, dass die Anzahl der Zeichenwechsel zwischen

$$\left.\begin{array}{c} 2\nu - 2t + 1 \text{ und } 2\nu + 2t - 2 \\ \text{liegt:} \\ \Omega > \dfrac{a}{1+a}. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Die Werthe der a sind in extenso geschrieben:

$$a_1 = \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)\dots(n-\nu+t)\cdot(m-\nu+1)\dots(m-\nu+t)}{(\nu-1)^2(\nu-2)^2\dots(\nu-t)^2}$$
$$\cdot\frac{\nu-t}{\nu}\cdot\frac{t+1}{\nu-t-1}$$

$$a_2 = \frac{(\nu+1)^2(\nu+2)^2+\dots+(\nu+t-1)^2}{(n-\nu-1)(n-\nu-2)\dots(n-\nu-t+1)\cdot(m-\nu-1)(m-\nu-2)\dots(m-\nu-t+1)}$$
$$\cdot\frac{\nu+t}{\nu+1}\cdot\frac{t}{n-\nu-t}.$$

Diese Formeln sollen nur unter der Voraussetzung ausgerechnet werden, dass $m, n, n-\nu, m-\nu\mp t, n-\nu\mp t$ lauter sehr grosse Zahlen bedeuten. Man kann dann als Näherung die Stirling'sche Formel:

$$\Pi(p) = \sqrt{2\pi}\cdot p^{p+\frac{1}{2}}\cdot e^{-p}$$

zur Anwendung bringen.

Setzt man noch:

$$m = n\varrho,\quad t = ny,\quad \nu = n\sigma,$$

so wird für sehr grosse n und endliche ϱ, y, σ sein:

$$a_1 = \frac{y}{\sigma-y}(1-\sigma)^{ny}(\varrho-\sigma)^{ny}\left(1+\frac{y}{1-\sigma}\right)^{n(1-\sigma+y)}$$
$$\cdot\left(1+\frac{y}{\varrho-\sigma}\right)^{n(\varrho-\sigma+y)}\cdot\sigma^{-2ny}\cdot\left(1-\frac{y}{\sigma}\right)^{2n(\sigma-y)},$$

weiter ist, wenn für ν der obige Werth:

$$\nu = \frac{mn}{m+n} = \frac{\varrho n}{1+\varrho}$$

eingesetzt wird:

$$\sigma = \frac{\varrho}{1+\varrho};\quad (1-\sigma)(\varrho-\sigma) = \sigma^2.$$

Man muss weiter beachten, dass ϱ eine endliche Zahl, etwa in der Nähe von $\frac{1}{2}$ liegend, sein wird. y ist als **sehr kleine**

Zahl, etwa vom Range $\frac{1}{\sqrt{n}}$ anzusehen. Bildet man dann den Logarithmus von a und vernachlässigt unendlich kleine Glieder, wie $n y^3$, $n y^4$ etc., y, y^2 etc., so kann man schreiben:

$$\log a_1 = \log \frac{y}{\sigma} + \frac{1}{2} n y^2 \left(\frac{1}{1-\sigma} + \frac{1}{\varrho-\sigma} + \frac{2}{\sigma}\right)$$
$$= \log \frac{y}{\sigma} + \frac{1}{2} n y^2 \frac{(1+\varrho)^3}{\varrho^2},$$

woraus

$$n = \frac{2\varrho^2}{(1+\varrho)^3} \cdot \frac{\log\left(\frac{a_1 \varrho}{y(1+\varrho)}\right)}{y^2} \tag{9}$$

folgt.

Entwickelt man in ähnlicher Weise a_2, so erhält man zunächst mit Weglassung der augenscheinlich zu vernachlässigenden Glieder:

$$a_2 = \frac{y}{1-\sigma-y} \cdot \left(1+\frac{y}{\sigma}\right)^{2n(\sigma+y)} \cdot \left(1-\frac{y}{1-\sigma}\right)^{n(1-\sigma-y)}$$
$$\cdot \left(1-\frac{y}{\varrho-\sigma}\right)^{n(\varrho-\sigma-y)}$$

und weiter:

$$n = \frac{2\varrho^2}{(1+\varrho)^3} \cdot \frac{\log\left(\frac{a_2}{y(1+\varrho)}\right)^{1)}}{y^2}. \tag{10}$$

Da $m > n$ also $\varrho > 1$ vorausgesetzt worden ist, ist für n der Werth (9) als der grössere von beiden zu wählen. Wenn also n grösser als die durch (9) angegebene Zahl ist, ist jedenfalls die Wahrscheinlichkeit Ω dafür, dass die Anzahl der Zeichenwechsel zwischen den Grenzen $2(\nu - t)$ und $2(\nu + t)$

---

[1]) Das oben erwähnte Versehen bestand darin, dass der reciproke Werth des zweiten Factors auf der rechten Seite der Ausdrücke a genommen worden ist. Infolge dessen erscheint, abgesehen von fortzulassenden Gliedern in den (9) und (10) entsprechenden Formeln unter dem Logarithmus der reciproke Factor von a_1 bezw. a_2.

liegt, grösser als $\frac{a}{1+a}$. Ω kann also durch Vergrösserung von n beliebig nahe der Einheit gebracht werden. Für $m = n$, also $\varrho = 1$ wird:

$$n = \frac{1}{4y^2} \log\left(\frac{a}{2y}\right).$$

Bestimmt man n nach dieser Formel, so ist die Wahrscheinlichkeit

$$W > \frac{a}{1+a}$$

dafür, dass die Zahl der Zeichenwechsel zwischen

$$n(1-2y) \text{ und } n(1+2y)$$

liegt.

Nennt man die Anzahl der Zeichenwechsel w, die der Zeichenfolgen f, so ist:

$$f + w = m + n - 1$$

im speziellen für $m = n$:

$$f + w = 2n - 1$$

und W ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Ungleichheit:

$$\frac{1-2y}{1+2y} < \frac{w}{f} < \frac{1+2y}{1-2y}.$$

Soll z. B.:

$$\frac{49}{51} < \frac{w}{f} < \frac{51}{49}$$

und hierfür $\Omega > \frac{1000}{1001}$ sein, so ist zu setzen:

$$y = \frac{1}{100}, \; a = 1000$$

und es wird $n = 2500 \log \text{nat} (50000) = 27050$. Man muss also n mindestens so gross wählen.

Die aufgestellten Grenzen sind indessen zu weit und es lässt sich bekanntlich mit Hülfe der Integralrechnung eine einfachere und engere Begrenzung vornehmen. Die Formel (3) für V_x kann man auch schreiben:

$$V_x = \frac{\Pi(m-1)\,\Pi(m)\,\Pi(n-1)\,\Pi(n)}{\Pi(m+n-1)\,\Pi(x)\,\Pi(x-1)\,\Pi(m-x)\,\Pi(n-x)}$$

und wenn man die Stirling'sche Formel anwendet für sehr grosse Werthe von m, n, x, $m-x$ und $n-x$.

$$V_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot$$

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\cdot(n-1)^{n-\frac{1}{2}}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot(m-1)^{m-\frac{1}{2}}}{(m+n-1)^{m+n-\frac{1}{2}}\cdot x^{x+\frac{1}{2}}\cdot(x-1)^{x-\frac{1}{2}}(n-x)^{n-x+\frac{1}{2}}(m-x)^{m-x+\frac{1}{2}}}$$

Man entwickle nun diesen Ausdruck für Werthe von x:

$$x = \nu + a\sqrt{\nu},$$

wo a eine endliche Zahl bedeutet, die also gegen das sehr grosse ν sehr klein ist. Zunächst ergiebt sich für $\nu = \frac{mn}{m+n}$

$$V_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(m+n)^{\frac{3}{2}}}{mn}\,.$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{1}{m+n}\right)^{m-n+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{a}{\sqrt{\nu}}\right)^{2x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a\sqrt{\nu}}{n-\nu}\right)^{n-x+\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{a\sqrt{\nu}}{m-\nu}\right)^{m-x+\frac{1}{2}}}$$

Man kann nun zu Näherungsformeln übergehen, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung überaus oft gebraucht werden. Diese beruhen darauf, dass man für sehr kleine z ansetzt:

$$(1+z)^{\nu} = e^{\nu\log(1+z)} = e^{\nu\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\right)}.$$

Nimmt man nur die grössten Glieder mit, welche diese Reihenentwicklung ergiebt, so erhält man V_x bis auf einen um so geringeren Procentsatz richtig, je grösser die Zahlen n, m, $n-\nu$, $m-\nu$, ν sind.

Es wird so:

$$V_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(m+n)^{\frac{3}{2}}}{m\,n} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{(m+n)^2}{m\,n}}.$$

Setzt man also zur Abkürzung:

$$\mu = \frac{m+n}{\sqrt{2\,m\,n}}, \tag{11}$$

so wird:

$$V_x = \frac{2\,\mu^2}{\sqrt{2\,\pi\,(m+n)}} \cdot e^{-\alpha^2 \mu^2}.$$

Dies ist also die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen von $2\,x$ oder $2\,x-1$ Zeichenwechseln. Nimmt x um eine Einheit zu, so ändert sich α um $\Delta\,\alpha$:

$$\Delta\,\alpha = \mu \sqrt{\frac{2}{m+n}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit W für das Vorkommen von Zeichenwechseln, deren Anzahl zwischen den Grenzen:

$$\frac{2\,m\,n}{m+n} \pm 2\,\gamma \sqrt{\frac{m\,n}{m+n}}$$

liegt, ist demnach:

$$W = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \sum e^{-\alpha^2 \mu^2} \cdot \Delta\,\alpha,$$

wo die Summe auf alle Werthe von α auszudehnen ist, die in den Intervallen $\Delta\,\alpha$ aufeinander folgen und zwischen den Grenzen $\pm\gamma$ liegen. Man kann nun die Maclaurin-Euler'sche Summationsformel anwenden, wodurch sich für sehr grosse Werthe von m und n ergiebt:

$$W = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma}^{+\gamma} e^{-\mu^2 \alpha^2} \cdot d\,\alpha,$$

was man auch so schreiben kann:

$$W = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\mu\gamma}^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt. \tag{12}$$

W kann also durch Vergrösserung von γ beliebig nahe der Einheit gebracht werden und wird schon für nicht grosse γ äusserst nahe $= 1$. Für $m = n$ wird $\mu = \sqrt{2}$ und die Wahrscheinlichkeit W für das Vorkommen von Zeichenwechseln, deren Zahl zwischen:

$$n \pm \gamma \sqrt{n}$$

liegt, wird:

$$W = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt.$$

Soll z. B. $W = \frac{999}{1000}$ werden, so sind die Grenzen für die Anzahlen der Zeichenwechsel:

$$n\left(1 \pm \frac{2{,}33}{\sqrt{n}}\right).$$

Für das oben (S. 12) erwähnte Beispiel findet sich rund:

$$n = 13600,$$

also eine bedeutend kleinere Zahl, wie die zuerst ausgeführte Betrachtung ergab, was ja auch zu erwarten war.

2.

Es sollen nun weiter die Vorzeichen der ersten Differenzen der vorliegenden Fehlerreihe betrachtet werden, wodurch die Grösse der Fehler in gewisser Beziehung Berücksichtigung findet. Es soll also jeder Fehler von dem ihm folgenden subtrahirt und auf diese Weise das Vorzeichen der Differenz bestimmt werden. Es soll x die Anzahl der positiven Vorzeichen der Differenzenreihe bedeuten, während n Fehler vorliegen sollen; die Anzahl der negativen Vorzeichen ist dann $n - x - 1$. Ist ferner $f(x, n)$ die Anzahl der Anordnungen der gegebenen

Fehler, welche x positive Vorzeichen in der Differenzreihe ergeben, so ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereigniss:

$$\frac{f(x, n)}{\Pi(n)} \tag{1}$$

Die Funktion f kann man leicht durch eine Differenzenreihe definiren. Man sondere von den n Fehlern (1), (2) ... (n) den grössten ab und bezeichne ihn mit (n). Man bringe nun (n) an irgend eine Stelle der irgendwie angeordneten Reihe der Fehler (1) ... ($n-1$). Bringt man (n) zwischen 2 Fehler, von denen der folgende grösser ist, so wird die Anzahl der positiven Differenzen weder vermehrt, noch vermindert. Mit demselben Erfolge kann man (n) an die erste Stelle der Reihe setzen. Sind also in der Reihe (1) ... ($n-1$), x positive Differenzen vorhanden, so kann man (n) an $x+1$ Stellen unterbringen, um in der Reihe der n Fehler wieder x positive Differenzen zu bekommen. Die Anzahl der ersteren möglichen Anordnungen ist aber $f(x, n-1)$ und es entstehen demnach auf die erwähnte Weise $(x+1) f(x, n-1)$ neue Anordnungen. In der Reihe (1) ... ($n-1$) sollen $x-1$ positive, also $n-$ [illegible] negative Differenzen vorkommen. Setzt man den Fehler an diese Stellen oder auch an das Ende der Reihe, so wird jedesmal die Anzahl der positiven Differenzen um eine Einheit vergrössert, sie wird also $= x$. Dies kann daher ($n - x$ [illegible] $n-1$) mal geschehen. Jetzt sind aber alle Möglichkeiten, das Element n in die Reihe (1) ... ($n-1$) einzuordnen erschöpft und es ergiebt sich also:

$$f(x, n) = (x+1) f(x, n-1) + (n-x) f(x-1, n-1). \tag{2}$$

Durch diese Differenzengleichung ist $f(x, n)$ vollkommen bestimmt, wenn man noch die sich sofort darbietenden speciellen Werthe:

$$f(0, n) = 1, \quad f(n-1, n) = 1, \quad f(n, n) = 0 \tag{3}$$

hinzufügt. Zur Controle kann noch die [illegible]

$$\sum_{x=0}^{x=n-1} f(x, n) = \Pi(n) \tag{4}$$

benutzt werden.

Die Integration von (2) macht keine Schwierigkeit, wenn man nach und nach für $x = 1, 2$ etc. die Werthe von $f(x, n)$ aufsucht. Man hat hierbei, wenn man von den Bedingungen (3) ausgeht, geometrische Progressionen und Reihen, die aus ihnen durch Differentiationen ableitbar sind, zu summiren. Auf diese Weise findet man:

$$f(0, n) = 1$$
$$f(1, n) = 2^n - (n+1)$$
$$f(2, n) = 3^n - (n+1) \cdot 2^n + \frac{n+1 \cdot n}{1 \cdot 2}$$
$$f(3, n) = 4^n - (n+1) \cdot 3^n + \frac{n+1 \cdot n}{2} \cdot 2^n - \frac{n+1 \cdot n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

. . . .

Der Fortgang ist ersichtlich und man wird demnach ansetzen:

$$f(x, n) = \sum_{\mu=0}^{\mu=x} (-1)^\mu \binom{n+1}{\mu} (x+1-\mu)^n. \tag{5}$$

In der That genügt dieses f der Gleichung (2), da man diese so schreiben kann:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=x} (-1)^\mu \binom{n+1}{\mu} (x+1-\mu)^n =$$
$$\sum_{\mu=0}^{\mu=x} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (x+1)(x+1-\mu)^{n-1} + \sum_{\mu=0}^{\mu=x-1} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n-x)(x-\mu)^{n-1}.$$

Transformirt man die zweite Summe rechts dadurch, dass man $\mu' = \mu - 1$ als Summationsindex einführt, so ergiebt sich unmittelbar die Identität der beiden Seiten der Gleichung.

Man überzeugt sich ferner leicht, dass (5) den Bedingungen (3) und (4) genügt. Betrachtet man den Ausdruck:

$$F_x = \sum_{\mu=0}^{\mu=n+1} (-1)^\mu \binom{n+1}{\mu} (x+1-\mu)^n,$$

so kann man leicht zeigen, dass:

$$F_x = 0.$$

In der That kann man F_x erhalten, wenn man in:

$$\frac{d^n}{d\xi^n}\left\{e^{(x+1)\xi}(1-e^{-\mu\xi})^{n+1}\right\}$$

nach der Differentiation $\xi = 0$ setzt. Da aber alle Glieder der ausgeführton Endformel $(1-e^{-\mu\xi})^r$ als Factor enthalten müssen, wo $r > 1$, so werden alle Glieder schliesslich Null. Jetzt ergiebt sich sofort:

$$f(n, n) = F_n = 0.$$

Ebenso kann man zeigen, dass:

$$f(n-1-x, n) = f(x, n),$$

denn durch Einführung des Summationsindex $\mu' = n+1-\mu$ statt μ in die Formel (5), wenn man hier $n-1-x$ statt x einsetzt, ergiebt sich ohne Weiteres:

$$f(n-1-x, n) = -F_x + f(x, n) = f(x, n).$$

Zum Beweise von (4) setzt man:

$$S_y = 1^n + 2^n + \ldots + y^n.$$

Dann wird:

$$\sum_{x=0}^{x=n-1} f(x, n) = \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r \cdot \binom{n+1}{r} S_{n-r}$$

und wenn man die bekannte Formel benutzt:

$$S_n = \frac{d^n}{d\xi^n}\left(\frac{e^{(p+1)\xi}-1}{e^{\xi}-1}\right) \text{ für } \xi = 0,$$

so ergiebt sich leicht:

$$\sum_{x=0}^{x=n-1} f(x, n) = \frac{d^n}{d\xi^n}(e^{\xi}-1)^n = \Pi(n).$$

Auch bei der vorliegenden Aufgabe wird es von wesentlichem Interesse sein, den Verlauf von $\varphi(x, n) = \frac{f(x, n)}{\Pi(n)}$, für sehr grosse n kennen zu lernen und insbesondere für solche Werthe von x, welche in der Nähe von $x = \frac{n}{2}$ liegen, da hier $\varphi(x, n)$, wie man leicht sieht, einen Maximalwerth erreicht, von welchem ab es nach beiden Seiten zuerst langsamer, dann schneller abnimmt. Dies ist mit der Form (5) nicht gut zu erreichen, während eine andere Darstellung leicht zum Ziele führt. Ausdrücke von der Form (5) treten schon in den Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen von Moivre auf. Laplace hat diese in der „théorie analytique" weiter behandelt und ist auf eine Integraldarstellung gekommen, die hier direct zu benutzen ist. Die Methoden von Laplace lassen indessen an Strenge, wie bekannt, viel zu wünschen übrig. Seine Resultate aber wurden in einwurfsfreier Weise durch Cauchy[1]) neu abgeleitet. Danach ist:

$$\varphi(x, n) = \frac{f(x, n)}{\Pi(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{n+1} \cos(2x + 1 - n) z\, dz. \qquad (6)$$

Die Verification dieser Formel ist leicht. Durch theilweise Integration findet man sofort:

$$\frac{\pi}{2}\,\varphi(x, n) = -\int_0^\infty z\,dz \left\{(n + 1)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^n \left[\frac{\cos z}{z} - \frac{\sin z}{z^2}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cos(2x + 1 - n)z - \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{n+1}\cdot(2x + 1 - n)\sin(2x + 1 - n)z\right\}.$$

Man kann dies auch schreiben:

$$\frac{\pi}{2}\,\varphi(x, n) = (n + 1)\,\frac{\pi}{2}\cdot\varphi(x, n) +$$

$$\int_0^x \left(\frac{\sin z}{z}\right)^n dz \left[(x - n)\cos(2x - n)z - (x + 1)\cos(2x + 2 - n)z\right]$$

---

[1]) Mémoire sur diverses formules relatives à la theorie des intégrales définies. Journal de l'école polytechnique, cah. 28.

oder:

$$n\varphi(x,n) = (x+1)\varphi(x,n-1) + (n-x)\varphi(x-1,n-1),$$

und dieser Gleichung hat nach (5) in der That $\varphi(x,n)$ zu genügen.

Ferner sieht man augenblicklich, dass

$$\varphi(n-1-x,n) = \varphi(x,n),$$

während

$$\frac{\pi}{2}\varphi(n-1,n) = \frac{\pi}{2\Pi(n)} = \int_0^\infty \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{n+1} \cos(n-1)z\,dz$$

und

$$\frac{\pi}{2}\varphi(n,n) = 0 = \int_0^\infty \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{n+1} \cos(n+1)z\,dz$$

bekannte Integralformeln darstellen.

Die Formel (6) ist nun sehr geeignet, um für sehr grosse n Näherungsausdrücke für $\varphi(x,n)$ zu gewinnen. Man sieht sofort, dass für sehr grosse n nur die kleinen Werthe von z nennenswerthe Beiträge zu dem Integrale (6) liefern können. Es liegt deshalb nahe

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{6}$$

und

$$\frac{\sin z}{z} = e^{\log\left(\frac{\sin z}{z}\right)} = e^{-\frac{z^2}{6}}$$

zu setzen. Nennt man noch der Kürze wegen $c = 2x+1-n$, so wird dann:

$$\varphi(x,n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{n z^2}{6}} \cos cz \cdot dz$$

und nach einer bekannten Integralformel:

$$\varphi(x,n) = \sqrt{\frac{6}{n\pi}}\, e^{-\frac{3}{2}\frac{c^2}{n}}.$$

Nimmt man weiter an:

$$x = \frac{n}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{n}, \tag{7}$$

wobei a eine endliche, also gegen n sehr kleine Zahl ist, so ergiebt sich

$$\varphi(x, n) = \sqrt{\frac{6}{\pi n}}\, e^{-\frac{3}{2}a^2}. \tag{8}$$

Die Richtigkeit der eben ausgeführten Rechnung ist natürlich nicht strenge begründet. In dieser Beziehung kann aber auf die citirte Cauchy'sche Abhandlung verwiesen werden.

Jetzt kann leicht die Wahrscheinlichkeit W (ganz ähnlich wie in § 1) dafür, dass x zwischen den Grenzen

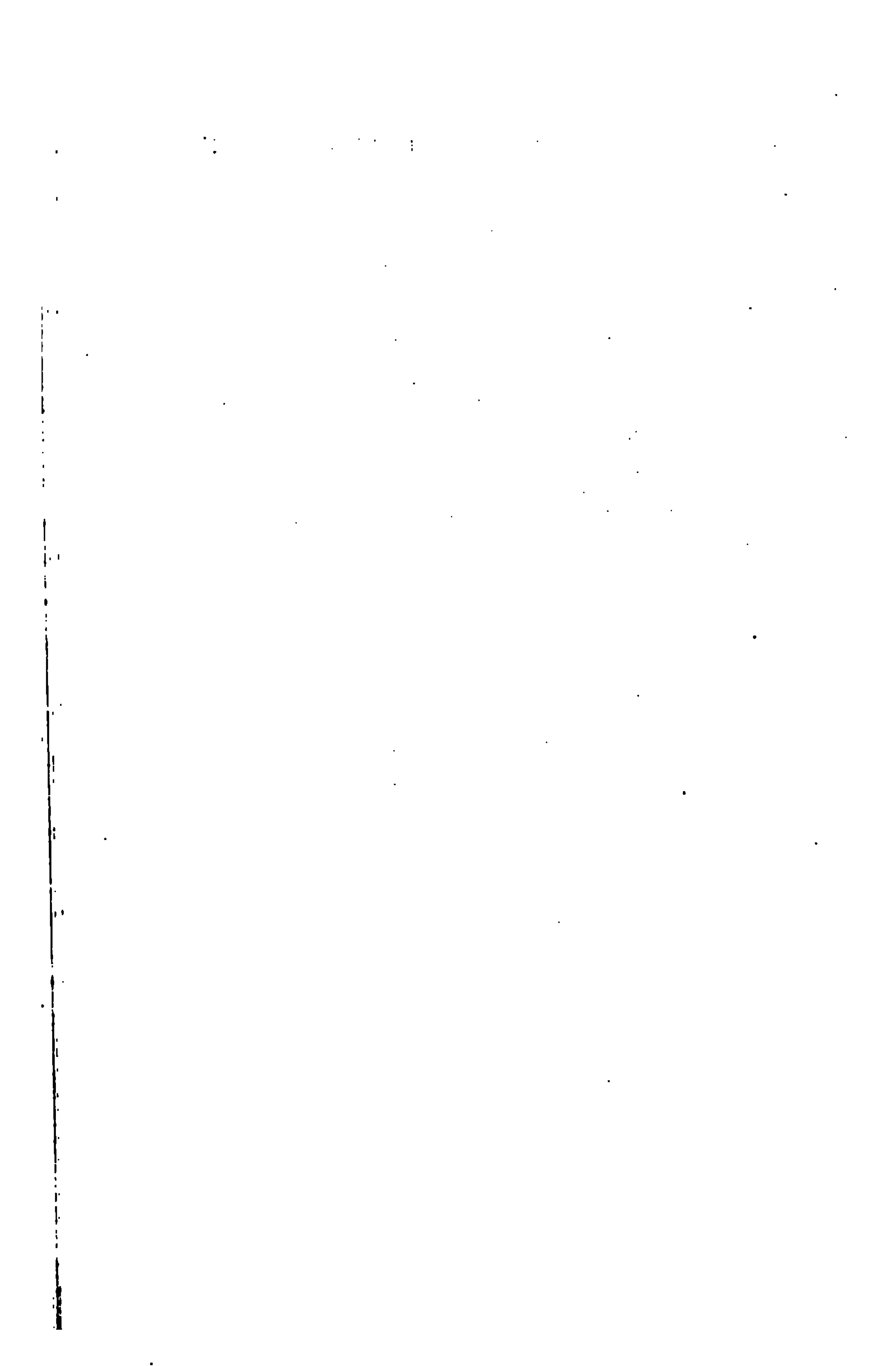
$$\frac{n}{2} \pm \frac{\gamma}{2}\sqrt{n}$$

liegt, angegeben werden. Man findet:

$$W = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot \int_0^{\gamma} e^{-\frac{3}{2}a^2}\, da = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt. \tag{9}$$

Es kann also wieder durch Vergrösserung von γ, W beliebig nahe der Einheit gebracht werden und schon, wenn γ einige Einheiten beträgt, ist W bis auf viele Stellen gleich 1.

Man kann auch sagen: bei einer grossen Anzahl von Fehlern ist mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit das Verhältniss der Anzahlen der positiven zu der Anzahl der negativen Vorzeichen in der ersten Differenzreihe nahezu gleich 1, wenn eine zufällige Vertheilung der Fehler angenommen werden darf.



Zur Mechanik der Glimmlichtphänomene.

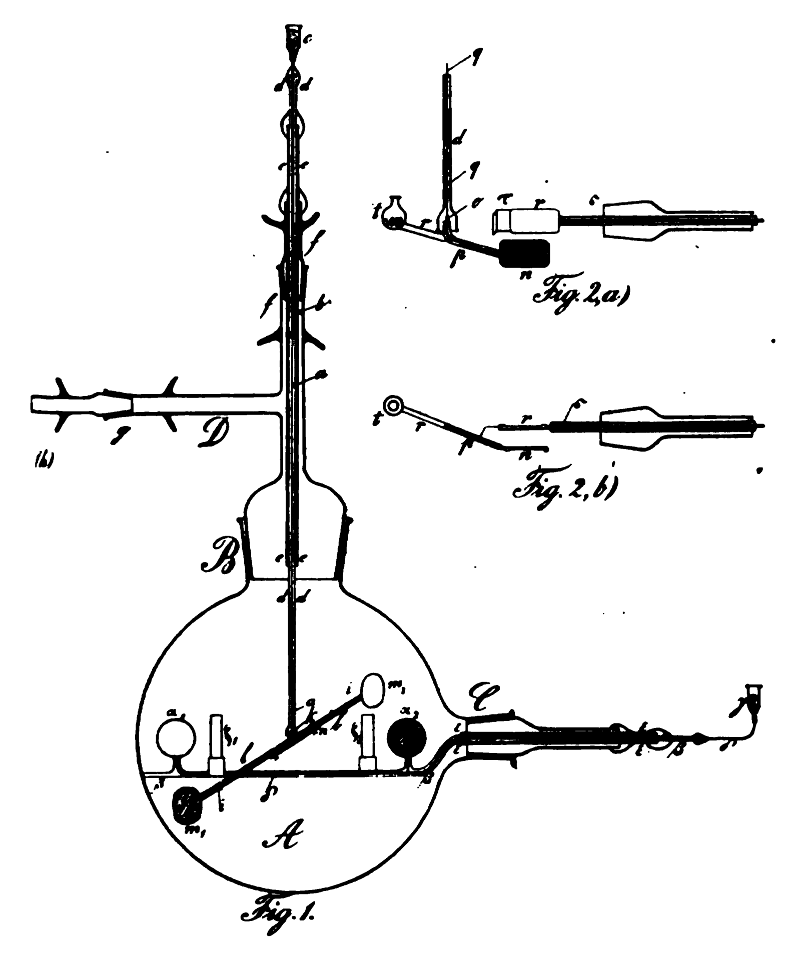
Von **Hermann Ebert.**

(*Eingelaufen 7. Januar.*)

Bei Gelegenheit einer früheren der Hohen Akademie am 5. November 1898 vorgelegten und in den Sitzungsberichten p. 497 abgedruckten Untersuchung war ich auf Grund zahlreicher Messungen zu der Vermutung geführt worden, dass sich in den Glimmlichtern der Gasentladungen Vorgänge abspielen, welche den Gasinhalt derart verändern, dass die an sich unsichtbaren Vorgänge doch auch den sichtbaren Verlauf der Entladung wesentlich mitbestimmen. Diese Veränderungen, denen eine gewisse Nachdauer zukam, konnten durch die Annahme gedeutet werden, dass die Teilchen, Jonen oder sonstige mit freier Elektricität geladene Partikelchen, welche die aus den Messungen namentlich von Hittorf und Warburg genauer bekannten positiven Ladungen der Glimmlichter bedingen, auch nach dem sichtbaren Aufhören der Entladung noch eine gewisse Zeit lang sich in dem von Glimmlicht durchsetzten Gasraume zu erhalten vermögen. Dann musste dem Eindringen neuer Glimmlichtstrahlen ein gewisser Widerstand, oder besser eine elektromotorische Gegenkraft entgegen treten, so dass das zum Einsetzen der Entladung nötige Potential sich wieder erhöht, während es durch die fortschreitende Evacuation bis dahin erniedrigt worden war; dies wurde thatsächlich beobachtet. Auffallend war aber dabei, dass sich diese Wirkung bereits bemerklich machte, wenn nur die vordersten Spitzen zweier kurz nach einander erzeugten Glimmlichter in die gegen-

seitige Wirkungssphäre gerieten. Hat man auch schon auf Grund anderweitiger Beobachtungen gerade diese Stellen als den Sitz derjenigen Processe betrachtet, durch welche die der eigentlichen Entladung vorhergehenden Spannungen, etwa diejenigen gewisser Polarisationszustände in dem Gase, ausgelöst werden, so war doch schwer zu verstehen, wie das Vordringen der Glimmlichtspitzen in denselben Teil des Gasraumes hinein seine Wirkung rückwärts bis zu den Elektroden selbst hin zu äussern vermag. Denkt man sich mit O. Lehmann und Righi die das Glimmlicht tragende Elektrode wie mit einer Wolke positiv geladener Teilchen umgeben und zieht man die oft hervorgehobene, relativ grosse „Steifheit der Glimmlichtstrahlen" in Betracht, so wird die Mechanik des Vorganges freilich verständlicher. Immerhin war es wünschenswert, einen direkten Beweis für die Rückwirkung der zeitlich nach einander erzeugten Glimmlichter auf die sie tragenden Elektroden zu besitzen. Derselbe dürfte in der folgenden Erscheinung gefunden sein. Ich construierte eine „Vacuumdrehwaage", welcher der hochfrequente, hochtransformirte Wechselstrom, den ich schon früher verwendete, zugeführt wurde. An einem sehr dünnen Constantan- oder Messingdraht, der gleichzeitig die eine Stromzuführung bildet, hängt ein Querdraht mit zwei vertikal stehenden Aluminiumflügeln, welche gleichzeitig abwechselnd Anode und Kathode werden; durch Glasumhüllungen ist dafür gesorgt, dass sich die Entladung auf die Flügel beschränkt. Vor den Flügeln ist beiderseitig auf verschiedenen Seiten (vgl. Fig. 1) ein gleichbeschaffenes Plattenpaar fest aufgestellt, das mit dem anderen Transformatorpol leitend verbunden wird. Das Ganze ist in eine geräumige Glaskugel eingeschlossen, welche beliebig weit ausgepumpt werden kann. Beim Spiele des Wechselstromes ist je eine von den einander gegenüber stehenden Platten abwechselnd positiv geladen, die andere negativ und umgekehrt. Man sollte in allen Fällen Anziehung der stets ungleichnamig geladenen Platten erwarten. Diese macht sich auch sehr deutlich bei hohen Drucken bemerklich, bei denen die Wechselstromentladung überhaupt noch nicht

eintritt oder die Glimmlichter nur eben beginnen, einzelne Teile der Platten zu bedecken. Sowie sich aber bei tiefer werdendem Gasdrucke ausgedehntere Glimmlichthüllen ausbilden und dieselben beginnen, einander von beiden Seiten her zu



begegnen, so wird die elektrostatische Anziehung durch eine immer kräftiger werdende Abstossung überwunden. Die beweglichen Elektroden werden von den feststehenden zurückgestossen, wiewohl das Glimmlicht der einen vollkommen er-

kochen und durch Anodenlicht ersetzt ist, wenn das der anderen ausgebildet wird, wie man im Drehspiegel unzweifelhaft erkennt. Hier hat man eine mechanische Rückstauung der Elektroden und zwar von dem Momente an, in dem die Glimmlichtspitzen sich begegnen, eine Wirkung, welche die elektrostatische Anziehung überwindet, und welche nicht auf eine Rückstosswirkung der aus der Elektrode etwa austretenden Teilchen zurückgeführt werden kann, wie weiter unten nachgewiesen werden wird. —

Nach diesen orientierenden Vorbemerkungen möge zunächst die genauere Beschreibung des Apparates, dann die Aufführung der typischsten der mit demselben ausgeführten Versuche folgen.

Apparat. Die Vacuum-Drehwaage wurde in zwei Formen ausgeführt, als zweiarmige Waage und als einarmige.

a) Die zweiarmige Drehwaage. An eine dickwandige Glaskugel *A* Fig. 1 von 14 cm Durchmesser waren zwei Schliffe angeblasen, oben ein 4.5 cm weiter *B*, seitlich ein engerer *C* von 1.8 cm lichter Weite.[1] Durch den ersteren wurde die mit dem einen Transformatorpol in metallischer Verbindung stehende Drehwaage, durch den letzteren das ablenkende, mit dem anderen Pole verbundene System eingeführt. Die Drehwaage hängt an dem 18 cm langen, nur 0.003 cm dicken Constantandraht *a*, der oben an den dicken kupfernen Zuführungsdraht *b* angelötet ist; an diesen ist oben das Quecksilbernäpfchen *c* angekittet zum Einführen des Zuleitungsdrahtes. Damit sich die Entladung nicht an den Aufhängedraht *a* ansetzt und ihn erwärmt, begleitet denselben die unten napfförmig erweiterte Schutzröhre *d* aus Glas, welche weit genug ist, um der Suspension die nötige Bewegungsfreiheit zu gewähren, aber eng genug, um das Auftreten von Entladungsbüscheln am Drahte selbst zu verhindern. Der Zuführungsdraht *b* ist oben in *d* mit Siegellack festgekittet. Die Röhre *d*

[1] Die Glasteile wurden von Herrn Glasbläser Greiner in dem glastechnischen Institute des Laboratoriums der Herren Dr. Bender und Dr. Hobein in München in vorzüglichster Weise hergestellt.

wird von der Trageröhre c gehalten, in die sie eingekittet ist, letztere ist in dem Schliffstück f befestigt, welches unmittelbar auf B aufsitzt. Vermittelst des Schliffes ff wird es möglich, der Drehwaage jede gewünschte Anfangslage und dem Aufhängedrahte a nach erfolgter Ablenkung eine beliebige Torsion zu erteilen. Eine hier angebrachte, sowie eine zweite um den Aequator von A herumgelegte (in der Figur gleichfalls nicht gezeichnete) Gradskala gestattet wie bei der Coulombschen Drehwaage die entsprechenden Winkel zu messen.

Durch das seitliche Rohr D wird der Apparat evacuiert. Die Verbindung nach der Quecksilberpumpe wird durch den Schliff g und einen zweiten (h) vermittelt, dessen Axe senkrecht zur Zeichenebene steht. Durch Drehen um diese beiden Schliffe ist es möglich, auch dem an der Pumpe befindlichen Apparat jede beliebige Neigung gegen die Vertikale zu erteilen und zu bewirken, dass der Draht a genau axial in dem Rohre d herabhängt und nirgends anstösst; die Kugel A ruhte auf Strohkranz und einem in der Höhe verstellbaren Tischchen.

Die Drehwaage selbst besteht aus einem dünnen 8 cm langen Aluminiumstäbchen i, welches von einer eng anschliessenden, in der Mitte bei k geöffneten Glasröhre l umgeben ist. Durch die Oeffnung k ist der Aufhängedraht a eingeführt und an dem Stäbchen i befestigt. An beiden Enden sind die 1,5 cm im Durchmesser haltenden kreisscheibenförmigen Elektroden m_1, m_2 aus dünnem Aluminiumblech durch angebogene Hülsen, welche in die Röhre l über die etwas zugespitzten Enden von i gesteckt werden, befestigt. Es besteht daher eine ununterbrochene metallische Verbindung von c bis zu $m_1\,m_2$ hin, ohne dass irgendwo Veranlassung zu störender Funkenbildung gegeben wäre. Die etwas nach oben gebogenen Ränder der Oeffnung k greifen so unter die Erweiterung von d, dass hier keine Entladung zu Stande kommt und doch die völlige Bewegungsfreiheit der Waage gewahrt bleibt.

Um starke Bewegungsantriebe zu erhalten, war es geboten, die Ausbildung des Glimmlichtes auf diejenige Seite zu concentrieren, gegen welche die rücktreibende Kraft gerichtet sein

sollte. Zu diesem Zwecke ist je eine Seite der Elektroden m_1, m_2 mit einem Glimmerblättchen bedeckt (schraffiert), welche von drei nach rückwärts umgebogenen Fortsätzen, die man an dem Rande der Aluminiumscheibchen hatte stehen lassen, festgehalten werden. Diese Bedeckung hindert vollkommen den Austritt der Entladung. In der perspectivischen Zeichnung 1 würde also das Glimmlicht an der Elektrode m_1 sich nur auf der vom Beschauer abgewandten, an m_2 nur an der diesem zugewandten Seite ausbilden.

Damit jedoch auch dem etwa zu erhebenden Einwande begegnet werden konnte, dass dabei durch Teilchen, welche von den Elektroden fortgeschleudert würden, ein merklicher Rückstoss eintreten und etwa durch diesen die beobachtete Abstossung der Flügel erklärt werden könne, wurden auch zahlreiche Versuche mit Elektroden ohne diese Glimmerbedeckung ausgeführt. Bei diesen bedeckten sich dann beide Seiten vollkommen gleichmässig mit Glimmlicht, nur war dieses nicht so dicht, die Wirkung daher etwas schwächer.

Um der Drehwaage noch ausser der Torsionskraft der Suspension ein bestimmtes Direktionsmoment erteilen zu können, war meist an der Glasröhre l unten eine äusserst feine, stark magnetisierte Nadel n befestigt, welche in dem Felde eines Hilfsmagneten, oder der Erde, oder des mehr oder weniger vollkommen astasierten Erdfeldes schwingend, die Empfindlichkeit der Drehwaage innerhalb sehr weiter Grenzen von aussen her, ohne innern Eingriff nötig zu machen, variieren liess.

Das ablenkende System besteht ebenfalls aus je zwei 1,5 cm grossen, entweder einseitig mit Glimmer belegten oder beiderseitig freien Aluminiumelektroden a_1 a_2, welche von Ansätzen der zweimal umgebogenen Glasröhre β getragen werden. Diese führt den am Ende mit dem Quecksilbernäpfchen γ versehenen Zuleitungsdraht δ und ist mit der Trageröhre ε in den Schliff C eingekittet. Beim Zusammensetzen des Apparates wird zuerst die Röhre β durch den Schliff C eingeführt, dann werden von B aus mittels einer langen Greifzange die Scheiben a_1 und a_2 mit ihren Hülsen in die Ansätze der Glasröhre β fest

eingesetzt. Diese lehnt sich dabei mit ihrem zugeschmolzenen Ende an die Innenwand der Kugel A an, um dem Drucke beim Einsetzen der Elektroden genügenden Widerstand entgegensetzen zu können. Kurze Drahtstücke und Auskleidungen mit Stanniol vermitteln eine sichere funkenlose Zuleitung zu den Elektroden α_1 α_2; die allseitige Umkleidung mit Glas bewirkt, dass nur auf diesen Entladungserscheinungen auftreten.

Damit es, so lange noch die elektrostatische Anziehung zwischen den einander gegenüber stehenden unbedeckten Elektrodenflächen überwiegt, nicht bis zur metallischen Berührung und damit zu Kurzschlüssen in der Hochspannungsleitung kommen kann, sind an dem Glasstabe β noch zwei „Abweiser" aus Glimmer auf den den unbedeckten Hälften von α_1 und α_2 zugekehrten Seiten angekittet, zwei kleine Blättchen mit je zwei vertikalen Einschnitten, in die nach dem Einsetzen von C von oben her (durch B hindurch) die längeren Glimmerstreifen ζ_1 und ζ_2 eingeschoben werden.

b) Die einarmige Drehwaage. Schon bei den ersten Versuchen stellte es sich heraus, dass die rückstossenden Kräfte ziemlich grosse waren, so dass augenscheinlich auch schon mit einer viel weniger empfindlichen und darum auch weniger subtilen Anordnung auszukommen war. Es wurde daher noch das einarmige, in Fig. 2a) von vorn (in etwas perspectivischer Ansicht) in Fig. 2b) von oben gesehen dargestellte System angewendet. Die rechteckig gestaltete Elektrodenplatte n aus Messing von $0,8 \times 2,2$ cm² Fläche mit abgerundeten Ecken, mit oder ohne Glimmerbeleg, ist an einem Kupferdrahte o befestigt, der durch das rechtwinklig umgebogene Glasrohr p geschoben und an den dünnen, 12 cm langen, vorher gut gestreckten, harten Messingdraht q angelötet ist. Auf der entgegengesetzten Seite von p ist mittels des kurzen Glasstäbchens r die kleine, oben offene Kugel t angeschmolzen, in welche Tarierschrot zur Ausbalancierung der Elektrode n gethan wird. Die feste Elektrode ν ist ebenso beschaffen, wird von dem Zuleitungsdrahte σ getragen, und hält den kleinen aus einem Glimmerblatte gebogenen Abweiser τ. Die beweg-

liche Elektrode *n* ist an ihrer Ansatzstelle so gebogen, dass sie in der der Elektrode *r* nächsten Stellung, die sie vermöge der Grösse von *t* einnehmen kann, dieser parallel steht; dies hat den Vorteil, dass auch die Glimmlichtschichten und ihre Begrenzungen einander parallel verlaufen, und der Druck der abstossenden Kraft auf der ganzen Fläche gleichmässig erfolgt.

Beobachtungen. 1. Ist der Druck in der Kugel *A* hoch, so vermag der Wechselstrom, der ja nur auf eine gewisse Spannung hinauftransformiert wird (etwa 2800 Volt), die Gasschicht nicht zu durchbrechen. Die Elektroden werden dann abwechselnd positiv und negativ auf diese Maximalspannung geladen. Da immer ungleichnamig geladene Platten einander gegenüber stehen, so findet Anziehung statt, die Drehwaagenflügel schlagen ziemlich heftig gegen die Abweiser.

2. Dieses Verhalten besteht fort, wenn bei allmählicher Evacuation die ersten Glimm- und Anodenlichter auf den Platten erscheinen. Selbst wenn der Abstand der Elektroden im Ruhezustand mehrere Centimeter beträgt, werden die beweglichen Elektroden herangezogen, schlagen an den Abweisern an, prallen zunächst zurück, die Schwingungen werden aber immer kleiner, bis der Drehwaagenarm dauernd in der nächsten Stellung verharrt, die ihm die Construction des Apparates gestattet. Hier wird er mit ziemlicher Kraft gehalten, so dass ihn erst eine stärkere Torsion des Aufhängedrahtes wegzureissen vermag.

3. Bedeckt das Glimmlicht die ganze Elektrodenfläche, so ändert sich zunächst nichts an dem Verhalten, so lange die Glimmlichtschicht noch dünn ist. Breitet sich dieselbe aber bei fortschreitender Evacuation weiter in den Gasraum hinein aus, so tritt eine neue Erscheinung von dem Momente an ein, in welchem der vordere Glimmlichtsaum die Mitte des Abstandes zwischen den einander gegenüber stehenden, durch die elektrostatische Anziehung einander so nahe gebrachten Elektroden, als es die Abweiser gestatten, überschreitet: die Anziehung wird lockerer, schon eine geringere Torsionskraft zieht den Drehwaagenarm zurück, gegen-

über der Anziehung macht sich eine neue, rückstossende Kraft geltend.

4. Bei weiterem Auspumpen werden die Glimmlichtschichten immer dicker. In dem Momente der Anschaltung des Wechselstromes findet im ersten Momente noch Anziehung statt; die Entladung ist noch nicht voll ausgebildet, auch findet das erste Glimmlicht, wenn es auf einer Seite hervorbricht, ja noch nicht die Veränderung im Gase durch eine vorhergehende, von der anderen Seite kommende Glimmlichtsäule vor, auf die wir die rückstauende Wirkung zurückführen. Sowie das Glimmlicht aber vollkommen ausgebildet ist, schiebt es die beweglichen Elektroden deutlich zurück; die Anziehung der ungleichnamig geladenen Elektroden hat sich in eine Abstossung verwandelt. War an dem Schliffe *ff* so lange gedreht worden, bis der Drehwaagenarm sich in der Ruhelage eben an den Abweiser anlehnte, so wird derselbe deutlich zurückgestossen, wenn sich die Glimmlichter in dem Zwischenraum zwischen festen und beweglichen Elektroden begegnen und sich hier zu durchdringen scheinen.

5. Wird der Druck noch tiefer, so dass die Glimmlichtausbildung an beiden Elektroden immer stärker wird, so tritt die rückstossende Kraft immer deutlicher hervor. War der Schliff *ff* so gestellt, dass die festen Elektroden a_1 a_2 von den beweglichen m_1 m_2 einen grossen Abstand haben und dreht man nun *ff* so, dass die Drehwaagenflügel mit ihren Glimmlichtern denen der feststehenden Elektroden genähert werden, so stellt sich in dem Momente der Begegnung der Glimmlichter dem weiteren Annähern ein Hindernis entgegen, so dass nun der Aufhängedraht *aa* tordiert wird. Dabei tritt eine merkliche Deformation beider Glimmlichter ein; dieselben drücken sich scheinbar gegenseitig zusammen, wodurch selbst der unter ihnen liegende Dunkelraum schwache Zusammendrückungen erfährt; die zeitlich nach einander auftretenden Glimmlichter wirken wie elastische Kissen aufeinander. Nach der Grösse des Torsionswinkels konnte die Stärke der rücktreibenden Kraft annähernd geschätzt werden. (Bei diesen wie

den folgenden Versuchen war der kleine Richtmagnet *n* Fig. 1 entfernt worden).

6. Dass die Ursache der Erscheinung wirklich darin liegt, dass die Glimmlichter in die gegenseitige Wirkungssphäre gelangen, wird auch noch durch folgenden Controlversuch bestätigt: Die Drehwaage wird durch Drehen an dem Schliff *ff* senkrecht zu der Verbindungslinie der feststehenden Elektroden a_1 a_2 gestellt: Bei Erregung des Wechselstromes war nicht der geringste Bewegungsantrieb zu erkennen. Wurden die Elektroden einander mehr genähert, etwa in 45° Stellung gebracht, so schien eine schwache Anziehung sich bemerklich zu machen. Dies würde die von Herrn Warburg[1]) bei Batterieentladungen genauer verfolgte Erscheinung sein. An der Kathode macht sich entsprechend dem starken Potentialgefälle an derselben der Bewegungsantrieb, welcher den Abstand von Anode und Kathode zu vermindern strebt, besonders stark geltend. Die hier studierte Abstossung trat aber erst in Entfernungen ein, bei denen die beiderseitigen Glimmlichter denselben Ort im Gasraum erreichten. Durch diese Versuche mit grossen Elektrodenabständen, bei denen weder Anziehung noch Abstossung eintrat, wird zugleich bewiesen, dass nicht irgend welche Störungen, etwa durch schwache Entladungen am Aufhängedraht die Ursache der oben beschriebenen Glimmlichtwirkungen sein können. Auch electrodynamische Wechselwirkungen sind nicht zur Erklärung heranziehbar. In den Zuleitungen pulsieren zwar Ströme. Wenn aber z. B. a_1 a_2 Fig. 1 positiv sind, der Strom also von rechts nach links in dem Drahte δ fliesst, und durch m_1 m_2 in den beweglichen Teil eintritt, so liegen von der Mitte nach links Stromteile, die entgegengesetzt gerichtet sind, in den gleichbeschaffenen Strombahnen rechts aber solche, welche gleichgerichtet sind, ihre Wirkung muss sich aufheben. Bei der Anordnung Fig. 2 sind die Zuführungen so weit von einander entfernt, dass ihre Wechselwirkung unmerklich klein ausfallen muss.

---

[1]) E. Warburg, Wied. Ann. 45, p. 1, 1892.

7. Betrachtet man die Leuchterscheinung im rotierenden Spiegel, etwa dann, wenn eine gewisse durch Drehen an *ff* erzeugte Torsionskraft der rückstossenden Kraft der Elektroden gerade das Gleichgewicht hält, so erkennt man, dass die Glimmlichter zeitlich nacheinander ausgebildet werden. Es ist in einem bestimmten Augenblicke immer nur ein Glimmlicht sichtbar; die gegenüber liegende Elektrode ist (in Luft) mit dem bekannten rötlichen Büschel von Anodenlicht bedeckt. Zwischen beiden liegt der dunkle Faradaysche Trennungsraum. Man kann also die Erscheinung nicht etwa darauf zurückführen, dass das Glimmlicht über die eigene Anode hinweggegangen wäre oder diese selbst gar in den zugehörigen Kathodendunkelraum eingetaucht hätte, in welch' letzterem Falle ja erhebliche Potentialsteigerungen eintreten, und folglich auch rückstauende mechanische Wirkungen möglich sind. In allen Fällen war der Elektrodenabstand so gross, dass sich die ganze Entladung vollkommen frei ausbilden konnte. Beim Zeichenwechsel des Wechselstromes war die Erscheinung vollkommen umgelagert, dazwischen wurde das Gas immer völlig dunkel, die Wirkung muss also auf einer unsichtbaren Nachdauer in der Wirkung der sichtbaren Glimmlichterscheinung beruhen.

8. Wird sehr tief ausgepumpt, so wird die Erscheinung immer kräftiger und deutlicher. Zu den allertiefsten Drucken, bei denen dann lebhafte Entwickelung der Kathodenstrahlen eintrat, wurde indessen absichtlich nicht gegangen, um nicht dem Einwande zu verfallen, es handle sich um eine Art Radiometererscheinung. Die gewöhnlich benutzten Drucke waren immer viel zu hoch, als dass Bewegungsimpulse wie bei den Radiometern hätten auftreten können.

Die folgenden Versuche sollen einige andere Bedenken zerstreuen.

9. Man könnte versucht sein, die Erscheinung auf eine Art Rückstosswirkung zurück zu führen. Waren die Drucke auch immer ziemlich hohe, so kann man doch annehmen, dass auch bei ihnen an der Kathode sich schon Kathodenstrahlen

entwickeln, welche nur nicht zur Erscheinung gelangen. Man hat ja auch Gründe dafür, in den Glimmlichtstrahlen ähnliche Gebilde zu erblicken, etwa die stark absorbierten, schon bei höheren Drucken emittierten Kathodenstrahlen selbst. Dann müssen nach der neuen Auffassung Teilchen mit grosser Geschwindigkeit von den Elektroden fortgeschleudert werden. Sind ihre Massen auch klein, so können ihre Bewegungsmomente doch erhebliche sein in Folge der grossen Geschwindigkeiten, mit denen sie die Elektrode verlassen. Man könnte daher auch schon bei höheren Drucken Rückstosskräfte vermuten, wie sie bei tieferen Drucken und heftiger Kathodenstrahlenentwickelung ja unzweifelhaft auftreten. Dass dadurch die hier beobachteten Erscheinungen nicht erklärt werden können, sieht man am besten, wenn man beide Elektrodenseiten unbedeckt lässt (vergl. S. 28), so dass sich das Glimmlicht auf beiden in gleicher Weise ausbildet. Dann müssten die Reactionsstösse auf beiden Seiten gleich stark erfolgen und sich ihre bewegenden Kräfte aufheben. Nichtsdestoweniger gelingt der Abstossungsversuch, wenn auch die entwickelten Kräfte geringer sind, weil die Stromdichte eine geringere ist und die Glimmlichter auf den Flächen, an denen sie allein in Wechselwirkung treten, schwächer sind. Auch müsste bei merklichen Reactionsstössen und einseitiger Elektrodenbedeckung sich die Drehwaage in allen Lagen in Bewegung setzen, was sie nach § 3 nicht thut. Vielleicht austretende Kathodenstrahlen würden ferner, schon bei einigermaassen grossen Drehungswinkeln die gegenüber liegenden Elektrodenflächen gar nicht mehr treffen, sondern an ihnen vorbeigehen, da sie ja immer vorwiegend senkrecht zur emittierenden Elektrodenebene verlaufen. Schon die Versuche § 3 zeigten, dass die Erscheinung überhaupt nicht durch Vorgänge an den Elektroden selbst bedingt sein kann, sondern die Wechselwirkung der abwechselnd von Glimmlicht durchstrahlten Gasmassen die Ursache tragen muss.

10. Mit Rücksicht auf die Ergebnisse der früheren, eingangs erwähnten Untersuchung ist vor allem auf den Nachweis Gewicht zu legen, dass die constatierte ponderomotorische

Abstossung auf einer Nachwirkung der alternierenden Entladung beruht. Man könnte aber endlich noch folgendermaassen schliessen und die Erscheinung auf die gleichzeitig bei derselben Entladung stattfindenden Ladungen zurückführen wollen: Durch zahlreiche Untersuchungen ist unzweifelhaft nachgewiesen, dass sich um die Kathode herum im Glimmlicht eine Art Atmosphäre von positiv geladenen Teilchen ausbildet, das Glimmlicht enthält „freie + Electricität". Breitet sich nun dasselbe bei der Evacuation immer mehr aus, so kommt es in die Nähe der positiv geladenen Anode und könnte folglich von dieser her eine rein electrostatische Abstossung erfahren. Wäre diese die Ursache unserer Erscheinung, so müsste der Versuch mit gleichgerichteten Entladungen ebenso gut gelingen. In der früheren Arbeit wurde erwähnt, dass auch bei diesen ähnliche Stauwirkungen auftreten können, wenn eine grosse Anzahl von Entladungen dicht aufeinander folgt; jede einzelne hinterlässt in dem Gase eine Nachwirkung (etwa freie Jonen); wenn die gleichgerichteten Einzelentladungen so rasch einander folgen, dass die Zufuhr an geladenen Partikelchen grösser ist als die Zahl der durch Diffusion sich zerstreuenden, so muss die Entladung selbst zu Rückstauungserscheinungen, z. B. Spannungserhöhungen Veranlassung geben. Es wäre daher nicht unmöglich, dass mit einer Hochspannungsbatterie, die mir leider noch nicht zur Verfügung steht, sich unter gewissen Bedingungen eine der hier beschriebenen ähnliche Abstossungserscheinung herbeiführen liesse. Bei grösseren Abständen fand Herr Warburg[1]) die von ihm genauer gemessenen Anziehungen zwischen der feststehenden Anode und der beweglichen Kathode, nicht aber Abstossungen wie bei den vorliegenden Versuchen. Sollte sich dennoch bei einer gewissen Lage der Anode zu der positiv geladenen Glimmlichtschicht eine Abstossung beobachten lassen, welche die elektrostatische Anziehung zwischen Anode und Kathode überwindet, so würde dieselbe aber ebenso wenig wie die Erscheinung bei Wechsel-

---

1) E. Warburg, Wied. Ann. 45, p. 1, 1892.

stromentladungen auf die zuletzt erwähnten direkten Wechselwirkungen der Anoden- und der Glimmlichtentladungen zurückgeführt werden können, wie die folgenden Versuche mit den gleichgerichteten Entladungen des Inductoriums und der Influenzmaschine zeigen.

11. Wurde bei Drucken, bei denen die Erscheinung unter Anwendung von Wechselstrom sehr deutlich war, die Vacuumdrehwaage an ein grosses Inductorium (25 cm Funkenlänge) angeschlossen, so gingen bei den grossen Elektrodenflächen in dem weiten Entladungsraume meist beide Ströme, der Oeffnungsstrom wie der Schliessungsstrom durch das Gas hindurch. Man hatte dann Wechselstromentladungen und auf beiden Seiten die charakteristische Kathodenerscheinung. Alsdann fehlte auch die Abstossung unter den oben genannten Bedingungen nicht. Freilich war die ganze Erscheinung minder deutlich und reinlich, dem unregelmässigen Verlaufe der Inductorienentladungen entsprechend. Wurde aber in den secundären Stromkreis vor die Vacuumkugel eine Funkenstrecke oder ein Geisslersches Rohr eingeschaltet, so dass nur der Oeffnungsinductionsstrom überging, so blieb die Abstossung völlig aus und nur Anziehung wurde beobachtet. Bei einseitig gerichteten Einzelentladungen, zwischen denen immer eine längere Zeit verstreicht, kommt also die abstossende Wirkung nicht zu Stande. Der Versuch zeigt zugleich, dass zu seinem Gelingen auch erheblich viel langsamere Zeichenwechsel, als hier gewöhnlich verwendet wurden, genügen. Besonderen Untersuchungen bleibt es vorbehalten, festzustellen, wie lang die Zeitintervalle sein können, d. h. wie lange die rückstauende Wirkung von Glimmlicht durchstrahlter Gase anhält; die erhaltenen Zahlen bieten Aussicht, Rückschlüsse auf die Diffusionsgeschwindigkeit der (Rieckeschen, vergl. die frühere Arbeit a. a. O. p. 523) Partikelchen und damit auf ihre Natur zu gestatten.

12. Die Entladungen der Influenzmaschine erfolgen weit regelmässiger als diejenigen des Inductoriums. Als eine grosse 20-plattige Töplersche Maschine von Leuner zum Betriebe der Drehwaage herangezogen wurde, zeigte sich durchweg nur

Anziehung und zwar bei nahen Elektroden eine sehr kräftige. Hier hat man nur einseitige Einzelentladungen von sehr grosser Zahl (schätzungsweise bis zu 30000 in der Secunde); aber auch bei reichster Ausbildung des Glimmlichtes wurde die beschriebene Abstossung niemals erhalten, wiewohl die Glimmlichtschicht ebensoweit an die Anode heranreichte, wie bei den Wechselstromentladungen, und die Entladungen überaus kräftig und strahlend waren. Diese Versuche zeigen zugleich, dass auch nicht die vor der Kathode in Folge der Wirkung der elektrischen Kräfte eintretenden Steigerungen des hydrostatischen Druckes oder die ihren Ausgleich herbeiführenden Gasströmungen die Ursache sein können, auf welche Herr Warburg a. a. O. p. 5, 6 und 25 die Aufmerksamkeit gelenkt hat; dieselben kehren sich ausserdem mit dem Zeichenwechsel um und nehmen mit abnehmendem Gasdrucke ab, während die hier studierte Wirkung zunimmt. — Sonach dürfte nach allem Gesagten das folgende Resultat keinem Zweifel unterliegen: Bei rasch auf einander folgenden, fortwährend in der Richtung wechselnden kräftigen Entladungen kommt eine abstossende Wirkung der Elektroden, die beide die charakteristischen Kathodenerscheinungen nach einander zeigen, zu Stande, welche bei starker Ausbildung der Glimmlichter die elektrostatische Anziehung der in jedem Augenblicke ungleichnamig geladenen Elektroden vollkommen überwinden kann. Dieselbe macht sich von dem Augenblicke an geltend, in welchem die Glimmlichter (nach einander) in denselben Teil des Gasraumes eindringen und können ihre Ursache nur in einer unsichtbaren Nachwirkung haben, welche das Glimmlichtphänomen in den von ihm durchstrahlten Teilen des Gases zurücklässt.

Sitzung vom 4. Februar 1899.

1. Herr Ferd. Lindemann legt eine Abhandlung der H[e]
K. R. Koch und C. Cranz in Stuttgart: „Untersuchun[g]
über Vibration des Gewehrlaufes“ zur Aufnahme in
Denkschriften vor.

2. Herr K. A. v. Zittel überreicht eine umfangre[iche]
Abhandlung des Herrn Obermedizinalrathes Dr. Egger: „Ue[ber]
Foraminiferen und Ostracoden aus den Kreide-Merg[eln]
der bayerischen Alpen“. Die Abhandlung ist für die D[enk-]
schriften bestimmt.

3. Herr Alfred Pringsheim spricht: „Zur Theorie [des]
Doppel-Integrals, des Green'schen und Cauchy'sc[hen]
Integralsatzes“.

Zur Theorie des Doppel-Integrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 4. Februar.*)

Die folgende Mittheilung knüpft an eine frühere an, die ich unter dem Titel: „Zur Theorie des Doppel-Integrals“ im vorigen Bande dieser Berichte veröffentlicht habe. Im Anschlusse an die daselbst abgeleitete Hauptformel:

$$\iint\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(X,\, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \begin{cases} = \int\limits_{y_0}^{Y} dy \,\overline{\int\limits_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx \\ = \int\limits_{x_0}^{X} dx \,\overline{\int\limits_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy \end{cases}$$

wird zunächst untersucht, in wieweit die Existenz jenes Doppel-Integrals diejenige der beiden einfachen Integrale $\int\limits_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx$, $\int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$ nach sich zieht, bezw. deren Nicht-Existenz offen lässt, und sodann durch Beispiele festgestellt, dass der Fall der Nicht-Existenz in dem als möglich erkannten Umfange auch wirklich vorkommt (§ 1). Dagegen wird in § 2 durch Construction einer eigenthümlichen Gattung von Punktmengen gezeigt, dass selbst die durchgängige Existenz jener einfachen und der aus ihnen gebildeten iterirten Integrale, sowie die Gleichheit dieser letzteren noch keines-

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 28 (1898), p. 59—74.

wegs die Existenz des Doppel-Integrals verbürgt. Das Resultat des § 1 wird hierauf benützt, um den Green'schen Satz über die Reduction eines Flächen-Integrals auf ein Linien-Integral unter etwas allgemeineren Voraussetzungen zu beweisen, als bisher wohl geschehen ist (§ 3). Die hierbei auftretende Eventualität von Integralen nicht-integrabler Differential-Quotienten führt zu einer Umgestaltung der fundamentalen Beziehung:

$$\int_{x_0}^{X} f'(x) \cdot dx = f(X) - f(x_0)$$

für den Fall eines nicht-integrablen $f'(x)$, woraus dann noch ein zweiter, etwas kürzerer Beweis des Green'schen Satzes in dem fraglichen Umfange resultirt (§ 4). Die vorstehenden Ergebnisse werden dann schliesslich zu entsprechender Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes benützt (§ 5).

---

§ 1.

Bedeutet $f(x, y)$ eine im Rechtecke $[x_0 \leqq x \leqq X,\ y_0 \leqq y \leqq Y]$ endlich bleibende[1]) Function, so bestehen die Beziehungen:

$$(1) \qquad \int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \begin{cases} = \int_{y_0}^{Y} dy \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx \\ = \int_{y_0}^{Y} dy \cdot \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx \end{cases}$$

allemal, wenn das betreffende Doppel-Integral existirt.[2]) Ist dies also der Fall, so hat man:

$$(2) \qquad \int_{y_0}^{Y} dy \left\{ \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx - \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx \right\} = 0.$$

---

[1]) D. h. $|f(x, y)| < G$ für $x_0 \leqq x \leqq X,\ y_0 \leqq y \leqq Y$.

[2]) A. a. O. p. 69, Gl. (20).

Da nun, vermöge der Bedeutung des „oberen“ und „unteren“ Integrals[1]) die in der Klammer stehende Differenz, welche man zweckmässig als die Integral-Schwankung von $\int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx$ bezeichnen kann, niemals negativ ausfällt, so folgt aus einer einfachen Umformung der Riemann'schen Integrabilitäts-Bedingung,[2]) dass Gl. (2) dann und nur dann besteht, wenn für eine im Intervalle (y_0, Y) überall dichte Menge von Werthen y':

$$\overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y') \cdot dx - \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y')\, dx = 0, \tag{3}$$

so dass also $\int_{x_0}^{X} f(x, y') \cdot dx$ existirt, und wenn ausserdem die Stellen y, für welche:

$$\overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx - \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx > \varepsilon, \tag{4}$$

bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine unausgedehnte Menge bilden.[3]) (NB. Dabei können immerhin die Stellen y, für welche jene Differenz von Null verschieden ist, auch eine ausgedehnte z. B. überall dichte Menge bilden).

Da im übrigen unter der gemachten Voraussetzung auch die zu (1) analogen Gleichungen bestehen:

$$\int\!\!\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \begin{cases} = \int_{x_0}^{X} dx \overline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy \\ = \int_{x_0}^{X} dx \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy, \end{cases} \tag{5}$$

so gewinnt man den Satz:

---

[1]) A. a. O. p. 64.

[2]) S. z. B. Dini-Lüroth, p. 359, Nr. 14.

[3]) Dini-Lüroth, p. 355, Nr. 9.

Existirt für die Function $f(x, y)$ ein über das Rechteck $[x_0 < x < X,\ y_0 < y < Y]$ erstrecktes eigentliches Doppel-Integral, so existiren die einfachen Integrale:

$$\int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx, \qquad \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$$

für je eine im Intervalle (y_0, Y) bezw. (x_0, X) *überall dichte* Menge. Die Stellen y bezw. x, wo jene Integrale *nicht* existiren, können zwar ebenfalls *überall dicht* liegen; jedoch bilden diejenigen Stellen, für welche die Integral-Schwankung eine beliebig kleine positive Zahl ε übersteigt, allemal eine *unausgedehnte* Menge.[1])

Beispiele: I.[2]) Jede Zahl x lässt sich durch einen systematischen Bruch mit beliebig gewählter ganzzahliger Basis $b > 2$ darstellen und zwar auf eine einzige Weise, wenn man Brüche mit der Periode $(b - 1)$ ausschliesst. Bezeichnet man die Anzahl der hierbei auftretenden Bruchstellen mit p_x (wo

[1]) Unrichtig ist es also, mit Harnack (Elem. der Diff.- und Integr.-Rechnung, p. 313) anzunehmen, dass die Nicht-Existenz jener einfachen Integrale allemal auf eine unausgedehnte Menge y bezw. x beschränkt sein müsse, worauf schon Herr Stolz im Anschlusse an Du Bois Reymond (Journ. f. Math. 94 (1883), p. 278) aufmerksam gemacht hat (Math. Ann., Bd. 26 (1886), p. 93, Fussn.). Auf der andern Seite ist es aber für den Gültigkeits-Beweis der Formel (1) bezw. (5) auch nicht nothwendig, diese Beschränkung mit Herrn Stolz ausdrücklich unter die Voraussetzungen aufzunehmen, wie ich in der oben citirten Mittheilung des näheren erörtert habe.

[2]) Dieses Beispiel ist lediglich eine etwas allgemeinere und genauere Fassung des a. a. O. p. 71 von mir gegebenen, welches letztere ein Versehen enthält. Es müsste auf p. 72, Gl. (6) heissen:

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + p_x} + \frac{1}{1 + q_y},$$

wenn beide Veränderliche x, y durch endliche Decimalbrüche darstellbar sind, in jedem anderen Falle:

$$f(x, y) = 0.$$

also: $p_x \geq 0$), so mag x eine systematische Zahl heissen, wenn p_x endlich ist, und (x, y) als systematischer Punkt bezeichnet werden, wenn beide Coordinaten x, y systematische Zahlen sind. Für ein systematisches x hat alsdann $\frac{1}{1+p_x}$ einen bestimmten positiven Werth ≤ 1, für ein nicht-systematisches wird man diesem Symbole und dem allgemeineren: $\frac{\nu}{\nu+p_x}$ naturgemäss den Werth Null beizulegen haben. Definirt man sodann q_x durch die Gleichung:

$$(6) \qquad q_x = \lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu+p_x},$$

so hat man offenbar:

$$(7) \qquad \begin{cases} q_x = 1, & \text{wenn } x \text{ systematisch}, \\ q_x = 0, & \text{wenn } x \text{ nicht-systematisch}. \end{cases}$$

Nun werde gesetzt:

$$(8) \qquad f(x, y) = \frac{q_y}{1+p_x} + \frac{q_x}{1+p_y},$$

so hat man:

$$(9) \qquad \begin{cases} f(x, y) = \dfrac{1}{1+p_x} + \dfrac{1}{1+p_y}, & \text{wenn } (x, y) \text{ systematisch}, \\ f(x, y) = 0, & \text{wenn } (x, y) \text{ nicht-systematisch}. \end{cases}$$

Da es in jedem endlichen Intervalle (x_0, X) bezw. (y_0, Y) nur eine endliche Anzahl von Werthen x bezw. y giebt, für welche $1 + p_x < \frac{1}{\varepsilon}$ bezw. $1 + p_y < \frac{1}{\varepsilon}$, also auch in dem entsprechenden Rechtecke nur eine endliche Anzahl von Punkten, für welche $f(x, y) > 2\varepsilon$, so erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der Beziehungen:

$$(10) \quad \int_{x_0}^{X} \frac{1}{1+p_x} \cdot dx = 0, \quad \int_{y_0}^{Y} \frac{1}{1+p_y} \cdot dy = 0, \quad \iint_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = 0.$$

Daraus folgt weiter:

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \overline{\int\limits_{x_0}^{X}} f(x,y)\cdot dx = \dfrac{1}{1+p_y}(X-x_0), & \underline{\int\limits_{x_0}^{X}} f(x,y)\cdot dx = 0. \\ \overline{\int\limits_{y_0}^{Y}} f(x,y)\cdot dy = \dfrac{1}{1+p_x}(Y-y_0), & \underline{\int\limits_{y_0}^{Y}} f(x,y)\cdot dy = 0. \end{array}\right.$$

Somit existiren die Integrale $\int\limits_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ bezw. $\int\limits_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$ nur für alle nicht-systematischen Werthe y bezw. x, während für die ebenfalls überall dicht liegenden systematischen die betreffende Integral-Schwankung den Werth $\frac{1}{1+p_y}(X-x_0)$ bezw. $\frac{1}{1+p_x}(Y-y_0)$ besitzt, der jedoch stets nur für eine endliche (also sicherlich unausgedehnte) Menge y bezw. x ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ übersteigt. Daraus folgt dann schliesslich, dass auch:

$$(12)\qquad \int\limits_{y_0}^{Y} dy \overline{\int\limits_{x_0}^{X}} f(x,y)\cdot dx = \int\limits_{x_0}^{X} dx \underline{\int\limits_{y_0}^{Y}} f(x,y)\cdot dy = 0$$

wird, übereinstimmend mit dem Werthe des Doppel-Integrals (10).

II. Bei dem vorigen Beispiele bildeten die Punkte (x, y), für welche $f(x, y)$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, eine in dem betreffenden Rechtecke überall dichte, aber abzählbare Menge (nämlich die Menge der systematischen Punkte). Um eine Function zu erhalten, bei welcher die entsprechende Rolle einer nicht-abzählbaren Menge zufällt, setze man:

$$(13)\qquad \varphi(x, y) = (q_x - q_y)^2 \cdot \left(\frac{1}{1+p_x} + \frac{1}{1+p_y}\right).$$

Theilt man die nicht-systematischen Punkte (x, y) in unsystematische und halbsystematische, je nachdem jede

der beiden Coordinaten oder nur eine derselben eine nicht-systematische Zahl ist, so hat man:

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \text{wenn } (x, y) \text{ systematisch oder unsystematisch,} \tag{14a}$$

dagegen:

$$\varphi(x, y) \begin{cases} = \dfrac{1}{1+p_x}, & \text{wenn } x \text{ systematisch, } y \text{ unsystematisch,} \\ = \dfrac{1}{1+p_y}, & \text{wenn } y \text{ systematisch, } x \text{ unsystematisch,} \end{cases} \tag{14b}$$

so dass also (x, y) für die nicht-abzählbare Menge der halbsystematischen Punkte von Null verschieden ausfällt. Dennoch ist die Menge der Punkte, für welche $\varphi(x, y) > \varepsilon$ wird, eine zweidimensional-unausgedehnte, da dieselben nur auf einer endlichen Menge von Linien: $y = p_x$ bezw. $x = p_y$ (wenn auch daselbst überall dicht) vorkommen. In Folge dessen existirt wiederum das betreffende Doppel-Integral (mit dem Werthe 0), und es gelten im übrigen die Gleichungen (11), (12) genau wie im Falle I.

III. Zu analogen Functions-Bildungen kann man auch gelangen, wenn man statt der Eintheilung der Zahlen in systematische und nicht-systematische diejenige in rationale und irrationale zu Grunde legt. Ist x rational und setzt man $x = \frac{m_x}{n_x}$, so ist n_x eindeutig bestimmt, wenn man m_x, n_x als relativ prime ganze Zahlen und $n_x > 0$ annimmt. Im Falle eines irrationalen x mag dann wiederum dem Symbole $\frac{1}{n_x}$ bezw. $\frac{\nu}{\nu + n_x}$ der Werth Null beigelegt werden, so dass also:

$$r_x = \lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu + n_x} \begin{cases} = 1, & \text{wenn } x \text{ rational,} \\ = 0, & \text{wenn } x \text{ irrational.} \end{cases} \tag{15}$$

Setzt man wieder:

$$
([illegible]4) \quad \begin{cases} f(x, y) = \dfrac{r_y}{1 + s_x} - \dfrac{r_x}{1 - s_y} \\ \varphi(x, y) = (r_x - r_y)^2 \cdot \left\{ \dfrac{1}{1 - s_x} - \dfrac{1}{1 - s_y} \right\}, \end{cases}
$$

so haben $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ ganz analoge Integral-Eigenschaften, wie die entsprechenden Functionen in I und II.

§ 2.

Der Satz des vorigen Paragraphen in Verbindung mit Gl. (1) und (5) lehrt, dass die Existenz der Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx$, $\int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$ für je eine im Intervalle (y_0, Y) bezw. (x_0, X) überall dichte Werthmenge, sowie die Beziehung:

$$
(17) \qquad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy
$$

nothwendige Bedingungen für die Existenz des Doppel-Integrals $\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dx \; dy$ bilden. Ob dieselben auch hinreichend seien, entzieht sich zunächst der Beurtheilung. Soviel steht freilich fest, dass aus der Existenz und Gleichheit zweier Grenzwerthe von der Form $\lim_{\varepsilon = 0} \lim_{\delta = 0} \varphi(\delta, \varepsilon)$ und $\lim_{\delta = 0} \lim_{\varepsilon = 0} \varphi(\delta, \varepsilon)$ im allgemeinen nicht ohne weiteres auf die Existenz von $\lim_{\delta = 0, \varepsilon = 0} \varphi(\delta, \varepsilon)$ geschlossen werden darf.[1] Andererseits wird man bei der besonderen Art der hier vorliegenden Grenzwerthe die Richtigkeit der fraglichen Schlussfolgerung für äusserst wahrscheinlich halten müssen, zumal, wenn

[1] Vgl. Sitz.-Ber. 27 (1897), p. 107.

man beachtet, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(x, y)$ durchweg als positiv vorausgesetzt werden kann.[1]) Nichtsdestoweniger erweist sich jene naheliegende Vermuthung als unzutreffend, selbst wenn die betreffenden Voraussetzungen noch merklich eingeschränkt werden. Es lässt sich nämlich folgendes zeigen:

Ist $f(x, y)$ eine im Rechtecke $[a \leq x \leq A,\ b < y \leq B]$ unter einer festen Grenze bleibende positive Function und bezeichnet man mit x_0, X, y_0, Y beliebige den Bedingungen: $a \leq x_0 < X < A,\ b < y_0 < Y < B$, genügende Zahlen, so braucht *kein* Doppel-Integral von der Form:

$$(18) \qquad \iint\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

zu existiren, auch wenn die einfachen Integrale:

$$(19) \qquad \int_a^A f(x, y) \cdot dx, \qquad \int_b^B f(x, y) \cdot dy$$

für *jedes* y des Intervalles (b, B) bezw. für *jedes* x des Intervalles (a, A) existiren und ausserdem stets die Beziehung besteht:

$$(20) \qquad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy.$$

---

[1]) Da nämlich ein für allemal $|f(x, y)| < G$ angenommen wird, so hat man: $f(x, y) + G > 0$. Aus der Existenz von:

$$\iint\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} (f(x, y) + G)\, dx \cdot dy$$

würde aber sofort auch diejenige von:

$$\iint\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

sich ergeben.

(welche natürlich auch die Existenz[1]) der betreffenden iterirten Integrale involvirt).

Da die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Doppel-Integrales darin besteht, dass die Stellen (x, y), an welchen $f(x, y)$ Sprünge $> \varepsilon$ erleidet, eine zweidimensional-unausgedehnte Menge bilden,[2]) so wird es für den Nachweis der obigen Behauptung im wesentlichen nur darauf ankommen, die Existenz von Punktmengen festzustellen, die zwar in einem zweidimensionalen Gebiete, dagegen auf keiner horizontalen oder vertikalen Linie ausgedehnt sind. Ob derartige Mengen bisher schon bemerkt worden sind, ist mir nicht bekannt. Ich will daher zunächst zeigen, wie man Mengen definiren kann, welche die

[1]) Man bemerke, dass die Existenz von:

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$$

für $a < x_0 < X < A$, $b < y_0 < Y < B$, auch bei durchweg positivem $f(x, y)$ merklich mehr besagt, als diejenige von:

$$\int_{a}^{A} dx \int_{b}^{B} f(x, y) \cdot dy.$$

Setzt man z. B.

$$f(x, y) = 1 \text{ für rationale } x,$$
$$f(x, y) = 2y \text{ für irrationale } x,$$

so wird:

$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} f(x, y) \cdot dy = 1,$$

während

$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{Y} f(x, y)\, dy$$

für $Y < 1$ nicht existirt. (Uebrigens existirt in diesem Falle auch nicht:

$$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1} f(x, y) \cdot dx.$$

Vgl. Thomae, Zeitschr. f. Math. 23 (1878), p. 67).

[2]) Stolz, a. a. O. p. 90.

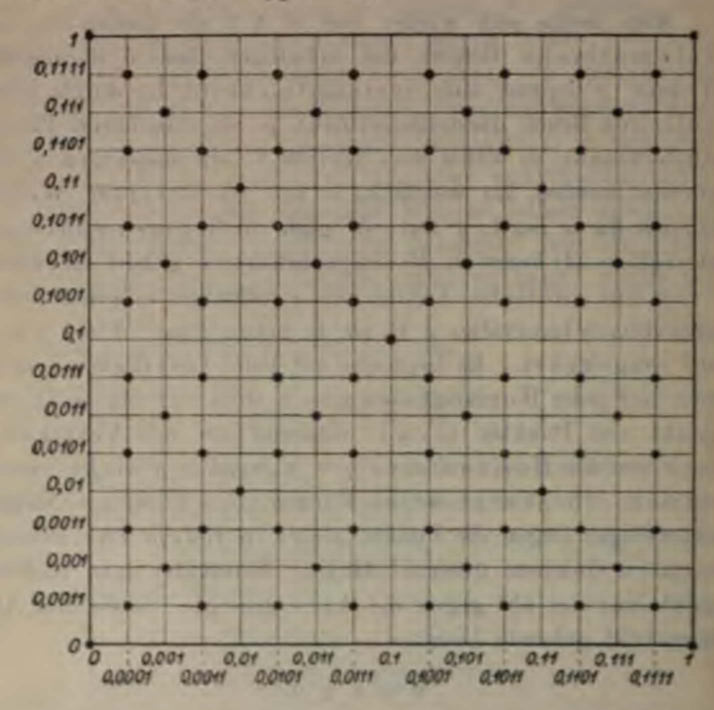
fragliche Eigenschaft gewissermaassen in höchster Vollkommenheit besitzen: dieselben liegen nämlich in jedem zweidimensionalen Gebiete überall dicht, während sie auf jeder Horizontalen oder Vertikalen nur in endlicher Anzahl vorkommen.

Man denke sich wieder wie in § 1 die Zahlen x, y als systematische Brüche mit beliebiger Basis b dargestellt. Ist dann x' irgend eine systematische (d. h. durch einen endlichen Bruch darstellbare) Zahl, $p_{x'}$ die zugehörige Bruchstellen-Anzahl, so sollen dem Werthe x' alle diejenigen y' zugeordnet werden, für welche $p_{y'} = p_{x'}$ — vice versa. Werden zugleich die x bezw. y auf ein ganz beliebiges endliches Intervall (a, A) bezw. (b, B) eingeschränkt, so gehört zu jedem x' nur eine endliche Anzahl von y' (nämlich innerhalb jedes ganzzahligen Intervalles z. B. $(0, 1)$ genau $b p_{x'} - 1 \, (b-1)$) — und umgekehrt. Es liegt also auf jeder Vertikalen $\xi = x'$, sowie auf jeder Horizontalen $\eta = y'$ stets nur eine endliche Anzahl von Punkten (x', y'), während auf den Vertikalen $\xi = x$ und den Horizontalen $\eta = y$, wenn x, y nicht-systematisch, überhaupt keine Punkte (x', y') liegen. Nichtsdestoweniger liegen die Punkte (x', y') in jedem zweidimensionalen Gebiete überall dicht. Betrachtet man nämlich irgend eine um 45° gegen die Axen geneigte, durch den Anfangspunkt gehende Linie:

$$\eta = \xi + \alpha,$$

wo α eine positive oder negative systematische Zahl bezw. 0 bedeutet, so wird $p_\eta = p_\xi$, sobald $p_\xi > p_\alpha$ (übrigens auch schon für $p_\xi = p_\alpha$, mit Ausschluss derjenigen ξ, deren letzte Bruchstelle diejenige von α zu 0 oder b ergänzt). Darnach gehören alle Punkte jener Geraden, deren Abscissen systematische Zahlen mit einem $p_\xi > p_\alpha$ sind, zur Menge der (x', y'), und die letzteren liegen also auf jeder solchen Geraden überall dicht. Da aber bei veränderlichem α auch diese Geraden überall dicht liegen, so folgt in der That, dass die Punkte (x', y') in jedem zweidimensionalen Gebiete überall dicht liegen.

Die beistehende Figur, welche sich auf den Fall $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ und $b = 2$ bezieht, mag die Anordnung der Punkte (x', y') bis zu $p_{x'} = p_{y'} = 4$ veranschaulichen. (NB. Die Mittelpunkte der kleinen Quadrate würden diejenigen (x', y') repräsentiren, für welche $p_{x'} = p_{y'} = 5$.)



Punktmengen von ähnlicher Art kann man wiederum auch erhalten, wenn man von der Eintheilung der Zahlen x, y in rationale und irrationale ausgeht. Man ordne jedem rationalen $x' = \frac{m_{x'}}{n_{x'}}$ alle diejenigen $y' = \frac{m_{y'}}{n_{y'}}$ zu, für welche $n_{y'} = n_{x'}$ — vice versa. Zu jedem x' gehört dann wiederum für jedes endliche y-Intervall nur eine endliche Anzahl von Werthen y' (nämlich im y-Intervalle $(0,1)$ die $\varphi(n_{x'})$ Werthe: $\frac{m}{n_{x'}}$, für welche $m < n_{x'}$ und relativ prim zu $n_{x'}$) — und umgekehrt.

Die Punkte (x', y') kommen also wiederum auf jeder begrenzten Vertikalen oder Horizontalen nur in endlicher Anzahl (bezw. gar nicht) vor, während sie in jedem zweidimensionalen Gebiete wieder überall dicht liegen: letzteres kann in analoger Weise erkannt werden, wie in dem zuvor betrachteten Falle und folgt übrigens auch unmittelbar daraus, dass die dort für $b = 2$ resultirende Punktmenge lediglich eine Theilmenge der hier definirten bildet. —

Bedeutet jetzt (x', y') irgend eine Punktmenge der eben charakterisirten Art und setzt man:

$$(21) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad f(x', y') = c', \\ \text{im übrigen: } f(x, y) = c, \end{cases}$$

wo c, c' zwei beliebige von einander verschiedene Constanten bedeuten, so erscheint offenbar die Existenz jedes Doppel-Integrals von der Form:

$$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

definitiv ausgeschlossen. Nichtsdestoweniger hat man:

$$(22) \quad \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = c \cdot (X - x_0), \qquad \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (Y - y_0),$$

gleichgültig, ob y bezw. x zu den Zahlen y' bezw. x' gehört oder nicht. Daraus folgt dann weiter:

$$(23) \quad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (X - x_0) \cdot (Y - y_0),$$

q. e. d.

Schliesslich bemerke ich noch folgendes. Ordnet man in dem zuerst betrachteten Falle jedem x' mit endlichem $p_{x'}$ alle diejenigen y' zu, welche durch die Bedingung bestimmt sind: $p_{y'} < p_{x'}$, so liegen auf jeder Vertikalen ebenfalls nur eine endliche Anzahl von Punkten (x', y') (bezw. gar keine). Da aber andererseits zu jedem y' alle diejenigen x' gehören, für welche $p_{x'} \geqq p_{y'}$, so liegen die Punkte (x', y') auf jeder zu

irgend einem y' gehörigen Horizontalen überall dicht. Definirt man nun bei dieser veränderten Bedeutung der Punkte (x', y') die Function $f(x, y)$ wiederum durch die Gleichungen (21), so wird auch hier:

$$(24)\quad \begin{cases} \int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (Y - y_0), \\ \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (X - x_0) \cdot (Y - y_0), \end{cases}$$

während das Integral:

$$(25)\qquad \int\limits_{x_0}^{X} f(x, y') \cdot dx$$

die Integral-Schwankung $|(c - c') \cdot (X - x_0)|$ besitzt, und somit:

$$\int\limits_{y_0}^{Y} dy \int\limits_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx$$

nicht existirt.[1])

---

§ 3.

Ich habe bei früherer Gelegenheit[2]) die Behauptung aufgestellt, dass für die Gültigkeit des Green'schen Satzes:

$$(26)\qquad \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \cdot dy = \int (P \cdot dx + Q \cdot dy)$$

die Existenz der Doppel-Integrale: $\iint \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \cdot dy$, $\iint \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx \cdot dy$ in Verbindung mit der Eindeutigkeit und Stetigkeit von $Q(x, y)$, $P(x, y)$ eine hinreichende Bedingung

---

1) Dieses Beispiel erscheint mir für die in Frage kommende Möglichkeit wesentlich prägnanter, als das auf p. 48 Fussn. 1 angeführte des Herrn Thomae, da hier die Existenz der Integrale (24) von der Wahl der Grenzen völlig unabhängig ist.

2) Sitz.-Ber. 25 (1895), p. 71, Fussnote.

bilde (ohne dass es also nothwendig wäre, über die Existenz von: $\int \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy$ irgendwelche Voraussetzungen zu machen). Die nämliche Behauptung ist vielleicht auch schon anderweitig ausgesprochen,[1]) aber, soviel ich weiss, niemals wirklich bewiesen worden. Und da andererseits ihre Richtigkeit keineswegs ohne weiteres einleuchtet und neuerdings auch wirklich angezweifelt worden ist,[2]) so dürfte ein solcher Nachweis vielleicht nicht überflüssig erscheinen. Dabei genügt es offenbar in der Hauptsache, den folgenden Satz zu beweisen:

Ist $Q(x, y)$ eindeutig, endlich und stetig für das Rechteck $[x_0 < x < X, \; y_0 < y \leq Y]$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ für jede einzelne Stelle im Innern eindeutig definirt und numerisch unter einer endlichen Grenze bleibend, so hat man:

$$(27) \qquad \int\!\!\int_{(x_0, y_0)}^{(X Y)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X, y) - Q(x_0, y)\} \cdot dy,$$

falls jenes Doppel-Integral *existirt.*

Beweis. Aus dem Satze des § 1 folgt, dass das Integral $\int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x, y')}{\partial x} \cdot dx$ für eine im Intervalle (y_0, Y) überall dichte Menge von Werthen y' existirt, so dass also:

---

[1]) So könnte z. B. eine Stelle in Herrn Thomae's „Abriss einer Theorie der complexen Functionen etc." (2. Aufl., Halle 1873), p. 31, Fussn. in diesem Sinne gedeutet werden. Da aber dort ausdrücklich verlangt wird, dass die betreffenden Functionen „die doppelte Integration in eindeutigem Sinne zulassen sollen", so kann hierunter möglicher Weise auch die Existenz der betreffenden iterirten Integrale mit einbegriffen sein.

[2]) Herr Osgood (New-York M. S. Bullet. (2), V (1898), p. 86) setzt ausdrücklich noch die Existenz von $\int \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy$ voraus, da er (wie ich einer brieflichen Mittheilung entnehme) diejenige des Doppel-Integrals allein nicht für ausreichend hält.

$$(28)\quad \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x, y')}{\partial x} \cdot dx = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x, y')}{\partial x} \cdot dx = Q(X, y') - Q(x_0, y').$$

Da nun vermöge der Beziehung (§ 1, Gl. (1)):

$$(29)\qquad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \cdot dx = \iint_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \cdot dx \cdot dy$$

$\int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \cdot dx$ eine im Intervalle (y_0, Y) nach y integrirbare Function vorstellt, welche nach Gl. (28) mit der ebenfalls integrirbaren (weil stetigen) Function $\{Q(X, y) - Q(x_0, y)\}$ daselbst für eine überall dichte Werthmenge y' übereinstimmt, so hat man nach einem bekannten Satze:[1])

$$(30)\quad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \cdot dx = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X, y) - Q(x_0, y)\} \cdot dy,$$

und daher schliesslich:

$$(27)\quad \iint_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X, y) - Q(x_0, y)\} \cdot dy,$$

q. e. d.

Das analoge gilt sodann für: $\iint_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx \cdot dy$. Und da sich die vorstehenden Ergebnisse ohne Schwierigkeit auf den Fall übertragen lassen,[2]) dass an die Stelle des Rechtecks irgend ein zusammenhängender, von einer oder mehreren gegen die Coordinaten-Richtungen abtheilungsweise monotonen (stetigen)[3]) Rand-Curven begrenzter Bereich tritt, so er-

[1]) Dini-Lüroth, p. 356, Nr. 10.

[2]) Vgl. Sitz.-Ber. 25 (1895), p. 56; 28 (1898), p. 73.

[3]) Die Stetigkeit ist eigentlich implicite schon in der Angabe enthalten, dass die betreffenden Curven die vollständige Begrenzung eines Bereiches bilden sollen.

giebt sich die Gültigkeit des Green'schen Satzes in dem folgenden Umfange:

Sind $Q(x, y)$, $P(x, y)$ eindeutig definirt und stetig im Innern und auf der Grenze C eines zusammenhängenden, von einer oder mehreren gegen die Coordinaten-Richtungen abtheilungsweise monotonen[1]) Curven begrenzten Bereiches T, ausserdem $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ eindeutig definirt und numerisch unter einer endlichen Grenze bleibend im Innern von T, so hat man:

$$(31)\qquad \iint\limits_{(T)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot dT = \int\limits_{(+C)} (P \cdot dx + Q \cdot dy),$$

wenn die Doppel-Integrale $\iint\limits_{(T)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dT$, $\iint\limits_{(T)} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dT$ *existiren*, d. h. wenn die Stellen, an welchen $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ Sprünge $> \varepsilon$ erleiden, eine *zweidimensional unausgedehnte* Menge bilden.

---

§ 4.

Der im vorigen Paragraphen gelieferte Nachweis, dass für die Gültigkeit des Green'schen Satzes eine besondere Voraussetzung bezüglich der Existenz der einfachen Integrale $\int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy$ nicht erforderlich ist, gewinnt durch den Umstand erhöhte Bedeutung, dass der hiernach als möglich zugelassene

---

[1]) Dabei ist also keineswegs ausgeschlossen, dass die Curven gegen irgendwelche anderen Richtungen unendlich viele Maxima und Minima (sogar überall dicht) besitzen.

Fall der Nicht-Existenz jener Integrale auch wirklich eintreten kann: es giebt nämlich thatsächlich solche in einem Intervalle $x_0 \leq x \leq X$ stetige Functionen $f(x)$, welche durchweg ein eindeutiges und numerisch unter einer endlichen Schranke bleibendes, jedoch nicht integrables $f'(x)$ besitzen, d. h. für welche das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{X_0} f'(x) \cdot dx \; (X_0 \leq X)$ nicht existirt. Die Möglichkeit derartiger Functionen ist wohl zuerst von Dini nachdrücklich hervorgehoben und durch den Nachweis des Satzes gestützt worden, dass eine Function mit überall dichten Oscillationen wohl eine eindeutige und endlich bleibende, aber niemals eine integrable Derivirte besitzen könne.[1] Die wirkliche Existenz ist sodann von Volterra[2] durch Aufstellung eines Beispiels direkt dargethan und späterhin auch speciell in der Richtung des angeführten Dini'schen Satzes durch Koepcke's differenzirbare Function mit überall dichten Oscillationen[3] bestätigt worden.

Ist nun aber einmal die Existenz solcher $f(x)$ definitiv festgestellt, so liegt die Frage nahe: Was tritt in diesem Falle an die Stelle der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f'(x) \cdot dx = f(X) - f(x_0), \tag{32}$$

welche ja nur für integrable $f'(x)$ einen Sinn hat? Auf diese Frage lässt sich mit Benützung des allemal existirenden oberen und unteren Integrals eine ganz präcise Antwort geben.

Schaltet man zwischen x_0 und X die Zwischenwerthe x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$ ein, so hat man identisch:

$$f(X) - f(x_0) = \sum_1^n {}_\nu \frac{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})}{x_\nu - x_{\nu-1}} \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \quad (x_n = X). \tag{33}$$

[1]) Dini, Fondamenti § 200 (Dini-Lüroth, p. 383).

[2]) Giorn. di Mat. T. 19 (1881), p. 335.

[3]) Math. Ann. Bd. 29 (1887), p. 123; 34 (1889), p. 161; 35 (1890), p. 104. — Hamb. Mitth. Bd. II (1890), p. 128.

Ist jetzt $f(x)$ im Intervalle $x_0 \leq x \leq X$ stetig und zum mindesten für $x_0 < x < X$ mit einer eindeutigen Derivirten begabt, so gestatten die betreffenden Differenzen-Quotienten die Anwendung des (Rolle'schen) Mittelwerthsatzes, d. h. es ergiebt sich:

$$(34)\quad f(X) - f(x_0) = \sum_1^n {}_\nu f'_\nu(\xi_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}), \quad \text{wo: } x_{\nu-1} < \xi_\nu < x_\nu.$$

Unter der weiteren Annahme, dass $f'(x)$ im Intervalle (x_0, X) numerisch unter einer endlichen Grenze bleibt, besitzt $f'(x)$ in jedem Theil-Intervalle $x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu$ eine bestimmte obere und untere Grenze G'_ν bezw. g'_ν. Alsdann folgt aber aus Gl. (34):

$$(35)\quad \sum_1^n {}_\nu g'_\nu \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \leq f(X) - f(x_0) \leq \sum_1^n {}_\nu G'_\nu \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

und somit ergiebt sich für $\lim (x_\nu - x_{\nu-1}) = 0$, $\lim n = \infty$ die Ungleichung:

$$(36)\quad \underline{\int_{x_0}^X} f'(x) \cdot dx \leq f(X) - f(x_0) \leq \overline{\int_{x_0}^X} f'(x) \cdot dx,$$

welche in der That die Gleichung (32) als speciellen Fall enthält und ohne weiteres in dieselbe übergeht, wenn $f'(x)$ integrabel ist.

Mit Hülfe dieser Relation lässt sich der am Anfange des vorigen Paragraphen bewiesene Hauptheil des Green'schen Satzes unter den dort geltenden Voraussetzungen ableiten, ohne dass man nöthig hätte, auf den an jener Stelle benützten allgemeinen Integralsatz (p. 54 Fussn. 1) zu recurriren. Man hat nämlich nach (36):

$$(37)\quad \underline{\int_{x_0}^X} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \leq Q(X, y) - Q(x_0, y) \leq \overline{\int_{x_0}^X} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$$

und daher auch:

$$(38)\quad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \leq \int_{y_0}^{Y} \{Q(X, y) - Q(x_0, y)\} \leq \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx.$$

Da aber nach Gl. (1) die beiden äusseren Glieder dieser Ungleichung mit dem entsprechenden, als existirend vorausgesetzten Doppel-Integral zusammenfallen, so erhält man unmittelbar:

$$(27)\quad \int\!\!\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X, y) - Q(x_0, y)\} \cdot dy.$$

q. e. d.

---

§ 5.

Aus dem Green'schen Satze (Gl. (31)) ergiebt sich der Cauchy'sche, wenn die Functionen $Q(x, y)$, $P(x, y)$ so beschaffen sind, dass:

$$(39)\quad \int\!\!\int_{(T)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot dT = 0$$

wird. Die hierzu nothwendige und hinreichende Bedingung besteht aber darin, dass die Stellen (x, y), für welche:

$$(40)\quad \left|\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| > \varepsilon,$$

bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine zweidimensional unausgedehnte Menge bilden.[1]) Mithin ergiebt sich, wenn T wiederum einen Bereich von der am Schlusse von § 3 definirten

[1]) Dabei können also die Stellen, für welche:

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| > 0,$$

immerhin auch eine zweidimensional-ausgedehnte Menge bilden, z. B. überall dicht liegen. (Vgl. die Beispiele in § 1).

Art. C seine vollständige Begrenzung bedeutet, der Cauchy'sche Integralsatz in dem folgenden Umfange:

Sind $Q(x, y)$, $P(x, y)$ eindeutig definirt und stetig im Innern und auf der Begrenzung von T, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ und $\frac{\partial P}{\partial y}$ eindeutig definirt und numerisch unter einer endlichen Grenze bleibend im Innern von T, so hat man:

$$\int_{(C)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0,$$

wenn die Stellen (x, y), für welche $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ Sprünge $> \varepsilon$ erleiden[1]) oder Ungl. (40) besteht, bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine *zweidimensional unausgedehnte* Menge bilden.[2])

Hierzu ist nun aber noch folgendes zu bemerken. Die Existenz der Beziehung (39) hängt ausschliesslich davon ab, dass Ungl. (40) höchstens für eine zweidimensional unausgedehnte Menge besteht, keineswegs aber davon, dass $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ irgendwelchen Stetigkeits-Bedingungen unterworfen werden. Diese sind lediglich erforderlich, um die getrennte Existenz der beiden Doppel-Integrale $\iint_{(T)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dT$,

[1]) Es würde auch genügen, diese Stetigkeits-Bedingung für eine der beiden Functionen $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ zu statuiren, da sie dann für die andere vermöge der zweiten Bedingung (nämlich:

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right| \leq \varepsilon,$$

mit Zulassung der näher bezeichneten Ausnahmen) von selbst erfüllt ist.

[2]) Man kann sogar noch die Bedingung der Stetigkeit von P, Q, sowie der Endlichkeit von $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ mit Hülfe bekannter Ausschliessungs-Methoden in gewissem Umfange fallen lassen.

$\iint\limits_{(T)} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dT$ zu gewährleisten, auf welcher der Beweis des Green'schen Satzes wesentlich beruhte. Im Grunde genommen basirt aber Gl. (41) gar nicht nothwendig auf der Existenz jener beiden Doppel-Integrale, sondern lediglich auf derjenigen der beiden iterirten Integrale $\int dy \int \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int dy \int \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx$, und auf der Vertauschbarkeit der Integrationsfolge bei dem zweiten dieser Integrale. Nachdem nun aber die Betrachtungen des § 2 deutlich gezeigt haben, dass diese letzteren Bedingungen sehr wohl erfüllt sein können, auch wenn jene Doppel-Integrale nicht existiren, so erkennt man, dass für die Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes (Gl. (41)) die den Functionen $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ auferlegten Stetigkeits-Bedingungen keineswegs nothwendige sind und sich durch andere, umfassendere ersetzen lassen müssen. Da man indessen für das Zustandekommen der Beziehung:

$$\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy \tag{42}$$

lediglich hinreichende Bedingungen kennt, von denen die Existenz des betreffenden Doppel-Integrals zur Zeit als die weitaus allgemeinste gelten darf, so gelangt man auf diesem Wege schliesslich doch zu keiner befriedigenden Fassung des fraglichen Satzes, die allgemeiner wäre, als die oben gegebene.

Immerhin geht aus dieser Betrachtung mit Evidenz hervor, dass der Green'sche Satz keineswegs als allgemeinste Grundlage des Cauchy'schen Satzes (41) angesehen werden kann. Dies gilt nun aber in erhöhtem Maasse für des letzteren Anwendung auf Functionen einer complexen Veränderlichen. Hier gelangt man zunächst auf Grund der oben gegebenen Fassung zu dem folgenden Resultate:

Ist $f(z) = f(x + yi) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y)$ eindeutig definirt und stetig[1]) im Innern und auf der Begrenzung von T; sind ausserdem $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$ eindeutig definirt und absolut genommen unter einer endlichen Grenze[1]) bleibend, so hat man:

$$(43) \qquad \int_{(C)} f(z) \cdot dz = 0,$$

wenn die Stellen z, für welche $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ (oder auch:[1]) $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$) Sprünge $> \varepsilon$ erleiden oder eine der Ungleichungen besteht:

$$(44) \qquad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| > \varepsilon, \qquad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| > \varepsilon,$$

bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine *zweidimensional unausgedehnte* Menge bilden. Daraus folgt dann nach bekannten Methoden, dass $f(z)$ im Innern von T eine *analytische* Function vorstellt.

Insbesondere ergiebt sich also, dass unter den gemachten Voraussetzungen $f(z)$ im Innern von T einen „vollständigen", d. h. von der Art des Grenzüberganges (nicht nur von der Differentiations-Richtung) unabhängigen Differential-Quotienten besitzt. Wird nun, wie gewöhnlich geschieht, diese letztere Forderung schon in der Voraussetzung aufgenommen, so verlangt man damit von vornherein merklich mehr, als die Existenz jener partiellen Ableitungen und sogar die ausnahmslose Existenz der Beziehungen:

$$(45) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

---

[1]) Vergl. die beiden vorigen Fussnoten.

besagen würde.[1]) Hiernach erscheint es aber keineswegs ausgeschlossen, dass die Existenz eines solchen $f'(z)$ schon allein die Integral-Beziehung (43) und somit den analytischen Charakter von $f(z)$ nach sich zieht, ohne dass es nöthig wäre, $f'(z)$ irgend welchen Stetigkeits-Bedingungen zu unterwerfen. Und so lange es nicht etwa gelingt, durch Aufstellung von Beispielen das Gegentheil festzustellen, wird diese Frage als eine offene gelten müssen.

---

[1]) Vergl. Thomae, Abriss etc., p. 17, 119. — Stolz, Grundlagen der Diff.- und Integr.-Rechnung, I, p. 134; II, p. 82. — Osgood, a. a. O. p. 87.

Sitzung vom 4. März 1899.

1. Herr K. Linde hält einen Vortrag über: „Vorgänge und Wirkungen bei der Verbrennung in flüssigem Sauerstoff“.

2. Herr Johannes Ranke macht Mittheilungen „Ueber die überzähligen Knochen der menschlichen Schädeldecke“. Die Abhandlung wird in den Denkschriften veröffentlicht werden.

3. Herr E. v. Lommel giebt einen Nachtrag zu seiner früheren Abhandlung: „Theorie der Dämmerungsfarben“. Derselbe ist für die Denkschriften bestimmt.

4. Herr Ferd. Lindemann macht eine erste Mittheilung über die Ergebnisse seiner italienischen Reise: „Ueber einige prähistorische Gewichte aus deutschen und italienischen Museen“.

5. Herr P. Groth legt eine von dem correspondirenden Mitgliede Herrn v. Fedorow in Moskau eingesandte Arbeit: „Ueber reguläre Plan- und Raum-Theilung“ vor. Die Arbeit wird in den Denkschriften erscheinen.



Ueber Vorgänge bei Verbrennung in flüssiger Luft.

Von **Carl Linde.**

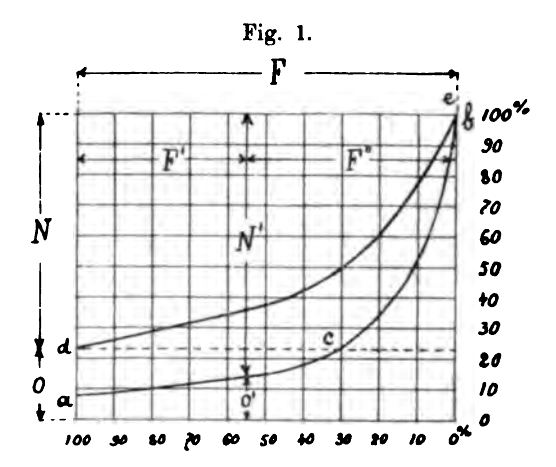
(*Eingelaufen 30. März.*)

Es ist schon durch die Forscher, welche zuerst die Vorgänge bei der Verflüssigung atmosphärischer Luft und die Eigenschaften der verflüssigten Luft untersucht haben, die Thatsache festgestellt worden, dass der Stickstoff und der Sauerstoff der Atmosphäre sich gleichzeitig condensiren, dass also eine Flüssigkeit, welche durch Berührung atmosphärischer Luft mit Gefässwandungen von genügend tiefer Temperatur gewonnen wird, dieselbe Zusammensetzung zeigt, wie die Atmosphäre, dass aber in dieser Zusammensetzung eine Aenderung eintritt, sobald die Verdampfung beginnt, und zwar in dem Sinne, dass der Stickstoff in relativ grösserer Menge verdampft, als der Sauerstoff, so dass die Flüssigkeit um so sauerstoffreicher wird, je weiter die Verdampfung fortgeschritten ist.

Messende Versuche ergaben, dass diese Aenderung unter atmosphärischem Drucke ungefähr in der aus Fig. 1 ersichtlichen Weise erfolgt. Zeigen die Grössen O und N das anfängliche Gewichtsverhältniss von Sauerstoff und Stickstoff in der Flüssigkeitsmenge F an, so stellen O' und N' das jeweilige Verhältniss in dem entweichenden Gasgemische dar, nachdem die Flüssigkeitsmenge F' verdampft ist. Die Curve $a\,b$ lässt also erkennen, wie die (anfänglich etwa 92°/₀ Stickstoff und 8°/₀ Sauerstoff enthaltenden) Verdampfungsproducte bei c die Zusammensetzung der Atmosphäre erreichen und von da an sauer-

stoffreicher werden. Die Grössen der Flächen über der Curve *a b* von der Länge *F'* und *F''* stellen die jeweilen verdampften bezw. noch in der Flüssigkeit enthaltenen Stickstoffmengen dar, ebenso die unter der Curve *a b* liegenden Flächen die Sauerstoffmengen. Das jeweilige Verhältniss der letzteren zu den ersteren ist in der Curve *d e* veranschaulicht. Im Punkte *c*, wo die Verdampfungsproducte gerade die Zusammensetzung der Atmosphäre zeigen, sind die Flächen über und unter der Curve einander nahezu gleich, die Flüssigkeit enthält also ungefähr gleiche Mengen von Sauerstoff und Stickstoff. Es sind bis dahin nahezu 81 °/₀ des ursprünglich vorhandenen Stickstoffes,

Fig. 1.



35 °/₀ des Sauerstoffes und 70 °/₀ der ganzen Flüssigkeitsmenge verdampft.

Bei geringerem Drucke (Verdampfung in vacuo) findet die Trennung der Gase in schnellerem Tempo statt, d. h. die entweichenden Verdampfungsproducte enthalten mehr Stickstoff, als die Fig. 1 zeigt. Unter höherem Drucke ist das umgekehrte der Fall, obwohl die Sättigungstemperaturen der beiden Gase bei höherem Drucke auseinanderrücken.

Im Zusammenhange mit dieser fractionirten Verdampfung fanden die oben erwähnten Forscher, dass ein glimmender

Spahn bei Annäherung an die Oberfläche einer solchen Flüssigkeit in einem Gefässe erlischt, so lange die Verdampfungsproducte vorwiegend Stickstoff enthalten, dass aber bei entsprechend vorgeschrittener Verdampfung der Spahn aufflammt und nach Eintauchen in die nunmehr sauerstoffreiche Flüssigkeit lebhaft verbrennt.

Mischt man brennbare Substanzen (z. B. pulverisirte Kohle) so mit einer derartigen Flüssigkeit, dass eine sehr grosse Berührungsoberfläche hergestellt ist, so findet nach einer Entzündung die Verbrennung ungefähr mit derselben Lebhaftigkeit und Schnelligkeit statt, wie bei gewöhnlichem Schwarzpulver und es erfolgt, wie bei solchem Pulver, eine Explosion, wenn die Zündung mit einem Initialstosse (durch eine Kapsel) verbunden ist.

War schon diese Erscheinung mit Rücksicht auf die tiefen Temperaturen eines solchen Gemisches merkwürdig (bei welchen jede chemische Reaction aufhört), so ist dies in weit höherem Maasse der Fall bezüglich der neuerdings gefundenen weitergehenden Wirkung, von welcher ich hier berichten will.

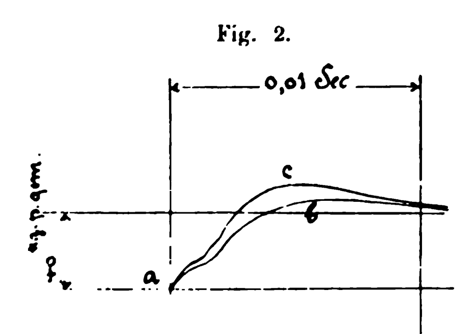
Die ausserordentliche Geschwindigkeit, mit welcher sich bei den modernen Sprengmitteln die gesammte Wärmezustandsänderung vollzieht und welche in Gemeinschaft mit sehr grosser volumetrischer Differenz im Anfang- und End-Zustande einem Sprengmittel die Eigenschaft der Brisanz verleiht, wird vielfach angesehen als die Wirkung des Zerfalles chemischer Verbindungen, bei welchem Gase (insbesondere Sauerstoff) in statu nascendi in Action treten. Mit dieser Auffassung steht die Thatsache nicht in Uebereinstimmung, dass gewisse Mischungen fester und flüssiger oxydirbarer Substanzen in sauerstoffreicher Flüssigkeit mit solcher Geschwindigkeit vollkommen verbrennen, dass sie sich als Sprengstoffe von allerhöchster Brisanz darstellen.

Lässt man z. B. Petroleum durch einen Körper von grosser Aufsaugefähigkeit (wie Kieselguhr oder Korkkohlepulver) so weit aufsaugen, dass derselbe weiterhin ein ausreichendes Quantum von flüssigem Sauerstoffe aufnehmen kann, so detonirt

ein solches Gemisch freiliegend bei jeder Zündung. Patronen, welche damit gefüllt waren, übertrugen die Detonation auf andere 25 cm entfernt liegende, während Sprenggelatine (das brisanteste unter den in der Sprengtechnik verwendeten Sprengmitteln) nur auf 15 cm übertrug.

Ueber die Schnelligkeit der Verbrennung und über die volumetrische Wirkung derselben geben Versuche einen theilweise ziffermässigen Aufschluss, welche in einem sogenannten Brisanzmesser (in der Sprengstoff-Versuchstation zu Schlebusch) gemacht worden sind. In einem Hohlkörper aus Stahl (bei 20 Liter Rauminhalt) werden Sprengstoffpatronen verschiedener Art durch Knallquecksilberkapseln zur Detonation gebracht. Die hiebei entstehende Druckerhöhung wird durch einen „Indicator" (vermittels eines federbelasteten und seine Bewegung auf einen Schreibstift übertragenden Kölbchens) auf einer mit Papier bespannten Trommel aufgezeichnet, welche mit einer Umfangs-Geschwindigkeit von ungefähr 330 cm per Secunde rotirt, so dass einem Centimeter ungefähr 0,003 Secunde entspricht. Der Weg vom Beginn der Drucksteigerung bis zu ihrem Ende (bis zum Gipfel der aufgezeichneten Druckcurve) würde die Dauer der entsprechenden Wärmezustandsänderung ohne weiters darstellen, wenn nicht die Trägheit von Kolben und Feder eine Verzögerung bewirkten. Absolute Zeitmessungen werden also für die Verbrennungs-Dauer nicht erzielt, wohl aber relative in Bezug auf die

Fig. 2.



verschiedenen Sprengstoffe. Unter den bis dahin untersuchten nahm die Sprenggelatine die erste Stelle ein. Bei Anwendung von Gemischen aus Petroleum (und Kieselguhr) mit sauerstoffreicher Flüssigkeit wurden nun aber Druckcurven erzielt, welche

nsichtlich der Verbrennungsdauer und der volumetrischen Virkung die Sprenggelatine noch übertrafen. In Fig. 2 zeigt *b* eine Druckcurve, welche mit 85 g Sprenggelatine, *a c* eine lche, welche mit einem Gemische von 17 g Petroleum und 2 g Flüssigkeit (schätzungsweise 80°/₀ Sauerstoff und 20°/₀ ickstoff) mit 17 g Kieselguhr in 9 g Papier erzielt wurde.

Es scheint hiernach, dass die Verbrennung eines solchen emisches trotz seiner Temperatur von weniger als — 180° C. hneller erfolgt, als irgend eine bisher bekannte Verbrennung n festen oder flüssigen Substanzen.

Ueber einige prähistorische Gewichte aus deutschen und italienischen Museen. I.

Von **F. Lindemann.**

(Eingelaufen 6. April.)

Mit Taf. I.

In einer früheren Arbeit[1]) über die Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen habe ich mich eingehend mit einem am Monte Loffa in den euganeischen Bergen gefundenen, aus Speckstein geschnittenen Dodekaëder, mit den auf den Flächen dieses Körpers eingegrabenen Zeichen und mit gewissen an derselben Fundstelle ausgegrabenen steinernen Gewichten beschäftigt. Auf diesen Gewichten finden sich teilweise dieselben Zeichen, wie auf jenem Dodekaëder, und durch Vergleichung beider Zeichensysteme gelang es, dieselben zu interpretiren. Es ergab sich das überraschende Resultat, dass diese Zeichen teils direkt, teils wenigstens durch das Princip ihrer Bildung mit den altägyptischen, hieratischen Zahlzeichen übereinstimmen. In diesen Ziffern vom Monte Loffa wurden gleichzeitig die Urtypen der etruskischen und damit der späteren römischen Zahlzeichen erkannt. Dieser Umstand wies darauf hin, dass jene Funde vom Monte Loffa, wenn meine Interpretation der Zeichen richtig ist, aus einer Zeit stammen müssen, wo die spätere etruskische Schrift noch nicht gebräuchlich war, und wo noch Beziehungen Oberitaliens zu Aegypten und überhaupt zum Oriente bestanden,

---

[1]) Sitzungsberichte der math.-physik. Classe der k. bayer. Akademie d. Wiss. Band XXVI, 1896.

von denen die historische Zeit keine Erinnerung bewahrt hat. Bestätigt wurde dieser Schluss durch die Gewichtseinheit, nach welcher die steinernen Gewichte vom Monte Loffa normirt sind; dieselbe beträgt nämlich circa 100 gr. d. h. $^1/_5 = ^{12}/_{60}$ einer leichten königlichen babylonischen Mine.

Die Umstände, unter welchen 1885 die Ausgrabungen am Monte Loffa von Stephano de' Stephani gemacht wurden, liessen diesen Gelehrten ebenfalls auf ein sehr hohes Alter der fraglichen Funde schliessen (vgl. a. a. O. p. 637 ff.). Da indessen diese Gegenstände in den Resten uralter Wohnstätten gefunden wurden, und da bei Ausgrabungen in solchen Wohnstätten immer der Zweifel besteht, ob nicht beim Graben die verschiedenen horizontalen Schichten durch einander gemischt sind, so konnte der Verdacht bestehen bleiben, dass die steinernen Gewichte und das Dodekaëder vom Monte Loffa doch aus einer wesentlich jüngeren Epoche stammen, denn aus anderen dort gemachten Funden ging hervor, dass die betreffenden Wohnplätze bis in die letzte Zeit der römischen Republik hinein benutzt wurden. Diesen Bedenken gab insbesondere Pigorini in einem a. a. O. (p. 653 f.) abgedruckten Briefe Ausdruck.

Inzwischen habe ich im Herbste 1897 auf einer Reise durch Ober- und Mittelitalien, bei der ich mich einer Beihilfe aus den Mitteln der bei der hiesigen Akademie errichteten Münchener Bürger-Stiftung zu erfreuen hatte, in verschiedenen Museen Stücke gefunden, welche nach den von mir vorgenommenen Wägungen, teilweise auch nach den auf ihnen befindlichen Zeichen als Gewichte angesehen werden müssen. Dieselben reichen unzweifelhaft bis in die Zeit der Terramaren, d. h. bis in die Anfänge der Broncezeit, vielleicht bis in die Steinzeit zurück. In ihnen glaube ich neue Beweisstücke dafür sehen zu dürfen, dass schon in jenen ältesten prähistorischen Zeiten Beziehungen Oberitaliens zum Oriente, insbesondere zu Aegypten bestanden haben, und dass somit die von mir in meiner früheren Arbeit ausgesprochenen Vermutungen fast zur Gewissheit werden.

Einen vollständigen Bericht über die Ergebnisse meiner in Italien angestellten Untersuchungen kann ich leider noch nicht veröffentlichen:[1]) denn die Bearbeitung derselben erfordert zunächst eine neue Darstellung der in Vorderasien und Aegypten gebräuchlich gewesenen Gewichtssysteme und ihrer historischen Entwicklung. Hierfür ist aber durch die neueren Ausgrabungen von Flinders Petrie in Aegypten ein so überreiches Material geliefert, dass die Sichtung nicht ohne grossen Zeitaufwand geschehen kann. Allerdings ist dieses Material neuerdings von Hultsch[2]) bearbeitet worden; derselbe geht dabei von Gesichtspunkten aus, die so wesentlich von den meinigen verschieden sind, dass ich eine Veröffentlichung der letzteren noch verschieben muss.

Die Ergebnisse der erwähnten Reise veranlassten mich, auch hier in München, so wie im September vorigen Jahres in Königsberg in Preussen und in Schwerin in Mecklenburg Nachforschungen nach prähistorischen Gewichtsstücken anzustellen. Nachdem ich in den italienischen Museen gelernt hatte, auf welche Merkmale besonders zu achten ist, gelang es mir in der That, auch in den genannten deutschen Orten eine ganze Reihe von Stücken mit ziemlicher Sicherheit als Gewichte festzustellen. Auch hier weisen die vorgenommenen Wägungen, sowie teilweise die auf den Stücken befindlichen Zeichen auf uralte Beziehungen zum Oriente, besonders zu Aegypten. Hervorragendes Interesse scheinen zwei Gewichtsstücke der hiesigen prähistorischen Sammlung des Staates beanspruchen zu dürfen, welche mit ägyptischen Zeichen markiert sind, und welche unter solchen Umständen gefunden wurden, dass man sie mit Sicherheit aus der Steinzeit, spätestens aus dem Anfange der Broncezeit datiren kann; dieselben werden deshalb in den ersten beiden Paragraphen ausführlich besprochen.

---

[1]) Einen kurzen vorläufigen Bericht findet man in den Sitzungsberichten der math.-physik. Classe der k. bayer. Akademie der Wissenschaften 1897. Band XXVII, p. 479 ff.

[2]) Vergl. Friedrich Hultsch, die Gewichte des Altertums nach ihrem Zusammenhange dargestellt; Bd. XVIII der Abhandlungen der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1898.

Auf diese Stücke hat Herr College Furtwängler, dem ich dieselben zeigte, neuerdings[1]) hingewiesen, und aus ihrer Existenz ebenfalls Schlüsse auf uralte Beziehungen zum Oriente gemacht, indem er die damalige Bevölkerung Bayerns mit den Kämpfen im mittländischen Meere zur Zeit der mykenischen Epoche in Verbindung bringt, ähnlich wie ich es a. a. O. für die Etrusker gethan hatte.

Für die Geschichte der Zahlzeichen ist die Untersuchung alter Gewichte von besonderem Interesse, da wir in ihnen jedenfalls die ältesten Documente für den Gebrauch der Ziffern bei den europäischen Völkern vor uns haben.

§ I. Ein Gewicht mit ägyptischer Aufschrift aus dem fränkischen Jura.

In der hiesigen prähistorischen Sammlung des Staates (altes Akademiegebäude an der Neuhauserstrasse) befinden sich eine grosse Menge von Funden aus den Höhlen des fränkischen Jura. Die betreffenden Ausgrabungen sind von Herrn Limmer gemacht. Mit Ausnahme von zwei oder drei kleinen Bronceringen sind sämmtliche Stücke aus Stein, Knochen oder Thon gefertigt. Es scheint kein Zweifel darüber zu bestehen, dass dieselben der jüngeren Steinzeit angehören.[2]) Zu diesen Fundstücken gehört das im Folgenden zu beschreibende Gewicht.

Nr. 1. Inventar-Nr. 2006ª. Fundort in einer Höhle des Püttlachthales. Material sehr feinkörniger Sandstein von äusserlich braungrauer Farbe, wie er in jenen Gegenden vorkommen soll. Die Gestalt ist aus der auf beiliegender Tafel gegebenen

---

[1]) Das betr. Werk über die Geschichte der Gemmen wird demnächst erscheinen.

[2]) Vergl. J. Ranke: Die Felsenwohnungen aus der jüngeren Steinzeit in der fränkischen Schweiz, Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns, Bd. III, 1880, p. 205 ff. Einzelne Reste von Bronce-Stücken, auch vereinzelte Eisen-Reste wurden in analogen benachbarten Höhlen gefunden. Die grosse Mehrzahl der Höhlen lieferte aber nur Geräthe aus Stein und Knochen.

Figur 1 u. 2 ersichtlich. Das Stück scheint vollkommen unverletzt zu sein. Das Gewicht beträgt ungefähr 100 gr. Da dasselbe mit zwei Inventar-Nummern beklebt ist und in den Vertiefungen noch erdiger Staub haftet, so mag das ursprüngliche Gewicht etwa 98,2 bis 98,5 gr betragen haben; das ist aber genau $^1/_{10}$ der von Lehmann[1]) festgestellten babylonischen Gewichtsmine gemeiner Norm, welche schon in der altbabylonischen Epoche (also rückwärts bis über 3000 v. Chr.) in Gebrauch war.

Die geometrische Gestalt des Gewichtes lässt sich etwa in folgender Weise beschreiben. Es handelt sich um einen geraden Cylinder von verhältnissmässig geringer Höhe (1—2,5 cm) mit dreieckiger Basis. Die Grundlinie der Basis ist circa 5 cm lang, die Höhe der Basis beträgt circa 6,4 cm. Die beiden andern Seiten des Dreiecks sind etwas nach aussen gebogen und haben eine Länge von 6,4 beziehungsweise 7 cm. Die der Basis gegenüber liegende Fläche ist zu ihr nicht vollkommen parallel, der Abstand beider Dreiecksflächen von einander beträgt an der Spitze des nahezu gleichschenkligen Dreiecks ca. 2,5 cm, an der einen Ecke der Grundlinie ca. 0,8, an der anderen Ecke ca. 2 cm. In der Mitte der nach aussen etwas gewölbten Seitenfläche des Cylinders, welche die zuletzt erwähnte Ecke des Basisdreiecks mit der Spitze verbindet, verläuft parallel der Basisfläche eine etwa 2 mm tiefe Rille.

Auf den beiden Dreiecksflächen sind die Zeichen angebracht, welche die Wichtigkeit des Stückes bedingen. Auf der Basisfläche ist nahe der Grundlinie ein Kreis von ca. 2,4 cm Durchmesser eingegraben; darüber befinden sich zwei zu einander rechtwinklige vertiefte Striche, von denen der eine die Mitte des andern trifft. Auf der gegenüber liegenden Fläche befindet sich in der Mitte parallel der Grundlinie das Zeichen

---

[2]) Das altbabylonische Maass- und Gewichtssystem als Grundlage der antiken Gewichts-, Münz- und Maasssysteme, Actes du huitième congrès international des orientalistes, tenu en 1889 à Stockholm, Leyden 1892.

und darüber ein Punkt: vergl. übrigens Fig. 1 u. 2 auf beigefügter Tafel.

Die beiden zu einander rechtwinkligen, eingegrabenen Striche auf der Basisfläche stellen das ägyptische Zeichen für 10 in hieratischer Schrift dar. Allerdings sollte das Zeichen einer umgekehrten römischen Fünf (Λ) gleichen; in der jüngeren Zeit und vollends in der demotischen Schrift wird es indessen in der Form geschrieben[1], welche auf unserm Gewicht erscheint; es ist daher nicht wunderbar, wenn das Zeichen schon früher von Nicht-Aegyptern in dieser flüchtigen Form ausgeführt wurde. Georg Ebers, dem ich das vorliegende Gewicht zeigte, und der meiner Interpretation desselben vollkommen zustimmte, sagte mir, dass er gewohnt sei, die Ziffer 10 ägyptisch genau so zu schreiben, wie sie auf dem Gewichte steht.

Der Ring auf der Basisfläche ist das im alten Aegypten übliche Zeichen für ein Gewicht. Derselbe findet sich bereits auf einem Gewichte des Königs Chufu (Cheops) aus der IV. Dynastie[2], ferner auf einem solchen des Königs Thuthmes aus der VIII. Dynastie (Nr. 4 bei Griffith), auf einem Gewichte der X. Dynastie, dessen Aufschrift im übrigen zweifelhaft ist (a. a. O. Nr. 13), auf einem Gewichte aus Gurob, das der XVIII. oder XIX. Dynastie zugeschrieben wird (a. a. O. Nr. 14), auf einem Gewichte aus Memphis, dessen Aufschrift verschieden interpretirt werden kann (a. a. O. Nr. 22), auf einem anderen ebenfalls nicht datirten Gewichte (a. a. O. Nr. 18), und auf zwei Gewichten der XXVI. Dynastie (a. a. O. Nr. 8 u. 10). Der Ring war also in der That von den ältesten Zeiten Aegyptens ab bis in das 6. Jahrhundert v. Chr. hinein als Gewichtszeichen in Gebrauch, verhältnismässig häufiger aber in der älteren Zeit.

[1] Vergl. Tafel VI in meiner früheren Arbeit über die Geschichte der Polyeder und Zahlzeichen.

[2] Es ist dies Nr. 1 in dem von Griffith veröffentlichten Verzeichnisse der mit Inschriften versehenen ägyptischen Gewichte; Proceedings of the Society of Biblical Archäology, vol. XIV 1891—1892, p. 442 ff.

Die Aufschrift sagt uns hiernach, dass es sich um ein Gewicht von 10 Einheiten, jede zu ca. 9,85 gr. handelt. Auf den verschiedenen, soeben erwähnten ägyptischen Gewichten bedeutet das Zeichen ◎ eine ganz verschiedene Menge von gr, wie aus folgender Tabelle ersichtlich ist:

Nr. bei Griffith	Dynastie	1 ◎ =
2	IV.	13,35 g
4	XVIII.	12,77 „
13	?	14,18 „ (?)
14	XVIII—XIX.	14,92 „
22	?	13,08 „ (?)
18	?	16,40 „
8	XXVI.	?
10	XXVI.	?

Die beiden letzten Stücke sind stark verletzt, deshalb die Gewichtsangabe unsicher. Hinzufügen kann man zu dieser Liste ein ellipsoïdisch gestaltetes, scheinbar ganz unverletztes Gewicht aus dunkelm polirten Stein mit Aufschrift, das ich im ägyptischen Museum zu Turin bemerkte (Inv.-Nr. 4466), und das bisher noch nicht veröffentlicht zu sein scheint. Nach Urteil des Herrn Professor Schiaparelli, Direktors jenes Museums, gehört es dem sogenannten „Alten Reiche" an. Es ist auf ihm (neben dem Namen eines Priesters) das Gewicht mit den Zeichen ◎∩ angegeben, von denen letzteres das hieroglyphische Zeichen für die Ziffer 10 ist; das Stück wiegt 195 gr; ein ◎ hat also die Bedeutung von 19,5 gr, das ist $2 \times 9{,}75$ gr, d. h. fast genau das Doppelte derjenigen Einheit, welche auf unserem Gewichte aus dem fränkischen Jura mit einem Ringe bezeichnet ist. Man könnte dieses dadurch erklären, dass im ganzen Altertume bei den vorderasiatischen Gewichtssystemen „leichtes" und „schweres" Gewicht neben einander hergehen, von denen das schwere immer doppelt so viel wiegt, wie das leichte, während zur Bezeichnung beider Gewichtstypen dasselbe Wort gebraucht wird.

[illegible] Einheiten steht [illegible] ersicht- [illegible] gr. denn es ist [illegible] Aegyptern zu ver- [illegible] Zeit an verschie- [illegible] Einheiten benutzt: [illegible] der Natur des zu [illegible] Getreide. Honig [illegible] zurückzukommen [illegible]

[illegible] Bezeichnung einer [illegible] im allge- [illegible] also als De- [illegible] Es wird dieses wahr- [illegible] ältester Zeit die [illegible] bestimmten Gewichtes [illegible].[1] Nach meinen Untersuchungen hatten [illegible] Terramaren und Pfahl- [illegible] die Gestalt [illegible] denn durch meine [illegible] mit den allerdings [illegible] dass die viel- [illegible] aufgefassten [illegible] Ringe, wenig- [illegible] waren.[2] Um so weniger ist [illegible] später als Gewichtszeichen [illegible] der Ring auf meh- [illegible] Museums von [illegible] gleicher Bedeutung [illegible] ältester Zeit; ins-

1. [illegible] Leipzig 1896. p. 376 ff.

2. [illegible] solcher Ringe aus [illegible] bei Naville: The [illegible] 1894: Egypt exploration fund. XII. [illegible] X.

3. Vergl. [illegible] § VII, VIII [illegible] IX.

besondere auf dem in § II zu besprechenden Stücke. Zu beachten ist auch für Aegypten, dass dort das für die kleinere Gewichtseinheit gebrauchte Wort „ket" oder „kite" (oder) mit dem Worte für Kreis „ḳed" () fast identisch ist.

Die zweite dreieckige Fläche unseres Gewichtsstückes trägt, wie schon erwähnt, die Aufschrift . Da in Aegypten mit Vorliebe decimale Teilung benutzt wurde, so ist zu vermuten, dass mit dem Zeichen die grössere Gewichtseinheit bezeichnet werden sollte, welche 10 kleinere Einheiten (∩ ◎) umfasst. Das erwähnte Zeichen wird im Aegyptischen in der Regel für das Wort Himmel (, pet) gebraucht; diese Bedeutung passt hier nicht; im übertragenen Sinne steht[1]) dasselbe Zeichen auch für das Wort ḥri-ï gleich „oben", „erster" und damit könnte in der That das höhere Gewicht gegenüber dem niedrigeren bezeichnet werden. Andererseits kommt das Zeichen in der ptolomäischen and römischen Epoche auch für den Buchstaben p vor.[2]) Erst in dieser Zeit kam die Sitte auf, ein Wortzeichen phonetisch für den Anfangsbuchstaben dieses Wortes zu gebrauchen. Diese Sitte wird durch das massenhafte Eindringen fremder Elemente erklärt; es erscheint daher sehr gut möglich, dass Fremde, die schon in älterer Zeit ägyptische Hieroglyphen anwendeten, ein Wortzeichen mit einem Buchstabenzeichen verwechselten. Legt man in Uebereinstimmung hiermit dem Zeichen die Bedeutung von p bei, so würde dieses darauf hinweisen, dass unser oberfränkisches Gewicht von einem indogermanischen Volksstamme

---

[1]) Vergl. Brugsch, Wörterbuch der ägyptischen Sprache, p. 379 und Erman, Aegyptische Grammatik, p. 182, Brugsch, Aegyptologie, p. 241, 242, 268.

[2]) Vergl. Brugsch, Hieroglyphische Grammatik, p. 118 und 128, und Aegyptologie p. 3; ferner z. B. Piehl, notes de philologie égyptienne, Proceedings of the Society of Biblical Archaeology, vol. XIV, p. 54 f.

gebraucht wurde, wenigstens einem Volke, bei dem ein mit dem Buchstaben p beginnendes Wort für Gewicht oder Pfund angewandt ward.

Wir lesen die Aufschrift auf dem vorliegenden Steine hiernach etwa: ein Pfund, zehn Loth.

Längs der horizontalen Mittellinie der einen Seitenfläche unseres dreieckigen Cylinders von geringer Höhe, welcher die Gestalt des Gewichtsstückes angenähert darstellt, verläuft eine vertiefte Rille, wie schon oben hervorgehoben. Dieselbe dürfte den Zweck gehabt haben, das sichere Aufhängen des Gewichtstückes an einem Faden zu ermöglichen, denn Waagen mit nur einer Waagschale und mit verschiebbarem Gewichte am anderen Ende des Waagebalkens (also mit Laufgewicht) sind schon sehr früh in Gebrauch gewesen.[1]

Die durch unser oberfränkisches Gewicht repräsentirte Einheit von 9.85 gr findet sich direkt in zwei Gewichten, welche der XII. oder XIII. Dynastie angehören und beide mit Ziffern markiert sind (Nr. 26 u. 27 der Liste von Griffith a. a. O.), welche also bis in das Ende des dritten oder den Anfang des zweiten Jahrtausends v. Chr. zurückgehen. Auch dies spricht für das hohe Alter unseres Gewichtsstückes. Uebrigens lässt sich auch die Einheit von 13.35 gr des ältesten, ägyptischen Gewichtes aus der Zeit des Königs Chufu (vergl. obige Tabelle), auf die babylonische Mine gemeiner Norm zurückführen, denn es ist 13.68 = $^{985}/_{72}$. Gleiches gilt von einem Gewichte, welches ebenfalls der XII. oder XIII. Dynastie angehört, und welches sich auf eine Einheit von 27.7 gr bezieht, denn es ist 27,36 = $^{985}/_{36}$. Wir haben hier wiederum zwei Einheiten, von denen eine die Hälfte der andern darstellt.

[1] Vergl. z. B. die von Lehmann erwähnte Waage aus Chiusi, Congrès international des orientalistes, Stockholm a. a. O. p. 208 f. und eine andere solche bei Gamurrini, Monumenti antichi vol. I. 1892, p. 157.

§ II. Ein Gewicht mit ägyptisch-phönikischer Aufschrift aus dem fränkischen Jura.

Nr. 2. An einer anderen Fundstätte (im Inventar der hiesigen prähistorischen Sammlung des Staates mit Nr. 89, II bezeichnet) und zwar in einer Höhle bei Weidmannsgesees (bei Tückersfeld) wurde ein ziemlich grosser Stein aus schmutzig-gelbem Sandstein in Gestalt eines Schuhes gefunden, welcher durch die auf ihm befindlichen Zeichen sofort die Aufmerksamkeit erregt (Inv.-Nr. 4618[a]). Diese Zeichen erweisen sich auch als ägyptischen Ursprungs und kennzeichnen das seltsame Stück als ein Gewicht, so dass uns hier eine wesentliche Ergänzung zu dem im § I. besprochenen Gewichte vorliegt.

Der Stein wiegt 4715 gr; rechnet man etwa 4⁰/₀ Abnutzung hinzu, so kommt man auf ca. 4900 gr. Andererseits wiegt eine leichte babylonische Mine gemeiner Norm 491 bis 493 gr; wir hätten also in dem Fundstücke ungefähr 10 leichte babylonische Minen gemeiner Norm oder fünf schwere Minen dieser Art vor uns.

Die Gestalt des Stückes wird durch Fig. 3 u. 4 auf beigegebener Tafel erläutert. Es ist ein nicht ganz regelmässiger Cylinder, dessen Basis eine schuhsohlenförmige Gestalt hat; die gegenüber liegende Fläche hat ein ähnliches Aussehen. Die Länge dieser Sohlen beträgt 30—33 cm; genau lässt sich das Maass nicht angeben, da die Ränder gegen den Seitenmantel des Cylinders nicht scharf abgesetzt sind. Die Höhe beträgt an der Stelle der Ferse ca. 10 cm, an der Stelle der Zehen ca. 3 cm. Die Seitenfläche des Cylinders ist ziemlich unregelmässig gestaltet, doch sind Bruchstellen aus jüngerer Zeit nur in ganz unbedeutender Ausdehnung vorhanden. Das Ganze macht den Eindruck, als wenn uns der Stein in seiner ursprünglichen Gestalt ziemlich unverletzt erhalten wäre.

Auf der oberen Fläche in Gestalt einer Schuhsohle befindet sich die in Fig. 3 ersichtliche Aufschrift. Wir haben wieder das Zeichen des Ringes, das auf ein Gewicht hinweist; rechts

daneben das Zeichen Λ, d. h. die ägyptisch-hieratische Ziffer 10, zwischen zwei fast vertikalen, gegen einander etwas geneigten Strichen. Diese Combination ist aus dem Aegyptischen nicht bekannt, wohl aber begegnet sie uns unter den phönikischen Zahlzeichen. Die phönikische 10 ist mit der babylonischen identisch und geht aus der ägyptischen durch eine Drehung um 90° hervor; zwischen zwei vertikale Striche gesetzt, wird aus diesem Zeichen dasjenige für 100 nach dem phönikischen Systeme (vergl. p. 715 u. Tafel IX, Fig. 1 meiner früheren Arbeit). Auf unserem Steine ist also die phönikische Methode, wonach die Multiplication mit 10 durch Einschliessen zwischen zwei vertikale Striche angedeutet wird, auf die ägyptische 10 angewandt;[1]) und unsere Aufschrift bedeutet: 100 Gewichtseinheiten, deren jede durch einen Ring bezeichnet ist. Dieser Ring repräsentirt uns demnach ein Gewicht von circa 49 gr, d. h. das fünffache derjenigen Einheit, welche auf dem in § I besprochenen Gewichte mit einem Ringe bezeichnet war. Diese Verschiedenheit in der Bezeichnung der Gewichtseinheit ist nicht auffallend, nachdem oben gezeigt wurde, dass der Ring in verschiedenstem Sinne bei Aufschriften von Gewichten benutzt ward. Bemerkt sei noch, dass die hier vorkommende Einheit von ca. 49 gr das Dreifache der in § I unter Nr. 18 der dortigen Tabelle vorkommenden Einheit von ca. 16,4 gr beträgt, welche selbst mit dem hebräischen Goldschekel identisch ist (vergl. p. 635 a. a. O.).

Die zweite schuhsohlenförmige Fläche unseres Steines zeigt die in Fig. 4 wiedergegebene Aufschrift. Wir haben das hieratische Zeichen für 10 (Λ) und rechts daneben ein in der hieroglyphischen Schrift wohlbekanntes Zeichen. Dasselbe (ꝋ)

---

[1]) Da die betrachtete Aufschrift auf Beziehungen zum Oriente beruht, die wahrscheinlich durch Oberitalien vermittelt sind, so glaube ich in dem hier festgestellten Auftreten der phönikischen Schreibweise für Ziffern eine Bestätigung meiner früheren Hypothese erblicken zu dürfen, nach welcher die Erklärung gewisser etruskischer und römischer Zahlzeichen durch die phönikische Methode der Zahlenschreibung geschah (vergl. a. a. O. p. 715).

kommt als Determinativ für den Begriff „binden" vor; insbesondere steht es für das Wort „ser" (𓍢, ausführlicher: 𓍢 geschrieben) = Messschnur,[1]) hängt also jedenfalls mit dem Begriffe einer Maassbestimmung zusammen.

Andererseits könnte die Schleife ᵹ auf unserm Steine auch für das hieroglyphische Zeichen ᵹ stehen, welches Sack bedeutet.[2]) Man könnte dabei etwa an das Gewicht eines Sackes Getreide denken; jedenfalls wäre die fragliche Schleife ᵹ dann das Zeichen für eine grössere Gewichtseinheit, hier eine solche von einer leichten babylonischen Mine gemeiner Norm, so dass das Gewicht unseres Steines gleichzeitig in grösseren und in kleineren Einheiten auf den beiden Seiten desselben angegeben ist, genau wie bei dem in § I behandelten Gewichte, nur dass dort die Einheiten andere waren.

Nicht unerwähnt mag bleiben, dass eine Schleife unserer Art auch als Silbenzeichen im Aegyptischen vorkommt, und zwar ᵹ für die Silbe „roṭ" oder „rwḍ"; wie man auf dem ersten Gewichte das Zeichen ⊏⊐ vielleicht als Buchstaben „p" d. h. als Anfangsbuchstaben eines Wortes wie Pfund oder dgl. auffassen konnte, so könnte man bei der Silbe „roṭ", da die Aegypter „r" und „l" nicht unterschieden, an ein indogermanisches Wort ähnlich unserem Loth denken, das zur Bezeichnung einer Gewichtseinheit gewählt wurde; doch scheint mir die vorhin gegebene Deutung am meisten Wahrscheinlichkeit für sich zu haben.

Hervorgehoben mag nochmals werden, dass die babylonische Mine von 985 gr schon sehr früh in Italien verbreitet war. Im etruskischen Museum des Grafen Aria zu Marzabotto bei Bologna fand ich zum Beispiel ein steinernes, beiderseits durch einen Ring bezeichnetes Gewicht im Betrage

---

[1]) Vergl. Brugsch, Grammatik p. 132 und Wörterbuch p. 1262.

[2]) Vergl. Erman, Grammatik, p. 190; in der That ist ᵹ auch das Zeichen für ein gewisses Hohlmaass Getreide; vergl. Brugsch, Aegyptologie p. 381.

von 1435 gr; rechnet man 3 % Abnutzung hinzu, so kommt man auf 1477 gr d. i. ca. die Hälfte von drei Minen zu je 985 gr, oder 30 Einheiten zu je 49 gr (gleich ½ von 98); und innerhalb des einen Ringes war das Gewicht durch drei parallele Striche bezeichnet, welche durch eine vierte Linie senkrecht durchsetzt werden; und diese Combination von vier Linien ist das altbabylonische Zeichen für die Ziffer 30.[1]) Die zu Grunde liegende Einheit von 49 gr aber ist identisch mit der Einheit, welche wir in unserm schuhförmigen Gewichte aus dem fränkischen Jura erkannten. Ein anderes sorgfältig in Gestalt eines etwas schiefwinkligen Rhombus gearbeitetes Steingewicht in Marzabotto wog 491 gr, also fast genau eine leichte babylonische Mine gemeiner Norm. Ein nur wenig verletztes aus gebranntem Thone gefertigtes Gewicht im Museo civico zu Adria wog 490 gr, ein etwas stärker verletztes 468 gr; und so könnte ich eine Menge Beispiele anführen (vgl. unten § VII, Nr. 67, 68, 72).

Die schuhförmige Gestalt des hier besprochenen Gewichtsstückes lässt vermuten, dass dasselbe mit dem „Fusse" als Längenmaass in Verbindung steht. In der That hat Pigorini aus seinen Beobachtungen an den Pfahlbauten der Terramaren (insbesondere in Castellazzo di Fontanellato) den Schluss gezogen, dass die Bewohner der Terramaren ihren Constructionen eine Maasseinheit von ca. 30 cm zu Grunde legten.[2]) So viel aber beträgt auch ungefähr die Länge unseres steinernen Fusses (vergl. oben p. 81). Die Länge von 33 cm kommt nach Lehmann[3]) auch dem altbabylonischen Fusse zu, wie er schon im dritten Jahrtausend v. Chr. beglaubigt ist.

---

[1]) Vergl. p. 709 und Tafel IX Fig. 4 meiner früheren Abhandlung.

[2]) Vergl. Pigorini, La Terramara Castellazzo di Fontanellato nel Parmense, scavi del 1894, Notizie degli scavi del mese di gennaio 1895, und die dort citierten Arbeiten.

[3]) Metrologische Nova, Verhandlungen der Berliner anthropologischen Gesellschaft, Juli 1896.

III. Ein Gewicht aus Sermide mit ägyptischer Aufschrift.

Nr. 3. In seinem Werke „Ueber die Sprache der Etrusker" Band II, p. 580 ff. giebt Corssen die Beschreibung eines 1873 bei Sermide am Po, in der Provinz Mantua, gefundenen Gewichtes aus gebranntem Thon, wie es nach Corssen in Fig. 5 auf beiliegender Tafel dargestellt wird. Die Inschrift tritt in Relief aus der einen Fläche der Terracotte hervor, ist also auf den weichen Thon vor dem Brennen mittelst einer Form aufgeprägt. Unter der abgestumpften Spitze ist die Pyramide durchbohrt, parallel mit der beschriebenen Vorderseite derselben und mit der Basis. Thönerne Gewichte von der Form solcher abgestumpften Pyramiden haben sich mehrfach auf antikem Boden gefunden; sie werden meist als Webstuhl-Gewichte betrachtet, welche dazu dienten, den Fäden des antiken Webstuhles die nötige Spannung zu geben. Diese Deutung ist in Uebereinstimmung mit der Darstellung eines solchen Webstuhles auf einer Vase von Chiusi, deren Malerei etwa dem Jahre 400 v. Chr. angehört;[1]) sie trifft jedenfalls für einen Teil der fraglichen Stücke zu. Durch meine Wägungen an einer grossen Anzahl solcher Gewichte in italienischen Museen glaube ich festgestellt zu haben, dass dieselben nach bestimmten Einheiten normiert und als Handelsgewichte gebraucht worden sind, was teilweise auch durch Aufschriften bestätigt wird. Die betreffenden Einzelheiten kann ich erst später veröffentlichen; vgl. auch unten § VII.

Nach Mantovani[2]) hat das fragliche Stück eine Höhe von 15 cm und ein Gewicht von 930 gr. Es wurde in den Resten eines antiken Brennofens nahe der via Emilia gefunden.

Die Inschrift, welche Corssen und Deecke für etruskisch erklären, ist von rechts nach links zu lesen und lautet

---

[1]) Vergl. Conze, Il ritorno di Ulisse, Annali del' instituto di corrispondenza archeologica, Band XXXXIV 1872, p. 198 ff. und 331.

[2]) Lettere sermidesi, Bullettino dell' instituto di corrispondenza archeologica per l' anno 1876, p. 131. Vergl. desselben Verfassers Werk: Il territorio Sermidese, Bergamo 1886, p. 40 ff.

X I

IVIИ ⊜ ᗺИIVT

X I

Der erste Buchstabe T ist unten verletzt; die Verletzu
aber geringer, als es nach der beigegebenen Abbildung sch
könnte; ich überzeugte mich davon im Museo civico in Ma
wo sich das Stück gegenwärtig befindet. Der fünfte B
stabe 8 ist nach Corssen als „e" zu lesen und findet s
dieser Form sowohl auf alten, griechischen [1]) als auf ei
anderen etruskischen Inschriften. Das sechste Zeichen ⊜
von Corssen und Bugge [2]) als Interpunktionszeichen ge
und nicht weiter berücksichtigt. Ersterer fasst die W
tuine nivi als einen Eigennamen auf, während die Ziff
die Anzahl der kleineren Gewichtseinheiten angeben soll, w
das thönerne Gewicht von Sermide enthält. Bugge wil
gegen puine lesen und vergleicht dieses Wort mit dem
nischen pondo, und nivi mit novem. Hiermit wäre dan
starker Beweis für den indogermanischen Charakter der et
schen Sprache gegeben, welcher von anderen, insbesonder
Pauli entschieden bestritten wird. Letzterer, dem ic
August 1897 in Lugano diese Inschrift (und meine
folgende Deutung derselben) vorlegte, bezweifelt, dass e
überhaupt um eine etruskische Inschrift handelt, so
glaubt, dass dieselbe von einem andern (vielleicht liguri
Volke herrührt, dessen Spuren er in verschiedenen insc
lichen Resten habe verfolgen können. Für uns ist die
scheidung dieser Streitfrage im Folgenden nicht von Bel

Als ich das Stück zuerst sah, fiel mir sofort das Zeichen auf; ich glaubte darin eine Wiedergabe der ägyptischen iffer 9 in demotischer Schrift zu erkennen, aus welcher nach einen früheren Darlegungen unsere heutige Ziffer 9 entstanden t (vergl. a. a. O. p. 751). Wir würden also hier einen Beweis ir meine damalige Hypothese vor uns haben, nach der zu en Zeiten des Pythagoras in Italien (entsprechend dem Beichte des Boëtius) demotische Ziffern gebraucht wurden. Jeber und unter dem Zeichen ℮ befindet sich die Ziffer IX, im dies Zeichen zu interpretieren, so dass wir gewissermassen ine bilinguis vor uns haben.

Diese Erklärung wird durch das Wort tuine bestätigt, in welchem ich das ägyptische Wort vermuthe, das zur Bezeichnung eines Gewichtes, und zwar einer bestimmten Gewichtseinheit ausserordentlich häufig in ägyptischen Inschriften vorkommt. Das Zeichen wird als Darstellung eines metallischen Drahtes gedeutet, in Erinnerung daran, dass die Metalle in Form von Drähten bestimmten Gewichtes in den Handel kamen; ist der Buchstabe n; ist das Determinativ für Stein, Gewicht. Chabas[1]) vergleicht das Wort mit dem andern gleich „uten", Schwere, andrerseits aber auch mit dem Worte , gleich Gewicht (in übertragenem Sinne), wobei der Buchstabe (= u) fehlt, drittens mit dem Worte , gleich tenu, von einem Rezepte aus dem Tempel von Edfu, wobei der Buchstabe ℮ (= u oder w) an anderer Stelle erscheint. Brugsch[2]) liest wtn oder woten, Lepsius tinu; Erman[3]) liest uten und vergleicht das Wort mit dbn, (umkreisen). Neuerdings liest man nach Spiegelberg deben und legt dem Worte die Bedeutung „Ring, aufgewickelter Draht"

[1]) Mélanges égyptologiques, Paris 1862, p. 23 ff. und Détermination métrique de deux mesures égyptiennes de capacité, Paris 1867, p. 5 f.

[2]) Vergl. z. B. Aegyptologie p. 382.

[3]) Aegypten p. 406 und 657 und ägyptische Grammatik p. 191.

bei.[1]) Auf letztern Umstand machte mich Herr [illegible] Hommel aufmerksam, als ich ihm vor etwa 2 Jahren [illegible] Vermutung mitteilte, nach der das Wort turine unserer [illegible]schen (?) Inschrift mit jenem ägyptischen Worte identisch [illegible] sollte; gerade die neuere Lesung deben bestätigt meine [illegible]mutung, denn kurze Vokale werden im Aegyptischen nicht [illegible]schrieben, und der Buchstabe v würde für den Laut b [illegible] ägyptischen Wortes stehen.

Da unser Gewicht 930 gr wiegt, so würde ein Deben [illegible] Tvin ein Gewicht von 103,33 darstellen, während für [illegible] ägyptisches Deben allgemein das Gewicht von 90,09 gr [illegible]nommen wird. Diese Annahme beruht darauf, dass ein [illegible] erhaltenes, aus Heliopolis stammendes Gewicht[2]) von 45,[illegible] mit den Zeichen [illegible] versehen ist, von denen das obere [illegible] Bedeutung von $^1/_2$ hat, während die unteren fünf Striche [illegible] eine Einheit von ca. 9,09 gr = $^1/_{10}$ Deben hinweisen, dass ferner diese kleinere Einheit von 1 „kite" durch ein an[illegible] vollkommen gut erhaltenes, aus Heliopolis stammendes Ge[illegible] sehr genau bekannt ist, dass uns endlich auch ein mi[illegible] Ziffer 10 (∩) bezeichnetes Gewicht vorliegt, welches 10 [illegible] darstellt.

Andererseits ist schon mehrfach vermutet, dass in ma[illegible] Inschriften das ägyptische Wort [illegible] sich auf eine andere [illegible]heit bezieht, zumal dann, wenn es sich um ein Gewicht ha[illegible] das zur Abwägung von edlen Metallen diente. Zu d[illegible] Zwecke wurde offenbar eine andere Einheit benutzt, über [illegible] Höhe verschiedene Ansichten[3]) ausgesprochen sind. Ha[illegible] es sich um ein Goldgewicht, so wird das Zeichen für [illegible] ([illegible]) vor das Wort deben oder vor die betr. Ziffer ges[illegible]

---

[1]) Vergl. Hultsch, Die Gewichte des Altertums a. a. O. p. [illegible]

[2]) Vergl. Nr. 7 der oben erwähnten Liste von Griffith.

[3]) Vergl. Brandis, Das Münz-, Maass- und Gewichtswesen in V[illegible]asien, Berlin 1866, p. 91 ff.; Hultsch, Griechische und römische [illegible]logie, Berlin 1882, p. 374 ff.; Brugsch, Zeitschrift für ägyptische Sp[illegible] Band XXVII, 1889, p. 19 ff. und p. 87 ff.

§ III. Ein Gewicht aus Sermide mit ägyptischer Aufschrift.

Nr. 3. In seinem Werke „Ueber die Sprache der Etrusker" Band II, p. 580 ff. giebt Corssen die Beschreibung eines 1873 bei Sermide am Po, in der Provinz Mantua, gefundenen Gewichtes aus gebranntem Thon, wie es nach Corssen in Fig. 5 auf beiliegender Tafel dargestellt wird. Die Inschrift tritt in Relief aus der einen Fläche der Terracotte hervor, ist also auf den weichen Thon vor dem Brennen mittelst einer Form aufgeprägt. Unter der abgestumpften Spitze ist die Pyramide durchbohrt, parallel mit der beschriebenen Vorderseite derselben und mit der Basis. Thönerne Gewichte von der Form solcher abgestumpften Pyramiden haben sich mehrfach auf antikem Boden gefunden; sie werden meist als Webstuhl-Gewichte betrachtet, welche dazu dienten, den Fäden des antiken Webstuhles die nötige Spannung zu geben. Diese Deutung ist in Uebereinstimmung mit der Darstellung eines solchen Webstuhles auf einer Vase von Chiusi, deren Malerei etwa dem Jahre 400 v. Chr. angehört;[1]) sie trifft jedenfalls für einen Teil der fraglichen Stücke zu. Durch meine Wägungen an einer grossen Anzahl solcher Gewichte in italienischen Museen glaube ich festgestellt zu haben, dass dieselben nach bestimmten Einheiten normiert und als Handelsgewichte gebraucht worden sind, was teilweise auch durch Aufschriften bestätigt wird. Die betreffenden Einzelheiten kann ich erst später veröffentlichen; vgl. auch unten § VII.

Nach Mantovani[2]) hat das fragliche Stück eine Höhe von 15 cm und ein Gewicht von 930 gr. Es wurde in den Resten eines antiken Brennofens nahe der via Emilia gefunden.

Die Inschrift, welche Corssen und Deecke für etruskisch erklären, ist von rechts nach links zu lesen und lautet

---

[1]) Vergl. Conze, Il ritorno di Ulisse, Annali del' instituto di corrispondenza archeologica, Band XXXXIV 1872, p. 198 ff. und 331.

[2]) Lettere sermidesi, Bullettino dell' instituto di corrispondenza archeologica per l' anno 1876, p. 131. Vergl. desselben Verfassers Werk: Il territorio Sermidese, Bergamo 1886, p. 40 ff.

X I

IVIИ @ 8ИIVT

X I

Der erste Buchstabe T ist unten verletzt; die Verletzung ist aber geringer, als es nach der beigegebenen Abbildung scheinen könnte; ich überzeugte mich davon im Museo civico in Mantua, wo sich das Stück gegenwärtig befindet. Der fünfte Buchstabe 8 ist nach Corssen als „e" zu lesen und findet sich in dieser Form sowohl auf alten, griechischen[1]) als auf einigen anderen etruskischen Inschriften. Das sechste Zeichen @ wird von Corssen und Bugge[2]) als Interpunktionszeichen gedeutet und nicht weiter berücksichtigt. Ersterer fasst die Worte tuine nivi als einen Eigennamen auf, während die Ziffer IX die Anzahl der kleineren Gewichtseinheiten angeben soll, welche das thönerne Gewicht von Sermide enthält. Bugge will dagegen puine lesen und vergleicht dieses Wort mit dem lateinischen pondo, und nivi mit novem. Hiermit wäre dann ein starker Beweis für den indogermanischen Charakter der etruskischen Sprache gegeben, welcher von anderen, insbesondere von Pauli entschieden bestritten wird. Letzterer, dem ich im August 1897 in Lugano diese Inschrift (und meine unten folgende Deutung derselben) vorlegte, bezweifelt, dass es sich überhaupt um eine etruskische Inschrift handelt, sondern glaubt, dass dieselbe von einem andern (vielleicht ligurischen) Volke herrührt, dessen Spuren er in verschiedenen inschriftlichen Resten habe verfolgen können. Für uns ist die Entscheidung dieser Streitfrage im Folgenden nicht von Belang.[3])

---

[1]) Vergl. Kretschmer, Die griechischen Vaseninschriften, Gütersloh 1894, p. 32 ff.

[2]) Beiträge zur Erforschung der etruskischen Sprache, etruskische Forschungen und Studien, herausgegeben von Deecke, Heft IV, Stuttgart 1883, p. 177 ff.

[3]) Für die strittige Frage nach der Natur der etruskischen Sprache sind die Zahlwörter immer von besonderer Bedeutung gewesen; vergl. p. 748 f. meiner früheren Arbeit.

Auf der Abbildung von Brizio sieht man links von dem Kreuze ✳ einen Strich weniger, als ich hier auf Grund meiner Zeichnung angegeben habe. Das Stück ist für uns wegen des Wortes tunies von besonderem Interesse. Wir werden, da es sich um eine Gewichtsbezeichnung handelt, dem Worte dieselbe Bedeutung beilegen, wie dem Worte tuine in § III. Die verschiedene Schreibweise ist nicht auffällig, denn in etruskischen Inschriften kommen Umstellungen von Buchstaben häufig vor, und überdies handelt es sich für die Etrusker um ein ägyptisches Fremdwort.

Ein eben solches Fremdwort vermute ich in dem Worte milav, indem ich es mit dem ägyptischen Worte merav, welches die Bedeutung von richtig, genau hat[1]), identificiere. Dass auf dem Steine ein l statt des r steht, erklärt sich dadurch, dass im Aegyptischen l und r vor der Zeit der Ptolemäer überhaupt nicht unterschieden werden. Georg Ebers, dem ich diese Erklärung der Aufschrift vorlegte, hielt dieselbe für zutreffend. Herr Dr. Dyroff macht mich indessen darauf aufmerksam, dass die Brugsch'sche Lesung merav für das betr. jüngere (demotische) ägyptische Wort wahrscheinlich nicht zutreffend sei. Denn der Stamm des ursprünglichen ägyptischen Wortes lautet „mtr = Mitte"; noch im Koptischen habe sich der t-Laut (mete) erhalten; es sei demnach unthunlich, diesen Laut im Demotischen ausfallen zu lassen, und das betr. demotische Wort müsse auch mit t gelesen werden. Andererseits ist aber daran zu erinnern, dass gerade in Betreff des t-Lautes die jüngere ägyptische Orthographie eine sehr schwankende war (zumal am Ende der Wörter). „Von Jahrhundert zu Jahrhundert[2]) büssten die Schreiber das Bewusstsein ein, dass die Buchstaben, die sie schrieben, auch bestimmte Laute bezeichnen sollten, da man trotz Veränderung der Sprache die alte Orthographie beibehalten wollte." So wurde ḥmt „Frau" ge-

---

[1]) Vergl. Brugsch, Wörterbuch, p. 724 f.

[2]) Vergl. Erman, Aegypten, p. 456.

schrieben, aber ḥime gelesen; es wurde prt (𓉐𓏏𓂋𓇳) „Winter“ geschrieben, aber prô gelesen. Viele Schreiber fingen an, dieses t überall über das Zeichen 𓉐 zu setzen, wo es gebraucht wurde, so dass 𓏏𓉐 statt 𓉐 das Determinativ für Haus wird. Der oft stumme Buchstabe t wurde also auch dort geschrieben, wo er keinen Sinn hatte. Um so leichter konnte ein nicht-ägyptisches Volk ihn auslassen, wo er vielleicht noch gesprochen wurde. Ueberdies leitet Brugsch das Wort „mr“ = richtig (𓌻𓂋 = genau entsprechend) auch von 𓌻𓂋𓏏𓉐 = mer „getäfeltes Bauwerk“ ab[1]), wo dann kein t-Laut ausgefallen wäre.

Die Deutung der übrigen Zeichen unserer Inschrift wird erleichtert, wenn wir zuvor einige andere Steingewichte von Marzabotto studieren.

Nr. 5. Grosser Stein im Gewichte von 38300 gr, Nr. 65 bei Brizio, versehen mit dem Zeichen ✳. Die sogenannte phönikische Mine erhöhter königlicher Norm wird auf 382 bis 383,3 gr veranschlagt[2]); etwa derselbe Betrag wird für die kartagische Mine angesetzt.[3]) Wenn also das Zeichen ✳ für die Ziffer 100 steht, so haben wir genau 100 phönikische Minen erhöhter Norm.

Dieses wird durch folgende Ueberlegung bestätigt: In meiner früheren Arbeit habe ich gezeigt, dass die etruskische (und später römische) Ziffer 50 aus der ägyptischen hieratischen Ziffer ˥ entstanden ist (a. a. O. p. 712). Indem die drei oben zusammenlaufenden Striche gleich lang gemacht wurden, entstand das allerdings seltene Zeichen ⩚[4]), und hieraus durch Verkürzung der beiden äusseren Striche das gewöhnliche Zeichen ↑. Durch Verdoppelung des altertümlichen ⩚ entsteht nun in der That das Zeichen ✳ auf dem jetzt betrachteten Steine, wodurch

[1]) Vergl. Brugsch, Wörterbuch, p. 671.
[2]) Vergl. Lehmann, Congrès des orientalistes a. a. O.
[3]) Vergl. Hultsch, Metrologie, p. 420 ff.
[4]) Corssen erwähnt (a. a. O. Bd. I, p. 40) nur eine Belegstelle dafür.

unsere Annahme erwiesen wird. Eine weitere Bekräftigung derselben finden wir in folgendem Umstande. Die Fischer von Chioggia bei Venedig bedienen sich noch heute bei ihren gegenseitigen Abrechnungen einer eigenartigen Gattung von Zahlzeichen, die durch Ninni[1]) publiciert sind, worauf mich Herr Professor Cav. Milani, Direktor des Museo etrusco in Florenz, aufmerksam machte. Darnach hat ʌ die Bedeutung 5, X od. O od. A die Bedeutung 10, ↑ od. Ψ od. m die Bedeutung 50, ferner ✳ od. ⊙ od. ⊗ die Bedeutung 100. Wir haben also das bekannte etruskische Ziffernsystem und darunter das jetzt besprochene Zeichen für 100. Weitere eigenartige Zeichen kommen für 500 und 1000 bei den Fischern vor.

Dieselbe Einheit von ca. 383 gr wird durch folgende Gewichte vertreten:

Nr. 6 Gewicht 3800 gr; Nr. 55 bei Brizio, bezeichnet auf der einen Seite mit ✳, auf der andern mit X; also ursprünglich wohl 10 phönikische Minen zu 383 gr oder $^{100}/_{10}$ einer solchen Mine zu je 38,3 gr.

Nr. 7. Gewicht 26300 gr; Nr. 50 bei Brizio, von mir nicht gesehen[2]); darauf die Zeichen ↑ und -ǂǂ-. In letzterem haben wir das altbabylonische Zeichen für 20 (vgl. § 15 meiner früheren Arbeit), an welches auch die auf den Steingewichten von Monte Loffa vorkommende 20 erinnert. Wir haben also $50 + 20 = 70$ Gewichtseinheiten, und das ursprüngliche Gewicht des Steines ist demnach auf $70 . 383 = 26810$ gr anzusetzen.

Nr. 8. Gewicht 3700 gr; Nr. 44 bei Brizio, Zeichen ⊙, also 100 Einheiten zu ursprünglich 38,3 gr; von mir nicht gesehen.

Nr. 9. Gewicht 3500 gr; Nr. 45 bei Brizio; Zeichen ✳; wo die drei Striche zusammenlaufen, ist eine Stelle ausgebrochen. Wieder 100 Einheiten zu je 38,3 gr.

---

[1]) Sui prealfabetici usati anche ora nella numerazione scritta dai pescatori chodiensi, Atti del R. Istituto Veneto dei scienze, lettre et arti, Serie VI, t. 7.

[2]) Die in den geschlossenen Schränken liegenden Stücke waren mir nicht zugänglich.

Nr. 10. Gewicht 1880 gr; Nr. 47 bei Brizio, Zeichen IIIII; ursprünglich 5.383 = 1915 gr.

Nr. 11. Gewicht 3650 gr; Nr. 48 bei Brizio, Zeichen X; ursprünglich 10.383 = 3830 gr.

Nr. 12. Gewicht 3720 gr; Nr. 49 bei Brizio, Zeichen X; ebenso.

Nr. 13. Gewicht 1835 gr; Nr. 60 bei Brizio, Zeichen IIIII; 5.383 = 1915 gr.

Nr. 14. Gewicht 3600 gr; Nr. 62 bei Brizio, Zeichen X; 10.383 = 3830.

Nr. 15. Gewicht 1905; Nr. 67 bei Brizio, Zeichen IIIII, auf der andern Seite ⊗, von mir nicht gesehen; 5.383 = 1915 gr.

Nr. 16. Gewicht 750 gr; Nr. 51 bei Brizio, Zeichen II; 2.383 = 766 gr.

Nr. 17. Gewicht 115 gr; Nr. 52 bei Brizio, Zeichen I; ⅓.383 = 127,67 gr, also auch gleich 10 mal der altägyptischen Einheit von 12,78 gr; vergl. oben p. 89 und unten § IX.

Nr. 18. Gewicht 116 gr; Nr. 53 bei Brizio, Zeichen I, auf der andern Seite X; ⅓.383 = 127,67 gr.

Hierzu kommen noch die folgenden Stücke, welche bei Brizio nicht erwähnt sind.

Nr. 19. Gewicht 7600 gr, nach einer auf dem Steine gemachten Angabe; Zeichen X; 20.383 = 7660; in der That ist X das ursprüngliche etruskische Zeichen für 20, entstanden durch Verdoppelung des hieratischen Zeichens Λ für 10 (vergl. p. 711 f. in meiner früheren Arbeit).

Nr. 20. Gewicht 368 gr; Zeichen I; 1.383 gr.

Nr. 21. Gewicht 1520 gr; Zeichen IIII; 4.383 = 1532 gr.

Nr. 22. Gewicht 317 gr; Zeichen X in einem Ringe, auf der andern Seite X; verletzt; an jedem der beiden Kreuze findet sich ein kleiner Strich; deutet man ihn subtraktiv, so hätte man 9.38,3 = 344,7 gr.

Nr. 23. Gewicht 370 gr; Zeichen X mit einer Vertiefung in der Mitte; 10.38,3 = 383 gr.

Nr. 24. Gewicht 1065 gr; Zeichen III in einem Ringe. Auf der andern Seite die Hälfte einer Ellipse, begrenzt durch

re kleine Achse und darin zwei Striche; 3.383 = 1149 gr. ie Hälfte hiervon, also 574,5 gr, würde genau eine leichte ıbylonische Silbermine königlicher erhöhter Norm darstellen; ırauf beziehen sich wahrscheinlich die zwei Striche auf der ndern Seite des Steines. Letzterer ist von flacher ovaler estalt.

Nr. 25. Gewicht 1620 gr; Zeichen IIIII. Der Stein ist, em Aussehen nach, entweder sehr roh bearbeitet oder stark erwittert. 5.383 = 1915 gr.

Ausserdem finden sich im Museum zu Marzabotto eine Menge anderer Gewichte, die nicht bezeichnet sind, sich aber gleichfalls auf die Einheit von ca. 383 gr zurückführen lassen. Daneben treten andere Gewichte auf, die sich auf eine andere Einheit beziehen, von welchen eines schon oben erwähnt wurde (p. 83 f.), und auf die wir weiter unten zurückkommen.

Das Ueberwiegen der Einheit von 383 gr bei den alten steinernen Gewichten lässt uns vermuten, dass dem oben unter Nr. 4 besprochenem Gewichtstücke ein ursprüngliches Gewicht von 38300 gr zukam, wie dem Gewichte Nr. 5, das mit dem Zeichen ✳ = 100 versehen war, umsomehr, als dieses selbe Zeichen sich auch in der Mitte der Rückseite von Nr. 4 befindet. Ausserdem lässt sich dies Gewicht von 38300 gr mit dem Worte tvin, das nach § III eine Einheit von mindestens 104 gr bezeichnet, durch die auf Nr. 4 befindliche Inschrift in überraschende Beziehung setzen. Wir lesen zu dem Zwecke die Inschrift fortlaufend über beide Seiten des Steines, nämlich:

III ✳ III III ΛΛΙ L A ⋀ † V Λ I E M.

Durch die ersten drei Striche wird nach unserer Auffassung angegeben, wie viele Hunderte (✳) zu nehmen sind; die auf das Zeichen ✳ folgenden sechs Striche geben die Anzahl der Einheiten der nächst niedrigen Abteilung, d. h. der Zehner an, so dass die ganze Inschrift bedeutet:

360 richtige tvin.

Ein tvin müsste dann gleich dem 36. Teile von 3830 gr sein,

d. h. = 106,38 gr. Berücksichtigt man, dass der Wert von 383 gr dem Maximum für die betr. phönikische Mine entspricht, indem dieselbe bei einer gewöhnlichen königlichen Norm nur auf 373 gr, bei der vollen königlichen Norm auf 379—380 gr und bei der erhöhten auf 382—383 angesetzt wird,[1]) dass ferner dem nicht unverletzten Gewichte von Sermide leicht ein Gewicht von mehr als 936 gr ursprünglich zugekommen sein mag, so ist die Uebereinstimmung hinreichend gut, denn $^{1}/_{36}$ von 373 würde 103,61 ergeben.

Es ist $^{1}/_{8}$ von 106,38 = 13,30; diese Zahl entspricht ungefähr dem Gewichte des Königs Chufu aus der IV. Dynastie, das wir oben unter Nr. 2 erwähnt haben (p. 77), während $^{1}/_{8}$ von 104 dem Gewichte des Königs Thutmes I. aus der XVIII. Dynastie und einem andern Gewichte aus der XII. Dynastie (vergl. oben p. 76 f.) als Einheit zu Grunde liegt. Dadurch sind auch diese beiden Einheiten zu einander in Beziehung gesetzt.

Das ägyptische tvin-Gewicht galt bei den Etruskern von Marzabotto offenbar als etwas Fremdländisches, während die phönikische leichte Mine von 373—383 gr so gebräuchlich war, dass sie keiner besonderen Bezeichnung bedurfte.[2]) Es entspricht dies der allgemeinen Annahme, wonach die Phöniker oder andere verwandte Völker von den Küsten Syriens und Aegyptens den Verkehr Italiens mit dem Oriente vermittelten. Für direktere Beziehungen Oberitaliens zu Aegypten lassen sich auch manche Belege anführen (vergl. § 13 meiner früheren Arbeit); die früher von mir entwickelte Geschichte der Ziffern, die in Vorstehendem betrachteten tvin-Gewichte (Nr. 3 und 4) und die sogleich zu erwähnenden Aichzeichen sind als solche Belege aufzufassen.

---

[1]) Vergl. Lehmann a. a. O., ferner unten den Schluss von § IX.

[2]) Zu dieser Einheit gehört auch das von Pauli besprochene Gewicht von Oderzo; vergl. p. 661 meiner früheren Arbeit.

§ V. Aichzeichen auf altitalischen Gewichten.

Neben den Ziffern finden sich auf altitalischen Gewichten einige andere Zeichen häufig wiederholt, deren Bedeutung durch Vergleichung mit der hieroglyphischen Schrift klar gelegt wird, und über die man sich so wenigstens annähernd Rechenschaft geben kann.

Die Bedeutung des häufig vorkommenden Ringes wurde schon oben erörtert (p. 76 f.). Ausserdem kommen vor:

1) ein Blatt ⌀, der Rand desselben meist mehrfach gezackt,

2) eine Mittelrippe, von der nach beiden Seiten in verschiedener Anzahl (3 bis 6) Seitenlinien unter spitzen Winkel ausgehen ⨚, ein Ornament, das als Baum oder als Fischgräte bezeichnet werden kann,

3) mehrere einander nahezu parallele Linien (2 bis 6), die durch zwei oder drei Linien ungefähr senkrecht durchschnitten werden ⩩,

4) das Kreuz X, welches nicht immer als Ziffer 10 oder 20 aufzufassen ist, wie ich nach meinen vielfachen Gewichtsbestimmungen als sicher angeben kann, wenn gleich bei den oben betrachteten Gewichten aus Marzabotto diese Deutung zufällig erlaubt war,

5) das Zeichen >—<.

Nr. 26. Dieses letztere Zeichen habe ich nur einmal gefunden und zwar auf einem Gewichte aus rötlichem gebrannten Thon von Gestalt einer abgestumpften Pyramide, ähnlich dem Gewichte Nr. 3 von Sermide. Unter dem Zeichen >—< befinden sich vier vertikale Striche IIII, die ebenso wie jenes Zeichen reliefartig hervortreten. Das Stück befindet sich im Museum zu Este unter der Inventarnummer 978. Es wiegt 770 gr und ist wenig verletzt. Wir haben also vier Einheiten von etwas mehr als 19,2 gr und kommen damit auf die Einheit von 19,5 gr, welche dem altägyptischen Gewichte des Turiner Museums zu Grunde liegt, das oben besprochen wurde

(vergl. p. 77), und welche doppelt so gross ist, als die Einheit des Gewichtes Nr. 1 aus dem fränkischen Jura.

Das Zeichen ist gleichbedeutend mit und ist eine auch sonst beglaubigte abgekürzte Schreibweise für das Wort , d. i. unversehrt, heil.[1]) Es bedeutet also, dass unser Gewicht ganz unversehrt sei, und kann mit Recht als Aichzeichen angesehen werden. Ueber ihm befindet sich ein Dreizack, wahrscheinlich das Hoheitszeichen für eine Behörde oder eine Stadt oder einen Fürsten.[2])

Die Einheit von ca. 19,5 gr findet sich auch sonst in Italien. Im Museo Civico in Padua befindet sich ein Gewicht aus Bronze in Gestalt eines Astragalus,[3]) das mir von dem betr. Beamten als sehr alt, wahrscheinlich vorrömisch bezeichnet wurde. Es ward 1862/63 in Abano gefunden und wiegt 19,5 gr.

Ein Stück von derselben Gestalt eines Astragalus befindet sich in der hiesigen prähistorischen Sammlung des Staates (Inv.-Nr. 2037). Es wiegt 162 gr, ist aber etwas abgestossen, so dass sein ursprüngliches Gewicht gegen 195 gr betragen haben mag. Gefunden wurde es am Eingange zur Teufelshöhle im Weiersthale (Fundstelle Nr. 28) im fränkischen Jura; es handelt sich aber hier um einen wirklichen Wirbelknochen.

Ein Stück von Gestalt einer abgerundeten Pyramide, von demselben Gewichte (770 gr) und ebenfalls mit 4 Strichen bezeichnet, ist in der Terramare von Redù gefunden, jetzt im Museo civico in Modena, Inv.-Nr. 90.

---

[1]) Vergl. Brugsch, Wörterbuch, p. 228 f. und Erman, Grammatik, p. 190 und 45*.

[2]) Der Dreizack kommt auch auf antiken Münzen vor, z. B. solchen aus Carien (Halikarnass), aus welcher Gegend bekanntlich die Etrusker nach alter Sage gekommen sein sollen; vergl. Brandis a. a. O. p. 593 und eine solche Münze im Museum zu Mantua.

[3]) Zwei sehr grosse Bronzestücke von gleicher Gestalt sah ich in der etruskischen Abteilung des Museo Vaticano in Rom, ein kleines Stück dieser Form im Museum zu Perugia (Schrank O). Bekannt ist das schön bemalte Trinkgefäss gleicher Form im faliskischen Museum in Rom.

Das unter 2) erwähnte Zeichen ⫿ kommt ausserordentlich häufig auf Gewichten aus gebranntem Thon vor, die in Gestalt dem Gewicht Nr. 3 von Sermide gleichen. Drei Stücke, die als römische Gewichte bezeichnet wurden, fand ich im Museo civico in Verona, gefunden in der Stadt nahe bei der Kirche S^a^ Trinità, eines im Museo civico zu Padua, zwei im Museo civico in Mantua, dreizehn im Museo nazionale in Este,[1]) eines im städtischen Museum zu Trient. Aelter als diese Thongewichte von pyramidaler Form sind die schon in den Pfahlbauten und Terramaren vorkommenden ringförmigen Gewichte; auf einem solchen fand ich das fischgrätenartige Zeichen im Museo civico zu Adria. Auch in jüngerer Zeit kommt es noch auf dem sogenannten aes signatum, der ältesten in Italien üblichen Form des Geldes, vor (vergl. ein Stück im Museo civico zu Pesaro). Eines der steinernen Gewichte von Marzabotto, deren Abbildung Brizio a. a. O. giebt, ist ebenfalls mit diesem Zeichen markiert.[2])

Durch meine Wägungen habe ich mich überzeugt, dass nicht etwa die Anzahl der seitlichen Striche, welche von der Mittelrippe auslaufen, zu der Schwere des Gewichtes in Beziehung stehen. Auf einer Seitenfläche eines pyramidenförmigen Gewichtes in Este gehen von der Mittelrippe zwölf seitliche Aeste aus, und zwar fünf an der einen, und sieben an der andern Seite. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche desselben Stückes ist dasselbe Muster mit dreizehn seitlichen Aesten angebracht, von denen sechs an der einen, sieben an der andern Seite.

Entweder haben wir es also mit einem blossen Ornamente zu thun, oder es muss demselben eine symbolische Bedeutung

---

[1]) Vergl. die Abbildungen bei Pauli, Altitalische Forschungen, Band III. Die Veneter und ihre Schrift-Denkmäler, Leipzig 1891, Taf. VI, sowie bei Ghirardini, Notizie d. Scavi 1888, p. 170, Nr. V, Taf. XIII.

[2]) Dasselbe ist wahrscheinlich identisch mit dem unten unter Nr. 31 besprochenen Stücke, von dem auf der Abbildung nur eine Seite sichtbar ist. Vergl. Fig. 8 auf der beigegebenen Tafel.

zukommen. Im Zusammenhange mit den übrigen hier besprochenen Zeichen liegt es nahe, die Erklärung im Aegyptischen zu suchen.

In der That wird das Zeichen [hieroglyph] nach Brugsch[1]) als Silbenzeichen [hieroglyph] für die Silbe sep gebraucht. Diese Silbe hat die Bedeutung[2]) „das Auserwählte, Vorzügliche"; auf einem Gewichte kann daher das Zeichen [hieroglyph] sehr wohl zur Beglaubigung für die Richtigkeit des Gewichtes angebracht worden sein.

Auf einigen der erwähnten Thongewichte von Este[3]) befindet sich unterhalb unseres Aichzeichens die Inschrift MLV = mlv, gewissermassen als nähere Erläuterung desselben, denn das ägyptische Wort milav, oder (wenn man die Vokale weglässt) mlv hat die Bedeutung von „wahr, richtig"; vergl. oben p. 91.

Das unter 3) genannte Zeichen [hieroglyph] hat im Wesentlichen dieselbe Bedeutung. Es ist Determinativ für Gau, Feld, Weinberg und bezeichnet insbesondere ein abgemessenes Feld.[4]) Das Wort [hieroglyph] gleich ḥsp bedeutet ein bestimmtes Ackermaass.[5]) Im „alten Reiche" endlich kommt das Zeichen nach Brugsch auch als Silbenzeichen für die Silbe sep [hieroglyph] vor.[6]) Mit demselben Rechte wie das Zeichen [hieroglyph] können wir daher auch das andere Zeichen [hieroglyph] als Aichzeichen annehmen.

---

[1]) Hieroglyphische Grammatik, p. 128.

[2]) Vergl. Brugsch, Wörterbuch, p. 1196.

[3]) Pauli spricht a. a. O. von 6 kleinen Thonpyramiden des Museums zu Este mit dieser Aufschrift und von weiteren 3 mit verstümmelter Aufschrift. Ich habe die Buchstaben mlv nur auf zwei Stücken deutlich gesehen.

[4]) Vergl. Brugsch, Grammatik, p. 138, Wörterbuch, p. 995.

[5]) Proceedings of the Society of Biblical Archaeology, Vol. XIV, p. 78.

[6]) Vergl. Grammatik, p. 128. Vielleicht kann man auch das Wort ḥsb ([hieroglyph]) „ausrechnen, abschätzen" heranziehen (Wörterbuch p. 994).

Dazu kommt, dass auch der Ring, welcher als Gewichtszeichen sich sowohl auf altägyptischen als auf altetruskischen Gewichten vielfach findet (vergl. oben p. 77), als Silbenzeichen für die Silbe sep [hieroglyph] gebraucht wurde.[1])

Das Zeichen [sign] habe ich auf fünf Gewichten im Museum zu Este gefunden, zweimal mit 6, einmal mit 5, zweimal mit 3 Querstrichen gesehen; dabei fehlt der mittlere Längsstrich.[2])

Das Zeichen [hieroglyph] hat im Aegyptischen der jüngeren Epoche die Bedeutung von [hieroglyph] ȧm oder im, steht in der späteren Zeit auch für den Buchstaben m oder [hieroglyph]. Meine Vermutung geht dahin, dass hier eine Verwechselung der Silben im und mi vorliegt; letztere hat die Bedeutung von „wahr, richtig," geschrieben [hieroglyph].[3]) Eine solche Verwechslung ist um so leichter möglich, als das Wort im „in" auch mit einem auslautenden Vokale (emi oder emo) gelesen ward. Eine Verwechslung wird ferner durch folgenden Umstand nahe gelegt: es ist [hieroglyph] das Zeichen für mi = „wahr"[4]) und (im alten Reiche) [hieroglyph] das Zeichen für ȧm oder im = „in, befindlich in."[5])

Bestätigt wird diese Deutung dadurch, dass sich die

---

[1]) Vergl. Brugsch, Grammatik, p. 133, Wörterbuch, p. 1196.

[2]) Die Zeichen [sign] und [sign] fand ich auch auf dem Boden von Schalen im faliskischen Museum in Rom, wohl in gleicher Bedeutung, ersteres auf einem Thon-Scherben in Adria, letzteres auf einem Vasenfusse daselbst und auf einem Scherben in Modena.

[3]) Vergl. Brugsch, Grammatik, p. 127, Wörterbuch, p. 566 u. 574.

[4]) Vergl. Erman, a. a. O. p. 127 u. 186; Brugsch, Wörterbuch, p. 574.

[5]) Vergl. Brugsch, Grammatik, p. 31; Wörterbuch p. 63. So bedeutet nach Lepsius (Die Metalle in den ägyptischen Inschriften, Abhandlungen der Berliner Akademie, 1871) χesbet [hieroglyph] „der echte χesbet (Lasurstein)", mafek [hieroglyph] „echtes mafek (Smaragd)". Ebenda wird auch (p. 80, Anmk.) von der Möglichkeit einer Verwechslung der Silben em und me, ma gesprochen.

beiden Zeichen und auf drei Thongewichten von Gestalt einer abgestumpften Pyramide (gegenwärtig im Museum zu Este) je vereinigt finden, und zwar auf derselben Seitenfläche der Pyramide übereinander. Dieses Doppelzeichen würde dann zu übersetzen sein: „Richtig abgeschätzt.“ Das Blatt allein findet sich auf einem andern Gewichte des Museums.

Nr. 27, 28, 29. Diese drei Gewichte mit dem erwähnten Doppelzeichen wiegen bez. 200, 210 und 220 gr; das schwerste von ihnen ist sehr gut erhalten, die andern beiden sind sehr wenig verletzt. Das Gewicht von 220 gr würde ungefähr vier Einheiten von je 56,85 gr entsprechen, auf welche wir sogleich bei dem Gewichte Nr. 31 zurückkommen, denn es ist 4.56,85 gr = 227,40 gr.

Nr. 30. Das ebenfalls gut erhaltene Gewicht im Museum zu Este, auf welchem sich ein Blatt als Aichzeichen befindet, wiegt 149 gr; es ist nicht ganz unverletzt, dürfte daher ursprünglich ein Gewicht von 3 halben tvin darstellen, d. h. gleich 12 Einheiten des sogleich zu besprechenden Gewichtes von ca. 13 gr zu setzen sein.

Die Silbe im (oder àm) oder das Wort imi werden im Aegyptischen auch durch das Zeichen dargestellt,[1]) und letzteres wird auch durch ein einfaches Kreuz + ersetzt.[2]) Solche Kreuze finden sich teils eingeritzt, teils durch Stempel in den weichen Thon vor dem Brennen eingedrückt, teils im niedrigen Relief hervortretend, so ausserordentlich häufig bei den verschiedensten Formen von Gewichten, dass es nicht nötig erscheint, dieselben hier aufzuführen. Jedenfalls ist das Zeichen gleichbedeutend mit , und was über die Verwechslung

1) Vergl. Erman, Grammatik, p. 187 und Brugsch, Grammatik, p. 135.

2) Hierauf machte mich Georg Ebers aufmerksam, als ich ihm die vorstehende Deutung der ägyptischen Aichzeichen auf altitalischen Gewichten vorlegte und ihm gleichzeitig mitteilte, dass das Kreuzzeichen eine ähnliche Bedeutung haben müsse. Vergl. Brugsch, Grammatik, p. 135, Nr. 600.

der Silben im und mi gesagt wurde, kann auch für das Zeichen + in Anspruch genommen werden.

Nr. 31. Die hier besprochenen Zeichen +, ⍦, ⌶, ⧻ finden sich vereinigt auf einem bisher nicht erwähnten Gewichte aus Marzabotto; ein sicherer Beweis, dass die Zeichen zusammengehören. Das Gewicht besteht aus grauem Stein und hat die Gestalt eines nicht ganz regulären Würfels. Von den sechs Seitenflächen ist eine frei gelassen, die gegenüberliegende trägt das Zeichen des Blattes (vergl. Figur 8 auf beiliegender Tafel); auf der dritten Fläche sehen wir das Kreuz, gebildet durch zwei Paare von sich kreuzenden Parallellinien, auf der gegenüberliegenden Fläche das Fischgrätenmuster. Ueber dieses letztere Zeichen hinweg sind ganz feine punktierte Linien gezogen, die man erst bei genauerer Besichtigung bemerkt, und die genau das ägyptische Zeichen ⧻ darstellen und zwar jetzt, ohne dass der bei den früheren Stücken vermisste mittlere Längsstrich fehlt; der fünfte Querstrich ist nur sehr schwach wahrnehmbar. Der Umstand, dass diese beiden Zeichen hier über einander angebracht sind, führte mich zuerst auf die Vermuthung, dass beiden dieselbe Bedeutung zukomme, was durch die vorstehende Betrachtung bestätigt wurde.

Auf der fünften Fläche des Würfels ist das Zeichen ⩚ = 50 deutlich eingegraben. Auf der gegenüberliegenden sechsten Fläche befinden sich vier Striche, die man als die Buchstaben NI lesen könnte, und die dann an das Wort Nivi auf dem Gewichte von Sermide (§ III) erinnern würden. Wahrscheinlicher stellen dieselben eine Ziffer dar; in der That ist eine gewisse Form des phönikischen Zahlzeichens für 20 von dem lateinischen Buchstaben N nicht zu unterscheiden (vergl. Tafel IX meiner früheren Arbeit). Es wäre also NI gleich 21.

Der Würfel wiegt 2790 gr, und es ist 2790 = 21.130,0. Die von uns bereits besprochene Einheit von ca. 130 gr ist also 21 mal in dem vorliegenden Gewichte enthalten; dieselbe Einheit, deren Zehntel in Aegypten zur Zeit der XII. und XVIII. Dynastie dem Goldgewichte zu Grunde lag und achtmal

genommen das Gewicht von Sermide (§ III) gab. Dieser Einheit von ca. 130 gr oder $^{10}/_{8}$ tvin begegnen wir auch sonst auf alten Gewichten. Im Museo civico zu Bologna befinden sich zwei runde steinerne Gewichte von flacher Gestalt, in der Mitte durchbohrt, von denen jedes mit drei Punkten deutlich markiert ist. Das eine wiegt 383 gr und ist stark abgenutzt, so dass man das ursprüngliche Gewicht zu 390 = 3.130 gr sicher wird annehmen können. An dem andern fehlt ein Stück; es wiegt nur 348 gr, wird aber ursprünglich auch 390 gr gewogen haben. Beide Stücke stammen aus der altetruskischen Ansiedelung der Via Sargozza in Bologna. Von demselben Fundorte rührt ein ähnliches Gewicht von gegenwärtig 500 gr her, das mit zwei Punkten markiert ist, ursprünglich also das Doppelte der doppelten Einheit von 130 gr dargestellt haben mag. Im Museo civico zu Modena, unter den Funden aus der Terramare von Gorzano, ist ein Gewicht aus Thon in Gestalt eines Cylinders mit kreisförmiger Basis, der in seiner Achse durchbohrt ist (Inv.-Nr. 99). Längs einer Seitenlinie des Cylindermantels ist das gut erhaltene Gewicht deutlich mit sechs Punkten markiert; es wiegt 800 gr = 6.133,3 gr. Ein Stein aus demselben Fundorte stellt genau das Gewicht von 132 gr dar, also das 10 fache des besprochenen ägyptischen Stückes. Dasselbe ursprüngliche Gewicht erkennen wir in einem kleinen Terracotta-Gegenstande von der Form eines Spinnwirtels, der gegenwärtig 126 gr wiegt und aus der Terramare von Gazzade stammt (Inv.-Nr. 52). Unter den Funden von Gorzano sehen wir noch einen kleinen Terracotta-Cylinder, der auf seinem Mantel durch drei parallele Ringe rundherum markiert ist (Inv.-Nr. 504). Das Gewicht desselben beträgt 40 gr = 3.13,33 gr. Der Hälfte von 130 gr, d. h. ca. 65 gr, begegnet man auf anderen etruskischen und faliskischen Gewichten, worauf wir aber jetzt nicht eingehen (vergl. unten § IX, Nr. 35, 36).

Die auf der fünften Fläche unseres Würfels befindliche Ziffer ⋀ = 50 (vergl. oben Nr. 7, p. 93) sagt aus, dass 21 Einheiten von je 130 gr zugleich 50 Einheiten von je 55,8 gr dar-

stellen. Diese letztere Einheit steht mit dem bekannten babylonischen Systeme in enger Beziehung, denn 561 gr wird als Normalgewicht für die leichte babylonisch-persische Silbermine königlicher Norm angenommen. In Aegypten ist die Hälfte dieser Einheit, das ist ein Gewicht von ca. 28 gr, durch drei Stücke vertreten, welche aus der Zeit der XII. bis XIII. Dynastie stammen; es sind die Nummern 19, 21, 23 in dem Verzeichnisse von Griffith (vergl. oben p. 76). Die Verbindung mit der phönikischen Mine wird dadurch hergestellt, dass 28 gr Gold dem Werte nach gleich 373 gr Silber waren, bei einem Verhältnis von Gold zu Silber wie $1:13^1/_3$.[1])

Wenig verschieden ist die Einheit von 56 gr ferner von dem äthiopischen Honiggewichte. Dasselbe beträgt nach Brugsch 170,5 gr, und $^1/_3$ davon ist gleich 56,85 gr: dieselbe Zahl, der wir soeben bei den Gewichten Nr. 27, 28 und 29 begegneten. Mit diesem Honiggewichte hängt ferner das ägyptische Goldgewicht der jüngeren Zeit zusammen, wie es durch die Münzen der Ptolemäer festgelegt ward.[2])

Auch in Italien scheint die Einheit von 56 oder 28 gr verbreitet gewesen zu sein; doch sind Gewichte mit entsprechender Bezeichnung nicht häufig. Im Museo civico zu Verona findet sich ein sehr gut erhaltenes Thongewicht von Gestalt einer abgestumpften Pyramide (versehen mit dem Fischgrätenmuster und deshalb schon oben erwähnt), welches mit drei neben einander stehenden Ziffern X (XXX) markiert ist; es wiegt 850 gr, enthält also in der That 30 Einheiten zu je 28,33 gr. Das Auftreten der etwas niedrigeren Einheit von 27,3 gr in Italien ist natürlich sehr häufig, denn dieses Gewicht entspricht der späteren römischen Unze. Um so wichtiger

---

[1]) Vergl. Hultsch, Metrologie, p. 417.

[2]) Vergl. Brugsch, Zeitschrift für ägyptische Sprache, Bd. XXVIII, p. 24 ff. Die Einheit von ca. 56 gr wird auch durch ein in der Donau bei Rustschuck gefundenes Gewicht mit der Aufschrift „legionis primae italic", 5658,05 gr schwer, repräsentirt (vergl. Hultsch a. a. O. p. 673). Ein hierher gehöriges Bronce-Gewicht von 560 gr hat Gamurrini veröffentlicht: Della libbra etrusca, Monumenti antichi vol. I, p. 61 ff.

wäre die Beantwortung der Frage, wann diese Gewichtseinheit zuerst in Italien erscheint, eine Frage, auf die wir jetzt nicht eingehen.

Der hier besprochene Würfel von Marzabotto giebt uns ein neues Beispiel dafür, dass auf demselben Stücke das Gewicht in verschiedenen Einheiten angegeben wird; vergl. dafür oben Nr. 5 und Nr. 24; ausserdem aber auch ein neues Beispiel für das gleichzeitige Auftreten von phönikischen bezw. altbabylonischen und etruskischen Ziffern (vergl. oben Nr. 2 u. 7).

Wir schliessen hieraus, dass nicht die Aegypter allein in jenen alten Zeiten den internationalen Handelsverkehr auf dem mittelländischen Meere vermittelten, sondern auch semitische Stämme[1]) von den Küsten Syriens oder Aegyptens, die unter ägyptischer Herrschaft standen und teilweise ägyptische Schrift sowie ägyptische Bezeichnung für ihre Gewichte angenommen hatten. Dadurch wird es erklärlich, dass sie die ägyptischen Zeichen nicht immer in genau demselben Sinne anwandten, wie die Aegypter selbst. Nur von den letzteren sind uns schriftliche Aufzeichnungen überliefert; auf sie mussten wir uns beziehen, um die Aufschrift der altitalischen Gewichte zu deuten. Diese Aufschriften gehören hiernach zu demselben Kreise von symbolischen Zeichen,[2]) Eigentumsmarken und Ziffern, von denen ich in Verbindung mit den Gewichten und mit dem Dodekaëder vom Monte Loffa gesprochen habe.

---

[1]) So hat auch das Wort „kid“ oder „kite“ (in dieser Form auch auf zwei Thon-Pyramiden des Museo civico zu Mantua vorkommend) nach Mittheilung des Herrn Collegen Hommel (Beilage zur „Allgemeinen Zeitung,“ 3. Juni 1896) seinen Ursprung in der Aussprache „kuddu“ des babylonischen Schriftzeichens für Shekel. Vielleicht hängt das Wort tvin auch mit dem altbabylonischen tu „Gewicht“ (das Lehmann erwähnt, Congrès a. a. O. p. 173) zusammen? Dadurch hätten wir eine direktere Anknüpfung an den asiatischen Orient.

[2]) Damals habe ich auch die Ornamentik der etruskischen Hausurnen als eine besondere Anwendung solcher symbolischen Zeichen aufgefasst, indem ich mich auf die Abbildung zweier solcher Urnen bei Virchow stützte. Hausurnen mit derartigen Zeichen scheinen indessen sehr selten zu sein; die von mir gesehenen zeigten (abgesehen von der einen im Vatikan befindlichen) keinerlei Ornamente.

§ VI. Einige andere Gewichts-Zeichen.

Schon oben wurde erwähnt, dass neben den Aichzeichen auch der Dreizack auf einigen Gewichten angebracht und etwa als Hoheitszeichen aufzufassen ist. Er findet sich auf einem Thongewichte des Museo civico zu Mantua (Nr. LV), indem dort die Mittelrippe des Fischgrätenmusters in einen Dreizack ausläuft, in gleicher Weise auf dem Bruchstücke eines anderen Gewichtes (Nr. LIV), ferner eingeritzt auf zwei Bruchstücken von Thongewichten im Museum zu Este, und auf dem oben besprochenen Gewichte Nr. 26.

Nr. 32. Im Museo civico zu Pesaro findet sich ein Terracottagewicht von der Gestalt der sogenannten Webstuhlgewichte (das ist der Gestalt des Gewichtes von Sermide), auf dessen beiden Seiten je eine menschliche Figur mit ausgebreiteten Armen durch eingeritzte Striche dargestellt ist. Auf der einen Seite ist neben dem Kopfe das Zeichen A angebracht, dessen Bedeutung uns aus den Untersuchungen über die Gewichte vom Monte Loffa bekannt ist,[1]) indem es die Ziffer 20 darstellt. Das Stück wiegt 380 gr; die Ecken und Kanten sind scheinbar durch den Gebrauch abgerundet; sonst ist es gut erhalten. Ursprünglich hat es demnach etwas mehr gewogen. Wir kommen damit wieder der phönikischen Mine königlicher erhöhter Norm, die in Marzabotto zahlreich vertreten war (vergl. oben § IV), sehr nahe. Besser als die frühere Einheit von 19.15 gr passt indessen hier die Einheit von ca. 19,5 gr, welche dem altägyptischen Gewichte des Turiner Museums zu Grunde liegt (vergl. § I), und der wir bei dem Gewichte Nr. 26 aus Este und den im Zusammenhange damit erwähnten Gewichten aus Abano, Redù und dem Weiersthale begegneten. Hierdurch wird es wahrscheinlich, dass das ursprüngliche Gewicht unseres Stückes auch ca. 394 = 20.19,7 gr betragen hat.

---

[1]) Vergl. § 10 meiner früheren Arbeit.

Nach den Bemerkungen Lehmanns[1]) dürfte die menschliche Figur mit wagerecht ausgebreiteten Armen als symbolische Darstellung der Waage und des Gleichgewichtes aufzufassen sein.

Nr. 33 u. 34. Eine menschliche Figur sehen wir noch auf zwei anderen Terracottagewichten gleicher Gestalt im Museum zu Pesaro dargestellt. Die Figur ist aber nicht nachträglich in den gebrannten Thon eingeritzt, sondern vor dem Brennen in flachem Relief roh herausgearbeitet. Der eine Arm hängt an der Seite des Körpers herab, der andere ist gekrümmt und das Ende desselben bis über den Kopf gehoben. Es entsteht so die Figur des hieroglyphischen Zeichens 𓀠, dem die Bedeutung von fa = Waage, Last zukommt,[2]) nur mit dem Unterschiede, dass die auf den beiden Gewichten angebrachte menschliche Gestalt aufrecht steht; doch hat nach Brugsch die aufrecht stehende Figur im Aegyptischen genau dieselbe Bedeutung,[3]) wie die hockende.

Beide Stücke sind gut erhalten; nur ist an jedem eine Ecke ausgebrochen. Jedes wiegt 465 gr, das ursprüngliche Gewicht wird etwa 492 gr betragen haben. Auf jedem ist neben der menschlichen Gestalt ein Punkt (ebenfalls in Relief) angebracht, so dass das Gewicht von ca. 492 gr als Einheit selbst zu betrachten ist. Dasselbe stellt eine leichte babylonische Mine gemeiner Norm dar, eigentlich 491 bis 493 gr. Wir kommen sonach wieder auf diejenige Einheit, deren Hundertfaches durch das schuhförmige Stück aus dem fränkischen Jura dargestellt wird (vergl. oben § II).

Nr. 35 u. 36. Eine vierte derartige menschliche Gestalt findet sich auch auf einem gleichgeformten Terracottagewichte aus Saggio in Piano, gegenwärtig im Museo civico

[1]) Metrologische Studien im British Museum; Verhandlungen der anthropologischen Gesellschaft zu Berlin, Juni 1891.

[2]) Vergl. Erman, Grammatik, p. 105; Brugsch, Wörterbuch, p. 534 ff.

[3]) Vergl. Brugsch, Grammatik, p. 119, Nr. 8 u. 35.

zu Modena (Inv.-Nr. 1064). Die Gestalt tritt wieder in niedrigem Relief hervor, die Arme sind wagerecht ausgebreitet. Das Gewicht beträgt 426 gr. Aus demselben Fundorte stammt ein ähnliches Stück (Inv.-Nr. 1065) mit einem Gewichte von 445 gr; dasselbe ist auf zwei Seitenflächen mit dem Zeichen Λ markiert. Es ist gut erhalten, während von dem zuerst erwähnten Stücke eine Ecke fehlt; beide haben offenbar ursprünglich gleichviel gewogen. Dieses Gewicht von ca. 455 gr scheint mir mit dem ägyptischen Hohlmaasse Hin, das 0,456 Liter fasste, und mit dem griechischen Hohlmaase Chus, das 4,55 Liter fasste, zusammen zu hängen; darauf komme ich später zurück.

Nr. 37 u. 38. Im Museo Nazionale zu Este befinden sich zwei Terracottagewichte, auf deren einer Seitenfläche ein Haus andeutungsweise dargestellt ist,[1]) d. i. ein Trapez oder Quadrat mit einem Dache darüber. Auch diese Darstellung erinnert an ägyptischen Gebrauch. Das Gewicht Nr. 6 der Liste von Griffith (a. a. O.) trägt die Bezeichnung „kite 5 aus dem Silberhause von Heliopolis“; eine ähnliche Aufschrift trägt das Gewicht Nr. 7, und in abgekürzter Form finden wir dieselbe auf dem Gewichte Nr. 8 jener Liste. Auf diesem (von Flinders Petrie in Defenneh gefunden, wahrscheinlich der XXVI. Dynastie angehörig) lautet die Aufschrift ; es ist also neben der eigentlichen Gewichtsbezeichnung nur noch das Determinativ für Haus angebracht, womit offenbar angedeutet sein soll, dass das Gewicht im Palaste des Königs angefertigt wurde. Eine ähnliche Bedeutung werden wir auch der Darstellung des Hauses auf unseren Gewichten Nr. 37 und 38 beilegen.

Ersteres trägt unter dem Hause einen achtstrahligen Stern, bestehend aus vier sich in einem Punkte kreuzenden Linien;

[1]) Eine Abbildung des Gewichtes Nr. 37 giebt Pauli a. a. O. p. 43, Tafel IV. Er spricht von drei solchen Thonpyramiden (nach Ghiradini), die sich im Museum zu Este befinden.

auf letzterem ist unterhalb des Hauses das oben besprochene Fischgrätenmuster (als Aichzeichen) angebracht. Ersteres wiegt 790 gr, letzteres 755 gr. Beide sind ziemlich gut erhalten. Die auf beiden unterhalb der erwähnten Zeichen angebrachte Inschrift ist wegen Abnutzung nicht zu lesen. Das ursprüngliche Gewicht beider Stücke wird 800 gr betragen haben, d. h. das sechzigfache der Einheit von ca. 13,2 gr, die schon wiederholt besprochen wurde (vergl. oben § V Nr. 31). Wir haben schon damals ein mit sechs Punkten markiertes Gewicht aus Gorzano erwähnt, das denselben Betrag von 800 gr darstellt. Auch im Museum zu Este befinden sich noch mehrere Terracotta-Gewichte von ungefähr gleicher Schwere.

Eine andere, aber weniger wahrscheinliche Deutung für die Darstellung des Hauses auf den Gewichten könnte man darin suchen, dass die Silbe âm ( ) auch zur Bezeichnung der königlichen Wohnung gebraucht wurde,[1]) und dass in Folge dessen das Zeichen des Hauses irrtümlicherweise für das oben besprochene Zeichen angebracht wurde. Oder man könnte in gleichem Sinne daran denken, dass das Haus zur Darstellung der Silbe mer (oder meran, vergl. oben p. 91 f.) dienen soll, denn diese Silbe (ägyptisch) hat auch die Bedeutung von Bauwerk, Haus.[2])

Nr. 39. Endlich sei des Zeichens Erwähnung gethan, das auf einem stark verletzten Terracotta-Gewichte des Museums von Este vorkommt, und zwar verbunden mit dem als Aichmarke gedeuteten Zeichen des Kreuzes, indem ein Arm des letzteren deutlich in die Gabel des Zeichens ausläuft. Dieses steht zur Abkürzung für das Wort (set'eb), welchem

---

[1]) Vergl. Brugsch, Wörterbuch, Supplement p. 65. Auch der Silbe ma kommt im Demotischen (aus hieroglyphisch) die Bedeutung „Stätte, Wohnung" zu; vergl. ib. p. 599.

[2]) Vergl. Brugsch, Wörterbuch, p. 671.

die Bedeutung „Gerät, instrumentum, vasa“ zukommt.[1]) Besser würde das ähnlich lautende Wort [hieroglyphs] (setep) mit der Bedeutung „auswählen“ passen, indem dadurch wieder die Richtigkeit des Gewichtes bezeugt würde.

Auch bei dieser Erörterung sind bekannte ägyptische Verhältnisse zur Erklärung beigezogen, ohne dass damit der rein ägyptische Ursprung der betreffenden Zeichen behauptet werden soll. Insbesondere kommt es auch bei babylonischen Gewichten vor, dass in der Aufschrift des Gewichtes der Palast des Königs erwähnt wird. So geschieht es auf einem von Lehmann[2]) behandelten altbabylonischen Gewichte mit der Aufschrift „1/3 Shekel Palast des Nabu-Sum-esir, Sohnes des Darlat, des fürstlichen Priesters des Marduk“, ferner auf mehreren der von Brandis[3]) besprochenen assyrischen Gewichte der Könige Tiglatpilesar und Salmanassar. Auf einigen dieser letzteren Gewichte ist auch das Zeichen des Kreuzes angebracht, vielleicht ebenfalls als Aichzeichen.

§ VII. Die Verbreitung der besprochenen Gewichts-Einheiten. A) Die Einheit von 98,5 bezw. 49,25 und 19,7 gr.

Wir haben nur solche Gewichte behandelt, die durch eine Aufschrift, insbesondere durch Ziffern zu bestimmten Einheiten in Beziehung gesetzt sind. Wir haben dabei Stücke aus Aegypten, Oberitalien und aus dem fränkischen Jura in Betracht gezogen und nachgewiesen, dass überall die gleichen Einheiten benutzt wurden. Nachdem die Grösse der letzteren festgestellt ist, kann auch die grosse Zahl nicht bezeichneter prähistorischer Gewichtsstücke berücksichtigt

1) Brugsch, Grammatik, p. 131, Nr. 435 u. Wörterbuch, p. 1357.

2) Congrès international des orientalists a. a. O.

3) Das Münz-, Maass- und Gewichtswesen in Vorderasien. Berlin 1866. p. 46 ff.; vergl. ferner Ledrain, Revue égyptologique 2ième année, 1881. p. 173 f.

werden, und kann man versuchen, dieselben nach Vielfachen der erkannten Einheiten zu ordnen. Die Lösung dieser Aufgabe ist natürlich nicht immer eindeutig bestimmt, indem einzelne Gewichte mit gleichem Rechte auf verschiedene Einheiten bezogen werden können. Immerhin werden die folgenden Tabellen eine ungefähre Vorstellung über die örtliche und zeitliche Verbreitung der betreffenden Gewichtsnormen geben.

Dabei führe ich nur solche Stücke auf, die von mir gewogen wurden, schon deshalb, weil die Gegenstände, um die es sich hier handelt, bisher meist nicht als Gewichte betrachtet sind. Nur im Museo civico zu Modena hatte Herr Crespellani Cav. Arsenio einen Teil der betreffenden Stücke (insbesondere die ringförmigen Steine) als Gewichte erkannt und deren Schwere bestimmt; auch in Este (wo ich mich der Unterstützung des Herrn Direktor Prosdocini und des Assistenten Herrn Alfonso zu erfreuen hatte) wurden mir die fraglichen Terracotta-Pyramiden teilweise als Gewichte bezeichnet.

Wenn in der folgenden Tabelle Terracotta-Pyramiden erwähnt werden, so sind immer abgestumpfte Pyramiden von der Form gemeint, wie sie bei dem Gewichte von Sermide vorkam (vergl. § III); dieselben sind alle nahe dem oberen Rande durchbohrt, und deshalb wurden sie als Webstuhl-Gewichte angesehen; man nahm eben an, dass das Loch zum Durchziehen eines Fadens gedient habe. In dem Falle müssten am Rande des Loches deutliche Spuren der Abnutzung durch den Faden bemerkbar sein, während nach meiner Beobachtung bei der grossen Mehrzahl dieser Gewichte die betreffenden Ränder vollkommen unversehrt erscheinen. Der Zweck der Durchbohrung muss also ein anderer gewesen sein; ich möchte annehmen, dass durch das Loch ein kleiner (die Schwere des Gewichtes kaum beeinflussender) Holzstab gesteckt war, um eine bequeme Handhabe zu bieten.

Auch steinerne Gewichte sind öfter von ähnlicher Form; dieselbe nähert sich manchmal der Gestalt eines runden Kegels mit abgerundeter Spitze; auch bei roher gearbeiteten (oft

scheinbar nur an der Luft getrockneten) Thongewichten kommt diese Form vor. Auch dann ist das Gewicht nahe der Spitze durchbohrt.

Die ringförmigen Gewichte sind teilweise aus Thon, teilweise aus Stein; sie sind ausserordentlich häufig in der Periode der Terramaren und der Pfahlbauten. Die Thonringe sind bisher meist als Untersätze für unten spitz zulaufende Gefässe aufgefasst und mögen auch gelegentlich diesem Zwecke gedient haben. Die steinernen Gewichte sind im folgenden auch dann als Ringe aufgeführt, wenn sie die Gestalt einer fast eckigen, in der Mitte durchbohrten Platte annehmen. Zu den ringförmigen Gewichten müssen auch manche Stücke gezählt werden, die man bisher als Keulenköpfe bezeichnete.

Endlich sind die sogenannten Reib- und Mahlsteine zu erwähnen. Besonders in den Museen von Schwerin und Königsberg (wo mir bezw. die Herren Dr. Beltz und Professor Jentsch freundlichst behilflich waren) fiel mir auf, dass viele dieser Steine dieselbe Gestalt haben, wie manche der von Flinders Petrie in Aegypten so zahlreich ausgegrabenen und veröffentlichten Gewichte. Die betreffende Form entsteht, wenn man von einem Doppelkegel die beiden Spitzen durch zwei der Basis parallele Ebenen abschneidet.

Die Ausdehnung der Untersuchung auf diese nordischen Sammlungen lässt erkennen, wie Ober-Italien zur Stein- und Bronzezeit den Verkehr zwischen dem Oriente und den baltischen Gebieten vermittelte, wobei dem Bernsteinhandel eine nicht unwesentliche Rolle zukam; eine Vermittlung, die sich bis in die jüngere Bronzezeit und die Hallstatt-Periode durch die Verbreitung der Haus- und Gesichtsurnen verfolgen lässt (vergl. p. 686 und 719 meiner früheren Arbeit). Die von uns in § I und II besprochenen (in der nachfolgenden Tabelle unter Nr. 27 und 38 aufgeführten) Stücke geben einen wichtigen Fingerzeig für die Richtung solcher Handelsverbindungen.

In den Tabellen beschränke ich mich auf eine Auswahl von Stücken, die mir charakteristisch zu sein scheinen.

Nr.	Inv.-Nr.	Fundort	Material	Gestalt
1	17877	Montecchio il Monte, Prv. Reggio	Stein	abgerundete Pyramide[1]
2	33353	Gorzano, Modena	„	Mahlstein
3	48810	Villa di Cappella, Ceresara, Prov. Mantova	Thon	Ring
4	48818	„	Stein	Kegel abgerundet
5	46199	„	„	„
6	46195	„	Thon	Sphäroid durchbohrt
7	17610	Rigarello, Castellazzo, Mantova	„	Ring
8	16913	Möringen, Schweiz	„	wie Nr. 4
9	16999	Schweiz	Stein	Doppelkegel
10	—	Via Sargozza, Bologna	„	Ring
11	—	„	„	„
12	—	„	„	„
13	8	Gavello	Thon	Pyramide abgestumpft
14	—	Vetulonia Cità	Stein	„
15	—	Luna bei Carrara	Thon	„
16	—	„	„	„
17	—	Telamon	„	„
18	—	„	„	„
19	225	Casinalbo, Terramare	„	Ring
20	—	—	„	abgest. Pyramide
21	—	—	„	„
22	1890. 54	Nürnberger Reichsforst	Stein	Ring
23	St. 24	PfahlbauGoldberg,Mecklb.	„	Reibstein
24	4863	„ Wismar	„	Ellipsoid
25	26099	Olanda, Ungarn	Thon	—
26	—	Luna b. Carrara	Stein	—
27	2006[a]	Püttlachthal	„	—
28	3445	Presen bei Brön, Mecklb.	„	Ellipsoid
29	E. M. 936	Roseninsel, Würmsee	„	Reibstein
30	E. M. 500	NeuenburgerSee,Estavayer	„	Ring
31	E. M. 496	„	„	„
32	E. M. 494	„	„	„

[1]) Aehnlich wie bei den Gewichten von Monte Loffa, aber plumper. Die Gestalt dieser letzteren (im Museo civico in Verona befindlichen) Gewichte könnte am ehesten mit der Thüre eines gewölbten Thorbogens verglichen werden; das in § I besprochene Gewicht steht diesen der Gestalt nach sehr nahe, ist nur oben spitzer, und unregelmässiger ge-

Gewicht	Museum	Bemerkungen	Ursprüngl. Gewicht
970	preistorico Rom	abgestossen; Terramare	985,0
450	"	stark abgenutzt; "	492,5
450	"	verletzt; aus Terramare	492,5
480	"	ausgezeichnet erhalten; desgl.	492,5
442	"	verwittert; Terramare	492,5
470	"	abgestossen; "	492,5
460	"	" "	492,5
452	"	abgenutzt	492,5
870	"	gut erhalten; 9.98,2 =	883,8
460	Bologna	aus Wohnplätzen	492,5
480	"	"	492,5
450	"	" Ein Stück fehlt	492,5
985	Modena	sehr gut erhalten; Zeichen XX	985,0
453	Florenz	stark abgenutzt; etruskisch	492,5
490	"	gut erhalten; "	492,5
490	"	" "	492,5
865	"	unten abgestossen; vergl. Nr. 9, etruskisch	883,8
470	"	abgestossen; etruskisch	492,5
940	Modena	" ;	985,0
465	Pesaro	Vergl. oben § VI, Nr. 33	492,5
465	"	" " Nr. 34	492,5
480	München	Durchbohrung nicht vollständig	492,5
980	Schwerin	Steinzeit	985,0
480	"	Glatt poliert; etw. abgestossen	492,5
465	Rom	—	492,5
96	Florenz	—	98,5
98,3	München	Vergl. oben § I, Nr. 1	98,5
865	Schwerin	gut erhalten; vergl. Nr. 17	883,8
490	München	—	492,5
47	"	1/10 leichte Mine gem. Norm	49,25
46	"	"	49,25
50	"	"	49,25

arbeitet. Im genannten Museum befinden sich ausser den von de Stefano; Pauli und mir behandelten Gewichten noch weitere von derselben Fundstelle (noch andere sind in Rom), theilweise ebenfalls mit Ziffern, auf die ich bei anderer Gelegenheit zurückkomme; vergl. unten § VIII, p. 121.

Nr.	Inv.-Nr.	Fundort	Material	Gestalt
33	E. M. 961	Roseninsel, Würm-See[1])	Thon	Pyramide
34	E. M. 960	„	„	„
35	E. M. 944	„	„	Ring
36	96. 297	„	Stein	Reibstein
37	94. 57	Im Main b. Landenbach	Thon	Ring
38	4618[2]	Weidmannsgesees, Franken	Stein	Schuh
39	—	Wallgraben, Mecklb.	Thon	Spinnwirtel
40	—	Druglin-See bei Arys in Ostpreussen	„	Ring
41	2230	Sorgenau, Ostpreussen	Stein	Keulenkopf
42	2232	—	Granit	—
43	20785	Hissarlik	Thon	Pyramide
44	20780	„	„	Cylinder durchbohrt
45	22286	Gupra marittima, Prov. Ascoli-Piceno, contrada Monti	Thon	„
46	22303		„	„
47	22082	Belvedere; Corropuli; Abruzzo Ulteriore	„	„
48	22083		„	„
49	3398	Ungarn	„	Pyramide
50	—	„	„	„
51	—	Tiber und Gegend des Palatin	„	„
52	—	Abano	Bronze	Astragalus
53	2037	Weiersthal (Franken)	Knochen[4])	„
54	—	—	„	Pyramide
55	—	Monte Guragazza am Reno[5])	„	„
56	—		„	„
57	—		„	„
58	—	—	Thon	„
59	18958	Gardasee	Stein	Reibstein
60	17868	Gorzano, Modena	Thon	Kegel

[1]) Die Stücke Nr. 33 und 34 sind abgebildet bei von Schab: Die Pfahlbauten im Würmsee, Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns, Bd. I, 1877, p. 23 und 46; bezeichnet als Senk-Gewichte.

[2]) Hier und im Folgenden: Provinzial-Museum der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft.

[3]) Auf dem Speicher dieses Museums befindet sich eine grosse Anzahl von Gewichten der bekannten pyramidalen Form, die wahrscheinlich aus den vorrömischen Ansiedelungen am Palatin stammen. So wurde mir durch Herrn Dr. Mariani mitgeteilt, der mich auf Grund der gütigen

Gewicht	Museum	Bemerkungen	Ursprüngl. Gewicht
91	München	gut erhalten } beide mit X	98,50
77	"	verletzt } markiert	98,50
190	"	— 4.49,25	197,00
440	"	abgeschliffen	492,50
140	"	— 3.49,25	147,75
4715	"	Vergl. § II, Nr. 2	4925,00
140	Schwerin	Einzelfund 3.49,25	147,75
291	Königsberg in Pr.[2])	von einer Feuerstein-Werkstätte gut erhalten 6.49,25	295,50
291,3	"	" "	295,50
435	"	verwittert 9.49,25	443,25
170	Rom preistorico	stark abgenutzt; 4. archäologische Schicht 1/5.985,00	197,00
180	"	3. Schicht; abgestossen	197,00
165	"	aus einem Grabe der ersten Eisenzeit	197,00
190	"	ebenso. Schiefe Durchbohrung	197,00
165	"	erste Eisenzeit. Abgestossen	197,00
190	"	weniger verletzt	197,00
165	"	verletzt	197,00
150	"	abgenutzt	197,00
180—185	delle Terme Rom[3])	—	197,00
19,5	Padua	Vergl. oben p. 98	19,7
162	München	" " " 98	197,0
380	Pesaro	" " § VI, Nr. 32; 20.19,7	394,00
490	Bologna	—	492,5
465	"	—	492,5
480	"	—	492,5
900	Este	etwas verletzt, mit dem Fischgrätenmuster (p. 99) und 5 Strichen markiert, von Ghiradini publiciert 5.197 =	985,0
755	Rom preist.	Pfahlbau 4.197 =	788
750	"	Terramare	788

Empfehlung des Herrn Commodore Barnabei bei meinen Arbeiten im Museo delle Terme und im faliskischen Museum der Villa di Papa Giulio freundlichst unterstützte.

[4]) Im Inventar als Wirbel vom Rind bezeichnet.

[5]) Diese Stücke wurden in einem etruskischen Tempel zusammen gefunden, daneben Reste von Getreide (was an die Fundumstände bei den Gewichten vom Monte Loffa erinnert, vergl. p. 632 und 661 f. meiner früheren Arbeit); auch eine grössere Zahl kleiner Doppelkegel aus Terracotta, im Gewichte von 50, 55, 60, 65, 70, 80, 85 gr.

Nr.	Inv.-Nr.	Fundort	Material	Gestalt
61	—	—	Thon	Pyramide
62	—	—	„	„
63	—	—	„	„
64	Schrank XX Tomba 10 Nr. 16 rot 74 schwarz 27	—	„	„
65	Schrank XX	—	„	„
66	„	—	„	„
67	—	—	„	„
68	—	—	„	„
69	978	—	„	„
70	90	Redù Terramare	„	„
71	21287	Servirola di Sampolo Wohnplatz	Stein	Ellipsoid
72	—	Marzabotto	„	—

Endlich gehört hierzu eine grosse Anzahl kleiner Stücke im Gewichte von ca. 20 gr, 40 gr, 60 gr etc., d. h. von Vielfachen der Zahl 19.7, die ich sowohl im Museo preistorico in Rom als im Museo etrusco in Florenz und in der prähistorischen Sammlung des Staates in München gefunden habe, und die meist eine flache ringförmige oder eine spinnwirtelartige Gestalt haben.

Die Norm von ca. 390,0 gr scheint auch noch für die ältesten Kupferbarren massgebend gewesen zu sein; so wiegt der in Pesaro befindliche As 390,3 gr.[1])

Wie Lehmann bemerkt,[2]) wird die Einheit von ca. 49,0 gr auch durch ein in Helgoland gefundenes goldenes Armband repräsentirt, das aus dem frühesten Mittelalter stammt und so eine Verbindung zwischen den prähistorischen, bezw. antiken und den modernen Gewichtseinheiten darstellt.

[1]) Vergl. Hultsch, Metrologie, p. 259, Anmkg.

[2]) Verhandlungen der Berliner anthropologischen Gesellschaft. Januar 1893.

Gewicht	Museum	Bemerkungen	Ursprüngl. Gewicht
1020	Este	ebenso; 6 Striche 6.197 = stärker verletzt	1182
860	„	noch stärker verletzt. 6 Striche	1182
830	„	sehr stark verletzt. 5 Striche	985
340	Papa Giulio Rom	aus demselben Grabe ein Crater a colonnette; demnach aus dem fünften Jahrhundert v. Chr. 2.197 =	391
350	„	abgerundet	394
1180	„	- 6.197 =	1182
490	Adria [1])	vergl. p. 84	492,5
475	„	roh gearbeitet	492,5
770	Este	vergl. § V Nr. 26; 4.197 =	788
770	Modena	„ oben p. 98	788
775	Rom	Aequator und Meridian tief eingekerbt	788
1435	Marzabotto	vergl. oben p. 83 f. 30.49,25	1477,50

§ VIII. Fortsetzung. B) Die Einheit des tvin-Gewichtes.

Die Gewichts-Einheit, welche wir auf Grund der Fundstücke von Sermide und Marzabotto als tvin bezeichnet hatten, betrug mindestens 104 gr (§ III), war aber wahrscheinlich höher anzusetzen und wurde später von uns zu 106,38 angenommen (§ IV). Wir fassten sie auf als das achtfache der altägyptischen Einheit von 12,77 bis 13,35 gr; dadurch würden wir eigentlich zu einem tvin-Gewichte von 102,16 bis 106,80 geführt werden. Berücksichtigt man, dass das Gewicht des Königs Chufu (IV. Dynastie) jedenfalls durch Abnutzung gelitten hat, so würde sich für das tvin ein noch höherer Wert ergeben.

---

[1]) Das vielfache Auftreten der Stücke im Gewichte von ca. 490 gr aus den oberitalienischen Fundstellen macht es verständlich, dass diese leichte babylonische Mine gemeiner Norm im Altertume als *Ἰταλικὴ μνᾶ* oder *μνᾶ κατὰ τὴν Ἰταλικὴν χρῆσιν* bezeichnet wurde (vergl. Hultsch a. a. O., p. 673), wofür bisher eine befriedigende Erklärung fehlte.

In den folgenden Tabellen ist ein tvin zu 106,6 gr angenommen, und dementsprechend ist in der letzten Columne das „ursprüngliche Gewicht" jedes Stückes berechnet. Der niedrigste Wert von 104 gr für das tvin ist von der Einheit zu 101 gr (gleich $^1/_5$ der leichten babylonisch-persischen Mine königlicher Norm), auf welche ich bei der Untersuchung über die Gewichte vom Monte Loffa geführt wurde, so wenig ver-

Nr.	Inv.-Nr.	Fundort	Material	Gestalt
1	18955	Phahlbau Gardasee	Thon	Ring
2	55948	Necropoli del Castellazzo di Paroletta, Fontanellato, Parma	—	cylindrisch
3	55946		—	ellipsoidisch
4	48862	Castelnovo Rangoni, Modena Montale	—	wie Nr. 2
5	41284	Borgo S. Donnino, Castione dei Marchesi, Parma	Thon	Ring
6	17859		"	"
7	41353	Busseto, Parma	"	Kegel
8	17873	Maranello, Gorzano Modena	"	Cylinder
9	41352	Busseto, Parma	—	Cylinder durchbohrt
10	18108	Montata di San Pellegrino, Reggio, Emilia	—	Ring
11	18110	wie Nr. 4	—	"
12	17855	Campeggine il Grumo, Reggio Emilia	Stein	niedriger Cylinder
13	33281	wie Nr. 4	"	cylindrisch
14	17857	wie Nr. 8	"	ellipsoidisch
15	17858	Montecchio il Monte Reggio	"	Mahlstein
16	48817	Villa di Capella Ceresara, Prov. Mantova	"	"
17	46200		"	Reibstein
18	46191		Thon	Ring
19	54120	Terramare Ognissanti S. Giacomo, Cremona	Stein	wie Nr. 14
20	49459	Palafitta dei Lagass, Vhò, Cremona	"	Ring
21	42620	Aus einem Grabe Nr. I, Torre del Modillo (Eisen-Zeit)	Thon	Pyramide
22	"		"	"
23	"		"	"
24	33200	Laposhalom bei Pest	"	"
25	54774	"	"	"
26	54777	"	"	"

schieden, dass man viele der im Folgenden aufgeführten Gewichte, die alle mehr oder weniger verletzt sind, auch als vielfache von 101 gr wird darstellen können. Da aber die höhere Einheit von 104 bis 107 gr entschieden überwiegt, so bin ich geneigt umgekehrt die Gewichte vom Monte Loffa auf diese höhere Einheit zu beziehen (vergl. Nr. 62 und Nr. 79 der folgenden Tabelle, sowie den Nachtrag am Schlusse dieser Abhandlung).

Gewicht	Museum	Bemerkungen	Ursprüngl. Gewicht
525	preistorico Rom	gut erhalten; 5 tvin	533
515	"	—	533
202	"	abgestossen; 2 tvin	213,2
500	"	Nr. 4 bis 19 aus Terramaren	533
525	"	nicht gebrannt	533
400	"	ein Stück abgebrochen	426,4
820	"	gut erhalten; 8 tvin	852,8
830	"	Kante abgestossen	852,8
1000	"	wenig abgenützt; Stück abgestossen	1066
1530	"	stark verletzt; Zeichen X; 20 tvin	2132
800	"	abgenutzt	852,8
600	"	abgestossen; Einkerbung rings um den Mantel des Cylinders	639,6
595	"	—	639,6
500	"	gut; der Aequator des eiförmigen Steines durch Einkerbung markirt	533
500	"	—	533
400	"	abgestossen	426,4
500	"	—	533
630	"	mit 3 Strichen markirt; 6 tvin	639,6
400	"	gut; vergl. Nr. 14	426,4
400	"	mit 2 Strichen markirt; 4 tvin = 2 etrusk. Pfund	426,4
98	"	wenig abgestossen	106,6
100	"	gut; abgerundet	106,6
135	"	$1^1/_3$ tvin	142,15
600	"	gut	639,6
260	"	$2^1/_2$ tvin	266,5
250	"	$2^1/_2$ tvin	266,5

Nr.	Inv.-Nr.	Fundort	Material	Gestalt
27	54776	Laposhalom bei Pest	Thon	Pyramide
28	54779	„	„	„
29	54780	„	„	„
30	16939	Möringen, Schweiz	„	„
31	16995	Schaffhausen, Schweiz	„	Ring
32	16996	Schweiz	„	Pyramide
33	Schrank XX	(faliskisch)	„	„
34	„	„	„	„
35	„	„	„	„
36	N. 8. 1894	Vano	Stein	oval
37	—	Luna, vergl. § VII, 15	„	rund
38	—	„	„	Mahlstein
39	—	„	Blei	Pyramide
40	—	„	Thon	„
41	—	„	Blei	Muschel
42	—	Bisentia	Thon	Pyramide
43	—	„	„	„
44	—	Telamon[1]	„	„
45	—	„	„	„
46	—	Via Sargozza, vgl. § VII, 10	—	Ring
47	—	„	—	„
48	—	Monte Guragazza	Thon	„
49	—	„	„	„
50	—	„	„	„
51	M. C. T. N. 15	aus einem Pfahlbau in der Schweiz	„	„
52			Stein	„
53	—	Sermide	Thon	Pyramide
54	—	Marzabotto	Stein	—
55	1890. 20	bei Lindau (?)	Thon	Kegel
56	E. M. 945	Roseninsel, § VII, 33	„	Ring
57	E. M. 942	„	„	„
58	E. M. 944	„	„	„
59	E. M. 929	„	Stein	Reibstein
60	E. M. 390	„	„	Quetschstein
61	96. 807	„	Thon	Ring
62	E. M. 425	Robenhausen (Schweiz)	„	Kegel
63	—	Kannensberg (Mecklenburg)	Stein	Ellipsoid

[1]) Hier wurden in einem Tempel eine sehr grosse Anzahl solcher

Gewicht	Museum	Bemerkungen	Ursprüngl. Gewicht
210	preistorico Rom	—	213,2
1210	"	stark abgenutzt	1279,2
1550	"	verletzt	1599,0
1310	"	Gestalt wie bei den Gewichten vom Monte Loffa, doch andere Durchbohrung	1385,8
250	"	2½ tvin	266,5
252	"	gut	266,5
300	Papa Giulio, Rom	wenig abgestossen	319,8
400	"	"	426,4
1180	"	abgenutzt	1279,2
1020	Florenz	etruskisch	1066
1080	"	gut	1066
1535	"	gut; es fehlt der Griff	1599
620	"	das Stück trägt die deutliche Inschrift „clo. firmi," davor ein nicht erkennbares Zeichen, vielleicht Ziffer	639,6
620	"	wenig abgestossen	639,6
210	"	—	213,2
300	"	—	319,8
190	"	—	213,2
420	"	auf der oberen Fläche der Buchstabe A; sehr gut erhalten	426,4
625	"	—	639,6
635	Bologna	gut erhalten	639,6
620	"	—	639,6
590	"	abgestossen, vergl. § VII, Nr. 55, 56, 57	639,6
590	"	"	639,6
570	"	"	639,6
490	Turin	abgestossen	533
420	"	—	426,4
930	Mantua	Vergl. oben § III u. d. Nachtrag	959,4
37800	Marzabotto	" " § IV, Nr. 4	38300
1070	München	stark verletzt	1279,2
106	"	gut erhalten	106,6
190	"	etwas verletzt	213,2
190	"	" vergl. § VII, 35	213,2
625	"	abgestossen	639,6
512	"	abgeschliffen	533
185	"	verletzt	213,2
1080	"	gut erhalten; 10 tvin	1066
2485	Schwerin	aus einem Hügelgrabe der älteren Bronzezeit; 24 tvin	2558,4

Gewichte gefunden, von denen noch mehrere sich annähernd als Vielfache von ca. 106 gr darstellen.

Nr.	Inv.-Nr.	Fundort	Material	Gestalt
64	—	Friedrichsruhe (Mecklenburg)	Stein	Ellipsoid
65	3390	Boddin (Mecklenburg)	„	Pyramide
66	3115	Goritz „	„	Ring
67	—	Neukalen „	„	Kugel
68	4035	„ „	„	Keulenkopf
69	4869	Wismar Pfahlbau	„	Mahlstein
70	4862	„ „	„	Sphäroid
71	4775	Gägelow Pfahlbau, Mecklb.	„	Mahlstein
72	3228	Schwaan „	„	„
73	L. II. H. 11	Gressow „	„	Cylinder
74	—	Genzkow, Kegelgrab, „	„	—
75	3958	—	Thon	Ring [1])
76	2229	—	„	„
77	3959	Mirchau, Westpreussen	„	„
78	—	Rossitten. Kurische Nehrung [2])	„	„
79	—		„	„
80	—	—	„	Keulenkopf
81	4506	Germau, Kreis Fischhausen	Stein	„
82	—	—	Thon	Ring
83	—	—	„	„
84	—	—	„	Pyramide
85	—	—	„	„
86	—	Stazione Ferrovia di Este	„	„
87	—	—	„	„
88	—	—	„	„

[1]) Die beiden Ringe Nr. 75 und 77 zeigen einen deutlichen Absatz in ihrem Querschnitte. Weniger deutlich ist dieser ringförmige Absatz bei den weiteren hier erwähnten Gewichten aus dem Königsberger Provinzial-Museum. Es erinnert dies an die althergebrachte Bezeichnung von Gewichten durch Ringe, vergl. oben p. 76 f. Stufenförmige Absätze kommen auch bei den ältesten Bronzegewichten aus Olympia vor, sind aber dort, entsprechend der Gestalt der betr. Stücke, nicht ringförmig. Auch manche Ringscheiben aus den Pfahlbauten der Roseninsel und den Höhlen Frankens sind mit Ringen markirt.

Gewicht	Museum	Bemerkungen	Ursprüngl. Gewicht
2255	Schwerin	desgleichen und zwar aus Grab Nr. 4, benachbart zu Kannesberg; stark verwittert	2558,4
820	„	abgestossen	852,8
100	„	—	106,6
100	„	—	106,6
425	„	sehr gut erhalten	426,4
1030	„	—	1066
1280	„	—	1279,2
825	„	—	852,8
1030	„	—	1066
1365	„	abgeschliffen	1385,8
210	„	versteinerter Schwamm	213,2
516	Königsberg	wenig verletzt	533
314	„	gut erhalten	319,8
546	„	sehr gut erhalten; die Einheit ist hier ca. 109 gr, vgl. Nachtrag	533
605	„	verletzt	639,6
330	„	es fehlt etwas weniger als die Hälfte	639,6
206	„	—	213,2
225,5	„	2½ tvin	266,5
520	Adria	gut	533,0
520	„	—	533,0
520	„	—	533,0
515	„	abgestossen	533,0
1535	Este	gefunden in Wohnplätzen der Steinzeit; verhältnissmässig gut erhalten	1599
218	„	sehr gut; vgl. oben p. 102, Nr. 29	213,2
200	„	vgl. Nachtrag u. „ „ 102, „ 27	213,2

[1]) Die Kurische Nehrung ist besonders reich an Funden der Steinzeit aus Wohnplätzen und Gräbern. Die zahlreichen Bernstein-Artefacte der Steinzeit, die dort gefunden wurden, weisen darauf hin, dass dies mit dem schon damals blühenden Bernsteinhandel zusammenhing, vergl. Schieferdecker, Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i/Pr., Band XIV, 1873 und Klebs, Der Bernsteinschmuck der Steinzeit, Beiträge zur Naturkunde Preussens, Bd. 5, Königsberg 1882. Tischler, ib. Bd. XVIII, 1877, XXIII und XXIV.

Die Tabelle zeigt, dass dem tvin-Gewichte eine ebenso ausgedehnte Verbreitung in der Stein- und Bronzezeit zukam, wie der babylonischen Mine gemeiner Norm und den aus ihr abgeleiteten Teilgewichten. Für Italien wird das tvin-Gewicht auch deshalb von besonderer Bedeutung gewesen sein, weil sein dreifaches (wenn man von 109 gr als Einheit ausgeht) ungefähr das spätere römische Pfund, sein zweifaches das spätere etruskische Pfund ergiebt (vergl. besonders Nr. 19 und 20).

Für die mecklenburgischen Funde scheint das häufige Auftreten der ellipsoidischen Form für die steinernen Gewichte charakteristisch zu sein. Wir haben diese Form in Nr. 63, 64 und 70, ferner in § VII, Nr. 24 und 28, während unter den zahlreichen oberitalienischen Gewichten nur die Stücke Nr. 3 und 14 in § VIII und Nr. 6 und 71 in § VII verglichen werden können. Kugeln finden wir nur in Mecklenburg (§ VIII, Nr. 67; § IX, Nr. 29 und 33).

Keulenköpfe (aus Stein und Thon) sind nur aus den

Nr.	Inv.-Nr.	Fundort	Material	Gestalt
1	—	Marzabotto	Stein	—
2	—	—	Thon	Pyramide
3	—	Via Sargozza, Bologna	Stein	Ring
4	—	„	„	„
5	—	„	„	„
6	—	Guragazza	Thon	„
7	—	—	„	„
8	—	—	„	„
9	—	—	„	Pyramide
10	—	—	„	„
11	—	—	„	„
12	—	—	„	„
13	1166	Cimiterio Este	Thon	„
14	—	Via Sargozza	Stein	Ring
15	—	Redù, Terramare	Thon	„
16	87	„	„	Pyramide
17	107	Nonantola, Terramare	„	„
18	49	„	„	Ring

Museen von Schwerin und Königsberg verzeichnet. Das kann Zufall sein, da ich früher auf diese Form nicht geachtet hatte.

§ IX. Fortsetzung. C) Die Einheit von 13,3 gr.

Neben dem Achtfachen des Gewichtes von ca. 13 gr, das wir als tvin-Gewicht eingeführt hatten, ist auch das Zehnfache dieser Einheit in den Terramaren Ober-Italiens als neue Gewichtseinheit gebräuchlich gewesen, wie wir bei Besprechung des Würfels von Marzabotto (vergl. oben § V Nr. 31) gesehen haben, und wie durch mehrere mit Zeichen versehene Gewichte bestätigt wurde. Auch die Verbreitung dieser Einheit kann durch zahlreiche nicht bezeichnete Gewichtsstücke näher verfolgt werden. In der folgenden Tabelle sind solche zusammengestellt; dabei ist der Rechnung ein Gewicht von 13,3 gr zu Grunde gelegt, dessen 8-faches wieder 1 tvin giebt.

Gewicht	Museum	Bemerkungen	Ursprüngl. Gewicht
2790	Marzabotto	vergl. oben p. 103, Nr. 31	2793
149	Este	„ „ § V, Nr. 30; 12.13,3 =	159,6
383	Bologna	„ „ „ p. 104	399
348	„	„ „ „ „	399
590	„	ein Stück abgebrochen	665
590	„	„ „ „ vergl. § VII Nr. 55	665
780	Adria	gut erhalten, mit 2 Stempeln in Fischgrätenmuster. Vergl. oben p. 99 60.13,3 =	798
740	„	—	798
370	„	— 30.13,3 =	399
350	„	verletzt	399
790	Este	gut erhalten	798
780	„	„	798
730	„	Ecken und Kanten abgerundet	798
500	Bologna	Vergl. oben § V, p. 104	532
530	Modena	gut erhalten	532
1030	„	„ 80.13,3 =	1064
530	„	„	532
780	„	—	798

Die Tabelle zeigt, dass dem twin-Gewicht [illegible] ausgedehnte Verbreitung in der Stein- und Bronze[illegible] wie der babylonischen Mine gemeiner Norm und [illegible] abgeleiteten Teilgewichten. Für Italien wird das [illegible] auch deshalb von besonderer Bedeutung gewesen [illegible] sein dreifaches (wenn man von 109 gr als Einheit [illegible] ungefähr das spätere römische Pfund, sein zweifaches [illegible] etruskische Pfund ergiebt (vergl. besonders Nr. 19 [illegible]

Für die mecklenburgischen Funde scheint [illegible] Auftreten der ellipsoidischen Form für die [illegible] wichte charakteristisch zu sein. Wir haben diese [illegible] Nr. 63, 64 und 70, ferner in § VII, Nr. 24 und 28, [illegible] unter den zahlreichen oberitalienischen Gewichten [illegible] Stücke Nr. 3 und 14 in § VIII und Nr. 6 und 71 [illegible] verglichen werden können. Kugeln finden wir nur in [illegible] burg (§ VIII, Nr. 67; § IX, Nr. 29 und 33).

Keulenköpfe (aus Stein und Thon) sind nur [illegible]

Nr.	Inv.-Nr.	Fundort	Material	[illegible]
1	—	Marzabotto	Stein	
2	—	—	Thon	[illegible]
3	—	Via Sargozza, Bologna	Stein	
4	—	"	"	
5	—	"	"	
6	—	Guragazza	Thon	
7	—	—	"	
8	—	—	"	
9	—	—	"	[illegible]
10	—	—	"	
11	—	—	"	
12	—	—	"	
13	1166	Cimiterio Este	Thon	
14	—	Via Sargozza	Stein	
15	—	Redù, Terramare	Thon	
16	87	"	"	P[illegible]
17	107	Nonantola, Terramare	"	
18	49	"	"	

…n von Schwerin und Königsberg verzeichnet. Das kann … sein, da ich früher auf diese Form nicht geachtet hatte.

IX. Fortsetzung. C) Die Einheit von 13,3 gr.

Neben dem Achtfachen des Gewichtes von ca. 13 gr, das …ls tvin-Gewicht eingeführt hatten, ist auch das Zehnfache …r Einheit in den Terramaren Ober-Italiens als neue Ge…tseinheit gebräuchlich gewesen, wie wir bei Besprechung …Würfels von Marzabotto (vergl. oben § V Nr. 31) gesehen …n, und wie durch mehrere mit Zeichen versehene Gewichte …itigt wurde. Auch die Verbreitung dieser Einheit kann …h zahlreiche nicht bezeichnete Gewichtsstücke näher ver… werden. In der folgenden Tabelle sind solche zusammen…ellt; dabei ist der Rechnung ein Gewicht von 13,3 gr zu …nde gelegt, dessen 8-faches wieder 1 tvin giebt.

…ewicht	Museum	Bemerkungen	Ursprüngl. Gewicht
2790	Marzabotto	vergl. oben p. 103, Nr. 31	2793
149	Este	„ „ § V, Nr. 30; 12.13,3 =	159,6
383	Bologna	„ „ „ p. 104	399
348	„	„ „ „ „	399
590	„	ein Stück abgebrochen	665
590	„	„ „ „ vergl. § VII Nr. 55	665
780	Adria	gut erhalten, mit 2 Stempeln in Fischgrätenmuster. Vergl. oben p. 99 60.13,3 =	798
740	„	—	798
370	„	— 30.13,3 =	399
350	„	verletzt	399
790	Este	gut erhalten	798
780	„	„	798
730	„	Ecken und Kanten abgerundet	798
500	Bologna	Vergl. oben § V, p. 104	532
530	Modena	gut erhalten	532
1030	„	„ 80.13,3 =	1064
530	„	„	532
780	„	—	798

Nr.	Inv.-Nr.	Fundort	Material	Gestalt
19	291	Nonantola	Thon	Ring
20	99	Gorzano, Terramare	"	Cylinder
21	100	"	"	Ring
22	52	Gazzade, Terramare	"	Spinnwirtel
23	46	"	Stein	rund, platt, oben gewölbt[1])
24	42	"	"	rund, platt, oben gewölbt[1])
25	150	"	Thon	Pyramide
26	—	Marzabotto	Stein	—
27	41288	S.Donnino, Parma, Castione dei Marchesi; § VIII, 6	"	—
28	4574	Gnewitz, Mecklenburg	—	Ring
29	4996	Pinnow "	Stein	Kugel
30	3576	Gnoien "	"	Cylinder
31	2768	Quaal "	"	Ring
32	2534	Schwetzin "	"	Keulenkopf
33	415	Wittenburg "	"	Kugel
34	2306	Alt-Samit "	—	Ring
35	—	Volsinii	Thon	Pyramide
36	—	"	"	"

Hierher könnte man ferner zahlreiche Stücke im Gewichte von ca. 380 gr rechnen, insbesondere die oben in § IV behandelten, welche sich im Museum zu Marzabotto befinden. Wir haben dieselben mit der sogenannten phönikischen Mine erhöhter königlicher Norm und mit der karthagischen Mine in Verbindung gebracht und zwar deshalb, weil das unter Nr. 5 besprochene Gewicht gerade 38300 gr wiegt. Da aber keines dieser Gewichte unverletzt oder unverwittert sein dürfte, so erscheint es mir sehr wahrscheinlich, dass auch bei jenen Gewichten aus Marzabotto an Stelle der Einheit von 383 gr besser diejenige von 30.13,3 = 399 gr zu Grunde gelegt werden sollte.

[1]) Diese gewölbte Form ist für viele der von Flinders Petrie veröffentlichten Gewichte charakteristisch. Die im Texte genannten Gewichte zeigen ausserdem eine Einkerbung rund um den äusseren Mantel.

Gewicht	Museum	Bemerkungen	Ursprüngl. Gewicht
65	Modena	— 5.13,3	66,5
800	„	Vergl. oben § V, p. 104; 60.13,3	798
260	„	gut erhalten	266
126	„	Vergl. oben § V, p. 104	133
530	„	gut erhalten	532
630	„	abgestossen	665
1040	„	gut erhalten 80.13,3	1064
1985	Marzabotto	Nr. 66 bei Brizio; auf dem Steine ist das hieratische Zeichen für 80 (IIII) doppelt angebracht. Wir haben 160.13,3 =	2128
1250	Rom preistorico	kleine Stücke abgestossen	1330
79	Schwerin	— 6.13,3	79,8
126	„	—	133
368	„	Cylindermantel eingeschnürt	399
248	„	—	266
344	„	verwittert	399
79	„	aus Hügelgrab mit dürftigem Inhalt	79,8
26	„	aus Kegelgrab, sehr gut erhalten, am Aequator eingekerbt	26,6
65	Florenz	Beide aus einem Grabe mit Buc-	66,5
65	„	chero-Gefässen (Orvieto) 5.13,3 =	

Hierfür spricht auch die Thatsache, dass durch den in § V Nr. 31 besprochenen und doppelt bezeichneten Würfel diese Einheit von ca. 13 gr zu einer anderen Einheit von 56 gr in Beziehung gesetzt wird, gerade wie das in § IV besprochene Steingewicht Nr. 4 eine Beziehung zwischen dem tvin und der Einheit von 383—399 gr herstellte.

Neben der phönikischen Mine von 383 gr scheint auch diejenige gemeiner Norm von 365 gr vielfach aufzutreten; doch würden entsprechende ausführliche Zusammenstellungen unserm gegenwärtigen Zwecke fern liegen. Auch auf die Verbreitung der erwähnten Einheit von 56 gr kann ich erst bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen, ebenso auf die Einheit von 16,4 gr (Shekel, vergl. oben p. 82), die babylonische Silbermine (vergl. oben § IV, Nr. 24) und auf die Verbreitung der ägyptischen Einheit von 90 bis 91 gr.

§ X. Chronologisches.

Bisher haben wir uns darauf beschränkt, die thatsächlichen Funde zusammenzustellen, sie nach der Höhe ihres Gewichtes zu ordnen, oder sie nach ihren Aufschriften zu einander in Beziehung zu setzen und ihre örtliche Verbreitung über Mittel-Europa zu diskutiren; die zeitliche Verbreitung mussten wir zunächst ausser Acht lassen. Ueber letztere ein sicheres Urteil zu gewinnen, wird auch kaum möglich sein; immerhin mag versucht werden, einige Gesichtspunkte dafür aufzustellen.

Nach unten wird uns eine Grenze für die Beziehungen Oberitaliens zu Aegypten etwa durch die punischen Kriege gegeben, in denen gleichzeitig mit der karthagischen die etruskische Seemacht gebrochen wurde, und durch die römische Besetzung Ober-Italiens. Eine obere Grenze wird durch die ältesten Beziehungen Nord-Italiens zu Aegypten gegeben. Im § 13 meiner früheren Arbeit habe ich versucht, kurz zusammen zu stellen, was darüber bekannt ist. Durch die ägyptischen Nachrichten über die Völker der Tursch und der Sharden liessen sich solche Beziehungen (allerdings sehr hypothetischer Art) bis ins 14. Jahrhundert vor Chr. zurückverfolgen, d. h. bis in die Blütezeit der mykenischen Kultur und in die Zeit der Kämpfe Aegyptens gegen die „von den Inseln des Meeres“ anstürmenden fremden Völker. Die damals von mir für diese frühe Zeit angenommene Uebertragung babylonischer Gewichte und ägyptischer Ziffern zu den Bewohnern der Po-Ebene und der euganeischen Berge schien im Widerspruche zu der Vorstellung zu stehen, wonach die Bewohner der Terramaren und der Pfahlbauten damals noch in den Anfängen der Steinzeit-Kultur standen. Inzwischen haben auch Montelius[1]) und Evans[2]) die prähistorische Chronologie der Terramaren-Epoche

---

[1]) Preclassical chronology in Italy and Greece, Reports of the British Association for the advancement of science 1896, p. 933, und: The Tyrrhenians in Greece and Italy, ib. p. 931.

[2]) The Eastern Question in Anthropology, ib. p. 906 ff.

so modifizirt, dass sie direkte Beziehungen West-Europas zum mykenischen Kulturkreise annehmen.

In eine noch fernere Zeit zurück, nämlich bis in die Zeit der XII. und XIII. Dynastie Aegyptens, werden wir durch die Ausgrabungen von Flinders Petrie in Kahun versetzt. Nach denselben lebten fremde Völker des Nordens schon um 2500 v. Chr. in dieser ägyptischen Stadt; ihre Anwesenheit wird geschlossen aus den Resten der von ihnen benutzten Thongefässe, welche nur mit den ältesten italischen Formen verglichen werden können und deren Alter in Aegypten durch entsprechende sicher datirte Grabfunde festgelegt wird.[1]) Auf diesen alten Scherben finden sich diejenigen Zeichen, welche ich in meiner früheren Arbeit (a. a. O. § 17) mit den in der Bronzezeit allgemein verbreiteten Marken und Ziffern verglichen habe. Selbst wenn damals in den Terramaren Italiens noch die Kultur der Steinzeit herrschte, so darf man sich von dieser doch keine zu geringe Vorstellung machen. „Diese europäische Epoche ist in tiefes Dunkel gehüllt, das nur wenige Funde wie vereinzelte Blitze erhellen. Wir müssen aus den ägyptischen Verhältnissen auf die Kultur der anderen Völker zurückschliessen; wir dürfen nicht annehmen, dass das Nilland mit seiner Kultur inmitten von Barbaren allein gestanden habe. Abgesehen von ihrem nationalen Charakter ist der wesentliche Unterschied zwischen ägyptischer und europäischer Kultur der Urzeit, dass die erstere sich in ihren Denkmälern infolge besonderer Verhältnisse durch Jahrtausende erhielt und nun gleichsam wie ein offenes Buch am Wüstenrande des Nilthales daliegt, während die letztere gleichsam in Regen und Schnee zu Grunde ging.“[2])

In der XII. oder XIII. Dynastie tritt in Aegypten die

---

[1]) Vergl. Flinders Petrie, Illahun, Kahun and Gurob 1889—90, London 1891, p. 10 f. — Auch durch in Kreta gefundene Bildwerke werden Beziehungen dieser Insel zu Aegypten schon für das „mittlere Reich“ wahrscheinlich gemacht. Vergl. von Bissing: Die statistische Tafel von Karnak, Leipzig 1897, p. 59 und XXIV.

[2]) Stern, Aegyptische Kulturgeschichte, Bd. I, p. 3 f. Magdeburg 1896.

Einheit von 12,77 gr zuerst auf (vergl. oben p. 89), die allerdings von dem noch älteren Chufu-Gewichte wenig verschieden ist. Sie verschwindet dann scheinbar, um unter der XVIII. Dynastie von Neuem uns bemerkbar zu werden. In dieser Zeit (d. h. im 16. oder 15. Jahrhundert v. Chr.) spätestens, vielleicht aber schon in jener früheren Zeit, wird diese Gewichtseinheit im internationalen Handelsverkehre gebräuchlich gewesen und nach Italien übertragen sein.

Einen festeren chronologischen Anhaltspunkt haben wir für einige Gewichte, die in Gräbern gefunden wurden. Es sind das erstens die tvin-Gewichte, welche in § VIII unter Nr. 21, 22 und 23 aufgeführt wurden; sie stammen aus einem Grabe, das nach den dabei gefundenen Schlangen-Fibeln in den Anfang der Eisenzeit zu setzen ist. Annähernd der gleichen Zeit entstammen die Gewichte Nr. 45, 46, 47 in § VIII. Ferner sind als Grabfunde die beiden Gewichte zu je 65 gr hervorzuheben, welche in § IX unter Nr. 35 und 36 genannt wurden; sie gehören ins 7. Jahrhundert v. Chr. Noch jünger ist das Gewicht § VII Nr. 64, das ins fünfte Jahrhundert zu setzen ist, vielleicht auch nicht der Einheit von 197 gr, sondern der leichten phönikischen Mine gemeiner Norm von 365 gr zuzuteilen ist.[1])

Die Gewichte mit Inschrift, welche in § III und IV behandelt wurden, mögen auch dem siebenten oder achten Jahrhundert angehören, denn früher wurde die Buchstabenschrift schwerlich in Oberitalien eingeführt. Das tvin-Gewicht selbst muss allerdings viel früher nach Italien gekommen sein. Darauf deutet der Umstand, dass es als Achtfaches der sonst bekannten Einheit von ca. 13 gr auftritt; denn die Teilung und Multiplikation mit 2, 8, 16 u. s. w. erinnert an uralten ägyptischen Gebrauch, und in späterer Zeit beherrschte in

[1]) In dem Museum der Villa di Papa Giulio finden sich noch drei andere aus Grabfunden stammende Terracotta-Gewichte, die in obigen Tabellen nicht erwähnt wurden. Eines von ihnen, das gegenwärtig 640 gr wiegt und ursprünglich 50.13,3 = 665 gr schwer gewesen sein mag, gehört ins dritte Jahrhundert v. Chr.

Aegypten ausschliesslich die dezimale, in Vorderasien daneben die duodezimale Teilung das Gewichtssystem. Da grössere Einheiten auf den ältesten ägyptischen Gewichten, die eine Aufschrift tragen, nicht genannt werden, so lässt sich schwer entscheiden, ob hier in früherer Zeit ein dem tvin entsprechendes Gewicht üblich war. Wir müssen dafür die nicht bezeichneten, von Flinders Petrie veröffentlichten Gewichte durchsehen; aus ihnen lässt sich in der That eine grosse Anzahl zusammenstellen, die sich als Vielfache unseres tvin ergeben, und zwar sowohl aus den älteren Ausgrabungen von Kahun und Gurob als aus den jüngeren von Naukratis und Tanis.[1]) Ausserdem könnte man die berühmten Tributlisten aus dem Tempel von Karnak zu Rate ziehen, in denen die in Gold oder Silber gezahlten Tribute asiatischer Völker nach debn und kite aufgezählt sind, und von denen man mit Recht nach Brandis vermutet, dass die Angaben sich auf ursprünglich in runden asiatischen Gewichtseinheiten gemachte Lieferungen beziehen. Auf diese Frage soll gegenwärtig nicht mehr eingegangen werden, denn es müsste eine erneute Bearbeitung der altägyptischen Gewichtssysteme voraufgehen (vergl. oben die Einleitung).

Noch in ptolemäischer Zeit ist in Aegypten ein Gewicht in Gebrauch gewesen, das mit dem Gewichte von Sermide übereinstimmt, nämlich 954 gr wiegt. Nach Revillout[2]) lautet die Uebersetzung der demotischen Aufschrift dieses von Mariette publizirten Gewichtes: „2 tema de l'atelier de fonderie du; temple du seigneur d'Hermopolis.“ Das Stück wiegt 1908 gr es wäre also ein tema in der That gleich 954 = 9.106 gr = 9 tvin. Die Aufschrift wird aber von Griffith anders übersetzt; deshalb können wir keine sicheren Schlüsse ziehen.

Auch die in § V besprochenen Aichzeichen lassen sich auf ägyptischen Gewichten nicht nachweisen. Das mit dem Zeichen ≻—≺ äquivalente Zeichen ≻○≺ (vergl. oben p. 98) findet sich

[1]) Im ägyptischen Museum zu Turin befindet sich ein Bronzegewicht von 108 gr, stark oxydirt, also gerade gleich 1 tvin.

[2]) Vergl. Revillout, Revue égyptologique 2ième année 1881, p. 183 Anmk. und Nr. 28 der Liste von Griffith.

auf einer Vase aus Tanis, die aus der Zeit der XX.—XXV. Dynastie stammt: es ist auf diesem Gefässe vielleicht auch als Aichzeichen zu deuten.

Auf einer andern Scherbe aus Tanis[1]) findet sich das Pentagramm zusammen mit der Kartouche des Königs Aahmes (XXVI. Dynastie 564—526 v. Chr.), also aus der Zeit des Pythagoras, mit dem dies symbolische Zeichen nach alter Ueberlieferung in Verbindung gebracht wird. Dasselbe Pentagramm fand ich auf einem Scherben vom Fusse einer Thonvase des Museo civico zu Adria (ebenda auf einem andern Scherben das verwandte Zeichen, gebildet von zwei sich durchsetzenden Dreiecken), ferner auf zwei derartigen Scherben von Vasenfüssen im Museum zu Marzabotto. Auch hierin sehen wir eine Bestätigung unserer früheren Entwicklungen über die Beziehungen der pythagoräischen Lehren zu den Aegyptern und Etruskern (vergl. §§ 19 und 20 meiner früheren Arbeit).

Für die Geschichte der Ziffern, durch welche ich zur Untersuchung der Gewichte geführt wurde, haben wir das Resultat gefunden, dass um die Zeit des Pythagoras demotische Ziffern in Italien geschrieben wurden, dass aber in den ältesten Zeiten sowohl hieratische Ziffern aus Aegypten, als babylonische und phönikische Ziffern vorkommen. Belege hierfür sind die in § I, II und III besprochenen Gewichte Nr. 1, 2, 3, das auf p. 84 erwähnte Gewicht aus Marzabotto, das Stück Nr. 31 in § V, Nr. 32 und 36 in § VI und Nr. 26 in § IX. Auch hierin erkennen wir weitere Anhaltspunkte für die von mir früher entwickelte historische Uebersicht über die Wanderung der Zahlzeichen.

---

1) Vergl. Flinders Petrie, Tanis, Band II, Pl. XXVI, Fig. 5 und Pl. I, sowie p. 109.

Nachtrag.

Inzwischen habe ich im April d. J. Gelegenheit gehabt, das Gewicht von Sermide (§ III) im Museum zu Mantua genauer zu studiren (während bei meiner früheren Anwesenheit der betr. Schrank nicht geöffnet werden konnte) und zu wiegen. Das Gewicht beträgt darnach nicht 930, sondern 935 gr. Ferner ist das Stück an einer Seitenfläche, die man bei der Corssenschen Abbildung nicht sieht, stärker verletzt, als ich früher annehmen konnte. Das ursprüngliche Gewicht kann daher mit ziemlicher Sicherheit auf etwa 980 gr angesetzt werden, so dass ein tvin nicht gleich 106,4 gr, sondern gleich 109 gr zu setzen wäre, d. h. gleich dem Betrage, der auch schon oben als vielleicht zulässig angegeben wurde (vergl. p. 119 und 126 und Nr. 42, 62, 77, 87, 88 in § VIII).

Besonders wichtig für den Zusammenhang Ober-Italiens mit Aegypten sind die beiden in der ersten Anmerkung auf p. 106 erwähnten Terracotta-Pyramiden im Museum zu Mantua, auf denen das ägyptische Wort *κιτε* vorkommt; die Anzahl der *κιτε* ist auf dem einen Gewichte in demotischen Ziffern, auf dem andern mit dem in etruskischen Buchstaben geschriebenen ägyptischen Zahlworte angegeben. Beide Gewichte tragen (wie wir es oben mehrfach sehen, vergl. § IV, Nr. 4 und § V, Nr. 31) eine zweite Angabe, ebenfalls ägyptisch in etruskischer Transscription, die zeigt, dass auch das äthiopische Honig-Gewicht in Italien Eingang gefunden hatte. Auf diese Stücke konnte ich im Vorstehenden nicht eingehen, da es mir erst jetzt möglich war, ihr Gewicht zu bestimmen.

Meine auf p. 112 ausgesprochene Vermuthung über den Zweck der Durchbohrungen bei den Terracotta-Pyramiden ist inzwischen dadurch bestätigt worden, dass ich im Museo civico zu Rovereto noch Holz-Reste in der Durchbohrung einer solchen Pyramide (Fundort Chizzola) bemerkte.

Inhalt.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 6. Mai 1899.

Herr P. Groth legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Ernst Weinschenk, Privatdozenten an der Universität: „Zur Classifikation der Meteoriten" vor.

Zur Classification der Meteoriten.

Von Dr. **E. Weinschenk.**

(Eingelaufen 6. Mai.)

Trotz des ausserordentlich bedeutenden Umfanges, welchen die Meteoritenliteratur namentlich in den beiden letzten Jahrzehnten angenommen hat und trotz des grossen Interesses, welches weite Kreise diesen Gebilden entgegenbringen, ist bis heute merkwürdigerweise von keiner Seite der Versuch gemacht worden, die modernen Anschauungen der Petrographie auch auf die Classification der Meteoriten anzuwenden, und dieselben in ein System zu bringen, welches wenigstens einigermassen ein natürliches genannt werden kann.

Unser heutiges System fusst auf der von Gust. Rose im Jahre 1864 aufgestellten Eintheilung, welche später von Tschermak und Brezina mehrfach erweitert wurde, wobei im Allgemeinen die schon makroskopisch leichter zu unterscheidenden Eisenmeteo-

riten eine Trennung nach ihrer Zusammensetzung und Structur erfahren haben, während dagegen bei den Steinmeteoriten, deren structurelle und mineralische Verhältnisse zu erforschen erst den modernsten petrographischen Methoden gelungen ist, die Eintheilung zum grossen Theil nach rein äusserlichen Gesichtspunkten ausgeführt wurde, welche einer wissenschaftlichen Kritik keineswegs Stand halten. Um von diesem System auf ein eigentlich petrographisches überzugehen, bedarf es einer vollständigen Neugestaltung, allerdings nicht in dem Sinne Meuniers, welcher bei den Steinmeteoriten nur die Art des Auftretens und die Menge des in denselben enthaltenen Nickeleisens als Eintheilungsprincip annimmt, sondern eines Princips, welches thatsächlich auf bezeichnende Eigenthümlichkeiten der Steinmeteoriten sich stützt. Eine kleine Reihe von Meteorsteinen unterscheidet man von der grossen Masse derselben, welche bei oberflächlicher Betrachtung recht einförmig erscheinen, leicht durch ihre abweichende mineralische und chemische Zusammensetzung, sowie durch ihre Struktur; sie wurden daher schon frühe als besondere Typen ausgeschieden und werden in jedem System ihren Rang als selbständige Gesteine einnehmen müssen.

Es sind dies die von G. Rose und seinen Nachfolgern als Angrit, Bustit, Chassignit, Chladnit, Eukrit, Howardit, Shergottit und Ureilit bezeichneten Gesteinsarten, — meist ausserordentlich seltene Vorkommnisse, welche insgesammt ca. 20 Fälle umfassen, — ferner die gleichfalls nicht sehr verbreiteten kohligen Chondrite, welche durch die Eigenart ihrer Zusammensetzung die am schärfsten abgegrenzte Gruppe bilden. Alle übrigen Meteorsteine — ca. 300 an Zahl — werden sodann wegen der bei den meisten hervortretenden Chondrenstruktur als Chondrite zusammengefasst (die sogenannten Amphoterite lassen sich von diesen absolut nicht trennen), welche dann wieder eine Eintheilung nach durchaus äusserlichen Kennzeichen finden, die weder in der chemischen und mineralischen Beschaffenheit der Steine begründet sind noch auch eine ausgesprochene structurelle Classification dar-

stellen. Die Gruppen der weissen, intermediären, grauen und schwarzen Chondrite, der Kügelchenchondrite und krystallinischen Chondrite etc. konnte man nur so lange als zusammengehörige Gruppen gelten lassen, als man nicht in der Lage war, die feinere Structur dieser allerdings oft ganz ausserordentlich schwierig zu erforschenden Gebilde zu entziffern. Vom modernen petrographischen Standpunkt aus haben sie etwa ebenso viel Bedeutung wie die Namen der Grünsteine, Trappe, Wacken etc. für die Systematik unserer irdischen Gesteine. Wenn man aber vollends diese einzelnen Gruppen, wie dies heute geschieht, je nach der grösseren und geringeren Anzahl von Rissen, welche dieselben durchsetzen, und die meist mit Schmelzmasse ausgefüllt sind, in die weiteren Unterabtheilungen der geaderten und breccienähnlichen zerlegt, so hat eine solche Eintheilung etwa ebenso viel wissenschaftliche Bedeutung, wie wenn man die Granite z. B. in zerklüftete und nicht zerklüftete eintheilen wollte.

Mit Ausnahme einiger der oben angeführten seltenen Typen gehören alle Steinmeteoriten zu den Magnesiasilicatgesteinen, einer Gruppe von Gesteinen, welche auf unserer Erde nur ganz ausnahmsweise in frischem Zustande vorkommen, die vielmehr bei uns fast stets zu Serpentin geworden sind. Diese Serpentinbildung, wie überhaupt alle wasserhaltigen Mineralien, fehlen vollständig bei dieser ganzen Gruppe von Meteorsteinen und wir haben die ursprüngliche mineralische Zusammensetzung derselben durchaus erhalten. Dieselbe ist aber bei dem geringen Wechsel in der chemischen Zusammensetzung der ganzen Gruppe eine ganz ungemein einförmige, so dass es nicht möglich erscheint, eine Eintheilung der Chondrite auf dieser Basis zu ermöglichen, zumal die Mengenverhältnisse der einzelnen Mineralien in einem und demselben Stein sehr wechselnde sein können. Von der mineralischen Zusammensetzung wird daher bei diesem Classificationsversuch völlig abgesehen. Vielleicht dass später, wenn auf Grund des hier dargelegten Systemes eine bessere Uebersicht der Eigenschaften der Meteorsteine ermöglicht ist, auch das mineralogische Princip sich als nicht

ganz unfruchtbar für die Classificirung erweist. Wir sind also für die Eintheilung der Chondrite ausschliesslich auf die Merkmale ihrer Mikrostructur angewiesen, welche auch, wie im Folgenden gezeigt wird, in durchaus ungezwungener Weise die Aufstellung eines Systems gestatten.

Die Untersuchungen müssen natürlich auf möglichst breiter Basis ausgeführt werden, wenn man zu einer allgemein gültigen Theilung gelangen will, und ich habe mich daher bemüht, ausser dem in der Meteoritensammlung der Akademie befindlichen, recht reichhaltigen Material möglichst viele andere Steinmeteorite dem mikroskopischen Studium zu unterziehen, wozu mir in liberalster Weise von den verschiedensten Seiten das Material zur Verfügung gestellt wurde. Namentlich den Herren Prof. Cohen, Berwerth und Fletcher, ferner Herrn Geo. F. Kunz bin ich in dieser Beziehung zu grossem Dank verpflichtet.

Als erstes und wichtigstes Resultat einer auf viele hundert Dünnschliffe ausgedehnten Untersuchung von über zweihundert Lokalitäten ist zunächst zu betonen, dass bei allen jenen Steinmeteoriten, von welchen zu solchen Studien taugliches Material — sehr dünne Schliffe, welche weder stark rostig noch auch zu sehr zerrissen sind — vorlag, mit Sicherheit constatirt werden konnte, dass die Structur derselben, welche allerdings oft erst mit starken Immersionssystemen und bei Anwendung eines Beleuchtungsapparates mit Centrumsblenden etc. gut kenntlich wird, mit Sicherheit auf eine Entstehung der Chondrite aus dem Schmelzfluss hinweist und fast stets eine durchaus krystallinische ist oder doch jedenfalls gewesen ist.

Allerdings ist diese ursprünglich krystallinische Structur häufig verwischt und oft fast unkenntlich gemacht und zwar hauptsächlich in zwei Arten, welche unter sich weit abweichen. Einmal dadurch, dass eine mehr oder minder fortgeschrittene Zermalmung der einzelnen Gemengtheile[1], eine Auflockerung

[1] Auf die Ursachen dieser verschiedenen Umbildungen einzugehen, ist hier nicht der Platz. Dieselben werden vielmehr in einer Studie über

des ganzen Gefüges eingetreten ist, welcher eine grosse Anzahl von Steinmeteoriten ihr eigenartiges „tuffartiges" Aussehen verdankt, und auf welche auch von Linck kürzlich hingewiesen wurde. Eine andere Art der Umbildung besteht darin, dass die betreffenden Steine entweder in ihrer ganzen Masse oder wenigstens im grössten Theil derselben injicirt sind mit einer schwarzen Substanz, welche alle Eigenthümlichkeiten der Schmelzmasse der Rinde der Meteoriten an sich trägt, und die durch die ganze Art des Auftretens durch ihr Eindringen in alle Spalten der Mineralien und Chondren etc. sich als eine jüngere Bildung charakterisirt, welche aber das ganze Gestein so innig imprägnirt, dass sie zu einem eigentlichen Gesteinsbestandtheil wird.

Die unter dem Namen der Chondrite zusammengefassten Meteorsteine zeigen ferner einen äusserst wechselnden Gehalt an den eigenthümlichen Gebilden, welche man als Chondren bezeichnet hat, einigen derselben fehlen sie so gut wie ganz (Ensisheim, Pillistfer etc.), andere bestehen fast ausschliesslich aus denselben und lassen kaum Spuren einer Zwischenmasse erkennen. Es ist dabei in hohem Masse charakteristisch, dass unter den stark zermalmten Gesteinen die chondrenreichen vorherrschen, während sie unter denjenigen, welche ihre ursprüngliche Struktur erhalten haben, viel seltener sind. Dagegen traten hier chondrenfreie und chondrenarme Steine häufiger auf. Weitaus die meisten Chondrite zeigen zwischen den stark vorherrschenden Magnesiasilicaten, deren ursprüngliche Körnerform mehr oder weniger deutlich erhalten ist, kleinere oder grössere Flecken einer schwach lichtbrechenden farblosen Substanz, gegen welche die Magnesiasilicate meist gute krystallographische Umgrenzung zeigen, und die geradezu charakterisirt ist dadurch, dass sie fast immer ringsum ausgebildete, aber stark gerundete und daher im Dünnschliff eiförmig erscheinende

die Entstehung der Meteoriten eingehender besprochen werden, welche der Verfasser mit Herrn Prof. Renard zusammen in einiger Zeit veröffentlichen wird.

Individuen dieser Silicate umschliesst. Diese Zwischenklemmungsmasse ist meistens schwach doppelbrechend und zeigt dann mehr oder weniger deutlich die Zwillingslamellirung der Plagioklase, zu welchen sie wohl zu stellen ist. In andern Fällen erkennt man die Doppelbrechung nicht (Chateau Renard), die Substanz hat dann die Eigenschaften des Maskelynits. Sehr viel seltener sind Chondrite, welche eine ursprüngliche, glasige Basis, meist mit krystallitischen Entglasungsproducten enthalten.

Mit der allmähligen Zunahme des Gehaltes an gediegenem Eisen geht dann allmählig wieder die Chondrenstructur verloren und die Uebergangsglieder zu den Eisenmeteoriten sind meist völlig chondrenfrei. Aus den obigen Gesichtspunkten ergibt sich folgende Classification:

A. Eisenarme Meteorsteine.

I. Anormale:[1])

a. Eukrit (Shergottit): Feldspathreich mit ursprünglicher ophitischer Structur.

b. Chladnit: } Vorherrschend { rhombischer } Pyroxen
c. Angrit: } Vorherrschend { monokliner } Pyroxen
mit wenig Olivin und Plagioklas in körniger Structur.

d. Chassignit: Vorherrschend Olivin mit körniger Structur.

e. Bustit: Feldspathfreies } Gestein mit Olivin und
f. Howardit: Feldspathhaltiges } Gestein mit Olivin und
Pyroxen. Structur stellenweise ganz breccienartig.

[1]) Dieser seinerzeit viel angegriffene Ausdruck von Partsch scheint mir den Charakter dieser Gruppe gegenüber den übrigen am besten zu kennzeichnen, da diese Typen hauptsächlich durch ihre abweichende mineralische Zusammensetzung sich von den übrigen trennen lassen, nicht aber durch den Mangel an Chondren etc., da sich auch bei den übrigen Gruppen einzelne chondrenfreie Steine finden.

II. Normale:

1. **Meteorsteine mit glasiger Basis und Krystallskeletten** (Zertrümmerung nur in den ersten Stadien).

   a. **Typus Ensisheim:** Chondren kaum oder nicht entwickelt, mit lichtem Glas und massenhaften Bronzitskeletten in der Grundmasse.

      Beispiele: Ensisheim, Bluff Settlement, Pipe Creek, Long Island.

   b. **Typus Parnallee:** Ebenso, aber mit reichlichen, gut ausgebildeten Chondren.

      Beispiele: Parnallee, Beaver Creek, Tysnäsöen.

   c. **Typus Farmington:** Chondrenreich mit schwarzer, glasiger Grundmasse und Krystallskeletten.

      Beispiel: Farmington.

2. **Meteorsteine mit Plagioklas (Maskelynit)-ausfüllung, in welcher rundliche Krystalle von Olivin oder Bronzit enthalten sind:**

   α. Structur erhalten, Zertrümmerung höchstens randlich an den Körnern.

   a. **Typus Pillistfer:** Ohne Chondren.

      Beispiele: Pillistfer, Guareña.

   b. **Typus Chateau Renard:** Chondren in geringer Anzahl und undeutlich.

      Beispiele: Chateau Renard, Wold Cottage, Politz, Drake Creek.

   c. **Typus Bjelokrinitschie:** Chondren zahlreich und gut ausgebildet.

      Beispiele: Bjelokrinitschie, Butsura.

   β. Die Krystallkörner sind stets randlich zertrümmert, stellenweise ist die Structur undeutlich.

   a. **Typus St. Denis Westrem:** Chondren wenig entwickelt.

      Beispiele: St. Denis Westrem, Kernouvé, Erxleben, Hartford.

b. Typus Duruma: Chondren zahlreich und gut ausgebildet.

Beispiele: Duruma, Dhurmsala, Savtschenskoje.

γ. Zertrümmerung weiter fortgeschritten, Structur nur noch stellenweise erhalten.

a. Typus Manbhoom: Chondren wenig entwickelt.

Beispiele: Manbhoom, Honolulu.

b. Typus Schönenberg: Chondren gut ausgebildet und zahlreich.

Beispiele: Schönenberg, Lesves, Mauerkirchen, Mocs, New Concord.

δ. Vollendete Zertrümmerung.

a. Typus Jeliza: Chondren wenig entwickelt.

Beispiel: Jeliza.

b. Typus Pultusk: Chondren zahlreich und gut ausgebildet.

Beispiele: Pultusk, Sokobanja, Knyahinya, L'Aigle.

c. Typus Eichstädt: Chondren vorherrschend.

Beispiele: Eichstädt, Forest, Ochansk.

d. Typus Ornans: Fast nur Chondren.

Beispiele: Ornans, Ngawi, Richmond.

3. Mit schwarzer schlackiger Masse injicirte Steine.

a. Typus Nowo-Urei: Starke Injection, chondrenfrei.

Beispiel: Nowo-Urei.

b. Typus Tadjera: Fast der ganze Stein umgeschmolzen; mit Chondren.

Beispiele: Tadjera, Indarch, Grossnaja.

c. Typus Orvinio: Nur die Grundmasse umgeschmolzen, stellenweise ohne Injection; mit Chondren.

Beispiele: Orvinio, Sewrukow, Mac Kinney, Prairie Dog Creek.

d. Typus Krawin: Grundmasse zeigt nur noch Spuren einer Injection; mit Chondren.

Beispiel: Krawin, Gnarrenburg.

B. Eisenreiche Meteorsteine.

1. Mit Chondren.

    Typus Kesen: Eisen- und chondrenreiche, normale Steine.

    Beispiele: Kesen, Trenzano.

2. Ohne Chondren.

    a. Typus Grahamit: Gabbro.

    Beispiele: Hamblen Cy., Crab Orchard.

    b. Typus Llano del Inca: Olivingabbro.

    Beispiel: Llano del Inca.

    c. Typus Siderophyr: Pyroxenit mit Tridymit.

    Beispiel: Rittersgrün.

    d. Typus Mesosiderit: Lherzolith.

    Beispiele: Miney, Sierra de Chaco.

    e. Typus Pallasit: Dunit.

    Beispiele: Pallas, Brenham Township, Eagle Station.

Die im Obigen aufgeführten Typen sind selbstverständlich nicht als scharf getrennte anzusehen, namentlich sind die verschiedenen Stadien der Veränderung, welche die Steine erlitten haben, durchaus nicht exact gegen einander abzugrenzen. Anderntheils dürften noch einige Lücken vorhanden sein, welche auszufüllen mir das Material mangelte. So dürfte z. B. durch den Krähenberger Meteorstein ein Typus repräsentirt sein, welcher den Charakter einer Contactbreccie an sich trägt, indem mehr oder weniger breite Adern einer makroskopisch schon dunkler erscheinenden und härteren Masse, scharf abgegrenzte Bruchstücke einer lichten und zerreiblichen umschliessen, und zu demselben Typus dürfte auch der Stein von Wawilowka gehören.

Sitzung vom 3. Juni 1899.

1. Herr Gustav Bauer legt eine Abhandlung des Herrn Professor L. Maurer in Tübingen: „Ueber die Endlichkeit der Invariantensysteme" vor.

2. Herr Richard Hertwig überreicht eine Abhandlung des Assistenten an der zoologisch-zootomischen Sammlung Dr. Franz Doflein: „Amerikanische Dekapoden der k. bayerischen Staatssammlungen".

Ueber die Endlichkeit der Invariantensysteme.

Von L. Maurer.

(Eingelaufen 8. Juni.)

Einleitung.

Herr Hilbert hat den Satz von der Endlichkeit des Formensystems in voller Allgemeinheit bewiesen:[1]) er hat bewiesen, dass sich die Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen mit beliebig vielen Variabelnreihen als ganze Functionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen lassen. Der Gang des Beweises hat zu der Erkenntniss geführt, dass der Satz auch dann seine Geltung behält, wenn man auf die verschiedenen Variabelnreihen verschiedene Substitutionen anwendet, und auch dann, wenn man nicht die Gesammtheit der linearen Substitutionen, sondern nur gewisse Untergruppen derselben zur Anwendung bringt und Invarianz nur gegenüber diesen Untergruppen fordert.

Einer jeden Transformation der Variabeln durch eine lineare und homogene Substitution entspricht eine Transformation der Coefficienten der Grundformen durch eine lineare und homogene Substitution. Man kann daher die Invarianten auch durch die Eigenschaft charakterisiren, dass sie durch eine Gruppe G von linearen und homogenen Substitutionen in sich selbst transformirt werden. Dies lässt sich noch etwas anders

[1]) Ueber die Theorie der algebraischen Formen. Math. Annalen Bd. 36. S. 473.

ausdrücken. Die Coefficienten der Grundformen mögen in irgend einer Reihenfolge mit $x_1\, x_2 \ldots x_n$ bezeichnet werden und es seien

$$C_\varrho(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\varrho\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu \qquad \varrho = 1, 2, \ldots r$$

die infinitesimalen Transformationen, die die Gruppe G erzeugen. Die Invarianten sind dann durch die r Differentialgleichungen

$$C_\varrho(f) = 0$$

definirt.

Es ist nun eine naheliegende Frage — Herr Hilbert hat sie im 42. Annalenband (S. 314) ausdrücklich formulirt : entspricht jeder linearen und homogenen Transformationsgruppe, oder was dasselbe sagen will, jedem System von partiellen Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$, ein endliches Formensystem? Ich werde im Folgenden beweisen, dass das in der That der Fall ist: es lassen sich alle ganzen Functionen, die den partiellen Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$ genügen, als ganze Functionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen.

Das Beweisverfahren, das im Folgenden angewendet wird, führt mit Nothwendigkeit zu einer Erweiterung des Satzes.

Angenommen, die Grössen x seien nicht unabhängig von einander, sondern genügen einem System algebraischer Gleichungen

$$(F) \qquad F_1 = 0 \qquad F_2 = 0 \;\ldots\; F_s = 0$$

Dieses Gleichungssystem sei der Gruppe G gegenüber invariantiv, d. h. jedes den Gleichungen (F) genügende Werthsystem der x genüge auch den Gleichungen

$$C_\varrho(F_\sigma) = 0 \qquad \varrho = 1, 2, \ldots r; \quad \sigma = 1, 2, \ldots s$$

Das System der Functionen von $x_1\, x_2 \ldots x_n$, die den Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$ bei Berücksichtigung der Gleichungen (F) genügen, bezeichne ich als „specielles“ Invariantensystem der Gruppe G im Gegensatz zu dem „allgemeinen“ Invariantensystem, das die Functionen umfasst, die

denselben Differentialgleichungen bei unbeschränkter Variabilität der Grössen x genügen.

Es wird im Folgenden nachgewiesen:

Alle ganzen Functionen, die einem speciellen Invariantensystem angehören, lassen sich als ganze Functionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen.

Den Beweis zerlege ich in zwei Theile. Im ersten Theil wird mittelst einer Modification des Hilbertschen Beweisverfahrens nachgewiesen, dass der Satz gilt — und zwar sowohl für das allgemeine Invariantensystem als auch für jedes specielle — wenn die Ordnung der Gruppe G gleich eins ist, wenn also das Invariantensystem durch eine einzige Differentialgleichung bestimmt ist (Art. III und IV). Im zweiten Theil setze ich voraus, der Satz gelte für alle Gruppen, deren Ordnung kleiner als r ist, und beweise, dass er dann auch für eine Gruppe von der Ordnung r gilt. Dabei hat man die beiden Möglichkeiten zu unterscheiden, dass die Gruppe G zusammengesetzt (Art. V) oder einfach ist (Art. VI).

I.

Im Vorangehenden wurde vorausgesetzt, dass die infinitesimalen Transformationen

$$C_1(f) \quad C_2(f) \quad \ldots \quad C_r(f)$$

eine lineare und homogene Gruppe erzeugen.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung hiefür lautet:

Die infinitesimalen Transformationen $C_\varrho(f)$ müssen identischen Gleichungen der Form

$$C_\varrho C_\sigma(f) - C_\sigma C_\varrho(f) = \sum_{\tau=1}^{r} \varepsilon_\tau^{\varrho\sigma} C_\tau(f) \quad \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots r$$

genügen, wo die $\varepsilon_\tau^{\varrho\sigma}$ Constante sind.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich die Gesammtheit der infinitesimalen Transformationen der Form

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

[1]) Ueber allgemeine Invariantensysteme: diese Berichte 1888, S. 103.

auf Grund der Eigenschaften der zu $C(f)$ gehörigen charakteristischen Determinante

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} c_{11} - \omega & c_{12} & c_{13} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \omega & c_{23} & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & & & c_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

in drei Classen geteilt.

Ich nenne $C(f)$ regulär von der ersten Art, wenn die charakterische Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ keine von Null verschiedene Wurzel besitzt, ich nenne $C(f)$ regulär von der zweiten Art, wenn die Determinante $\Delta(\omega)$ keinen Elementartheiler höherer Ordnung besitzt und nur für ganzzahlige Werthe vor ω verschwindet. In allen anderen Fällen heisst $C(f)$ irregulär.

Ist $C(f)$ irregulär, so kann man stets eine Anzahl regulärer infinitesimaler Transformationen

$$K_0(f) \quad K_1(f) \ldots \quad K_r(f)$$

von denen die erste von der ersten Art ist, während die übrigen von der zweiten Art sind, in der Weise bestimmen, dass

$$C(f) = \gamma_0 K_0(f) + \gamma_1 K_1(f) \ldots + \gamma_r K_r(f)$$

wo $\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_r$ Constante sind.

Jede rationale Function von $x_1 x_2 \ldots x_n$, die der Differentialgleichung $C(f) = 0$ genügt, genügt auch den Differentialgleichungen

$$K_0(f) = 0 \quad K_1(f) = 0 \ .\ . \ K_r(f) = 0$$

Eine lineare und homogene Gruppe bezeichne ich als regulär, wenn die sie erzeugenden infinitesimalen Transformationen so gewählt werden können, dass eine jede regulär ist. In diesem Fall können die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe als rationale Functionen einer Anzahl von verfügbaren Parametern dargestellt werden und umgekehrt gilt der Satz: wenn zwischen den Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe nur algebraische Relationen bestehen, so ist die Gruppe regulär.

Ich setze voraus, die Gruppe G, die durch die infinitesimalen Transformationen $C_\varrho(f)$ erzeugt wird, sei regulär. Hiedurch wird die Allgemeinheit der Untersuchung in keiner Weise beschränkt.

II.

Ganze Functionen zeigen gegenüber den regulären infinitesimalen Transformationen erster und zweiter Art ein durchaus verschiedenes Verhalten.

Ist die infinitesimale Transformation $C(f)$ regulär von der ersten Art, so kann man für jede ganze Function f eine Zahl ν der Art bestimmen, dass $C^\nu(f) = 0$ während $C^{\nu-1}(f)$ von Null verschieden ist. [1])

Solange die Variabeln x von einander unabhängig sind, verschwinden mit dem Ausdruck $C^\nu(f)$ selbstverständlich auch die Ausdrücke $C^{\nu+1}(f)$ $C^{\nu+2}(f)$ u. s. w. Dies gilt aber auch in dem Fall, dass zwischen den Variabeln invariantive Relationen bestehen, denn alsdann besteht gleichzeitig mit der Gleichung $F = 0$ auch die Gleichung $C(F) = 0$,

Der Beweis der oben aufgestellten Behauptung beruht auf einer Transformation der infinitesimalen Transformation $C(f)$, zu der man auf folgendem Weg gelangt:

Die charakteristische Determinante

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} c_{11}-\omega & c_{12} & \cdot\;\cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\omega & \cdot\;\cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot\;\cdot & c_{nn}-\omega \end{vmatrix}$$

besitzt nur Elementartheiler der Form r^e. Die Exponenten dieser Elementartheiler seien der Reihe nach $e_1\, e_2 \ldots e_m$. Man kann nun n^2 Grössen $[g\,h\,\lambda]$ mit nicht verschwindender Determinante der Art bestimmen[2]), dass

[1]) Ich setze zur Abkürzung in üblicher Weise

$$CC(f) = C^2(f) \qquad CCC(f) = C^3(f) \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist zweckmässig überdies festzusetzen $C^0(f) = f$.

[2]) Den Beweis habe ich in meiner Inauguraldissertation (Strassburg 1886) gegeben.

$$\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda\mu}\,[1\,h\,\lambda] = 0 \qquad \mu = 1, 2, \ldots n$$
$$h = 1, 2, \ldots m$$
$$\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda\mu}\,[g\,h\,\lambda] = (g-1)\,[g-1\;h\,\mu] \qquad g = 2, 3, \ldots e_h$$

Man kann die beiden Formelgruppen in eine zusammenziehen, wenn man $m\,n$ Grössen $[0\,h\,\lambda]$ einführt, auf deren Werthe es nicht ankommt, da sie aus den Formeln wegfallen.

Ich führe nun neue Variable ein mittelst der Substitution:

$$y_{gh} = \sum_{\lambda=1}^{n} [g\,h\,\lambda]\,x_\lambda$$

Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = \sum_{h=1}^{m} \sum_{g=1}^{e_h} \frac{\partial f}{\partial y_{gh}}\,[g\,h\,\lambda]$$

Folglich

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\,x_\mu = \sum_{h=1}^{m} \sum_{g=1}^{e_h} \sum_{\mu=1}^{n} (g-1)\,[g-1\;h\,\mu]\,x_\mu \frac{\partial f}{\partial y_{gh}}$$
$$= \sum_{h=1}^{m} \sum_{g=1}^{e_h} (g-1)\,y_{g-1\,h} \frac{\partial f}{\partial y_{gh}}$$

Oder ausgeschrieben

$$C(f) = \sum_{h=1}^{m} \left[y_{1h} \frac{\partial f}{\partial y_{2h}} + 2\,y_{2h} \frac{\partial f}{\partial y_{3h}} + 3\,y_{3h} \frac{\partial f}{\partial y_{4h}} \cdots + (e_h - 1)\,y_{e_h - 1\,h} \frac{\partial f}{\partial y_{e_h h}} \right]$$

Infinitesimale Transformationen dieser Form sind aus der Theorie der Binärformen bekannt.[1]) Man bezeichnet in dieser Theorie bekanntlich als Gewicht eines Productes

[1]) Die Differentialgleichung $C(f) = 0$ ist identisch mit der Aronhold'schen Differentialgleichung

$$D_{21}^{(1)}(f) + D_{21}^{(2)}(f) \;\ldots\ldots + D_{21}^{(m)}(f) = 0$$

die sich auf das System der m Binärformen

$$y_{1h}\,\xi^{e_h - 1} + (e_h - 1)\,y_{2h}\,\xi^{e_h - 2}\,\eta + \frac{(e_h - 1)(e_h - 2)}{1 \cdot 2}\,y_{3h}\,\xi^{e_h - 3}\,\eta^2 + \ldots$$

$h = 1, 2, \ldots m$ bezieht. Es genügen derselben bekanntlich die leitenden Coefficienten der Covarianten — die Semiinvarianten — des Formensystems.

$$P = \prod_{h=1}^{m} \prod_{g=1}^{e_h} y_{gh}^{\lambda_{gh}}$$

wo die λ_{gh} ganze nicht negative Zahlen sind, die Summe

$$p = \sum_{h=1}^{m} [\lambda_{2h} + 2\lambda_{3h} + 3\lambda_{4h} \dots + (e_h - 1)\lambda_{e_h h}]$$

Das Gewicht des Ausdrucks $C(P)$ ist mindestens um eine Einheit geringer als das Gewicht von P, es ist daher sicher $C^{p+1}(P) = 0$ und hieraus ergibt sich die Richtigkeit der oben aufgestellten Behauptung.

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt:
eine ganze Function f kann keiner Gleichung der Form

$$\gamma_0 f + \gamma_1 C(f) + \gamma_2 C^2(f) \dots + \gamma_\mu C^\mu(f) = 0$$

genügen, wo die γ Constante sind.

Ist nämlich $C^\nu(f) = 0$ aber $C^{\nu-1}(f)$ von Null verschieden, so ergibt sich durch Anwendung der Operation $C^{\nu-1}(f)$ $\gamma_0 = 0$; die Operation $C^{\nu-2}(f)$ ergibt $\gamma_1 = 0$ u. s. w.

Die bisherigen Ausführungen gelten gleichviel, ob die Variabeln x von einander unabhängig sind, oder ob sie einem invariantiven Gleichungssystem genügen. Sind sie von einander unabhängig, so gilt der weitere Satz:

Genügt das Product oder der Quotient zweier relativ primer ganzer Functionen der Differentialgleichung $C(f) = 0$, so genügt eine jede der beiden Functionen selbst dieser Differentialgleichung.

Aus

$$C(\varphi\psi) = \varphi C(\psi) + \psi C(\varphi) = 0$$

folgt nämlich

$$C(\varphi) = \gamma\varphi \quad C(\psi) = -\gamma\psi$$

wo γ eine Constante ist.

Aber diese Relationen erfordern $\gamma = 0$.

Nehmen wir nunmehr an, die infinitesimale Transformation $C(f)$ sei regulär von der zweiten Art. In diesem Fall gelten die beiden Sätze:

1. Genügt eine ganze Function f der Differentialgleichung $C'(f) = kf$, so muss k eine ganze Zahl sein.

Ich bezeichne eine ganze Function dieser Art als ausgezeichnete Function und k als ihren Index.

2. Zwei ganze Functionen f und f' können — sofern f' nicht verschwindet — nicht Differentialgleichungen der Form

$$C(f) = kf + f' \qquad C(f') = kf'$$

genügen.

Der Beweis wird wieder vermittelst einer Transformation der infinitesimalen Transformation $C'(f)$ geführt.

Es gibt im vorliegenden Fall n^2 Grössen $[\nu\lambda]$ mit nicht verschwindender Determinante, die den Gleichungen genügen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda\mu} [\nu\lambda] = \omega_\nu [\nu\mu] \qquad \nu, \mu = 1, 2, .. n$$

Die n Grössen ω_ν sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\Delta(\omega) = 0$, die zur infinitesimalen Transformation $C'(f)$ gehört, also ganze Zahlen.

Es können sich darunter beliebig viele einander gleiche befinden.

Ich führe nun neue Variable ein durch die Substitution

$$y_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} [\nu\lambda] x_\lambda \qquad \nu = 1, 2 ... n$$

Es ergibt sich

$$C'(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu} y_\nu$$

Nehmen wir zunächst an, die Variabeln seien von einander unabhängig. In diesem Fall ist ohne weiteres klar, dass die ganze Function f dann und nur dann ausgezeichnete Function ist, wenn für alle Glieder Constans $\times\, y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} .. y_n^{\lambda_n}$, aus denen sie sich zusammensetzt, die Summe $\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 .. + \lambda_n \omega_n$ einen und denselben Wert k hat. Diese ganze Zahl k ist der Index der Function.

Es ist ferner klar, dass sich jede ganze Function als Summe einer Anzahl ausgezeichneter Functionen darstellen lässt.

Nehmen wir nun einen Augenblick an, es sei

$$C(f) = kf + f' \qquad C(f') = kf'$$

also

$$C^2(f) - 2k\,C(f) + k^2 f = 0$$

Auch in diesem Fall kann f nur solche Glieder Constante $\times\, y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \ldots y_n^{\lambda_n}$ enthalten, für die $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \ldots + \lambda_n\omega_n = k$. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so $C(f) = kf$ und $f' = 0$ entgegen der gemachten Voraussetzung.

Nehmen wir nunmehr an, die Variabeln x und also auch die Variabeln y genügen einem System invariantiver Gleichungen.

Wir machen von der eben gemachten Bemerkung Gebrauch, dass sich jede ganze Function f als Summe einer Anzahl von ganzen Functionen $\varphi_1\,\varphi_2 \ldots \varphi_\varrho$ darstellen lässt, von denen jede bei unbeschränkter Variabilität der Grössen y einer Differentialgleichung der Form

$$C(\varphi_\sigma) = k_\sigma\,\varphi_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots \varrho)$$

genügt. Die Darstellung der Function f durch die Function φ kann man so einrichten, dass unter den Indices k_σ keine zwei einander gleich sind, und dass keine der ϱ Functionen φ infolge der Relationen zwischen den Variabeln verschwindet.

Unter dieser Voraussetzung können die Functionen φ keiner linearen Relation

$$F = \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2 \ldots + \gamma_\varrho\varphi_\varrho = 0$$

mit constanten Coefficienten γ genügen. Denn mit $F = 0$ bestehen auch die Gleichungen

$$C(F) = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} k_\sigma\,\gamma_\sigma\,\varphi_\sigma = 0 \qquad C^2(F) = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} k_\sigma^2\,\gamma_\sigma\,\varphi_\sigma = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

und diese erfordern unter den gemachten Voraussetzungen, dass alle Constanten γ verschwinden.

Nun ist

$$C(f) - kf = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} (k_\sigma - k)\,\varphi_\sigma$$

und

$$C^2(f) - 2k\,C(f) + k^2 f = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} (k_\sigma - k)^2\,\varphi_\sigma$$

Es ist sonach ersichtlich:

Die Gleichung $C(f) = kf$ erfordert $\varrho = 1$ $f = q_1$ $k = k_1$.

Die Forderung $C^2(f) - 2k\,C(f) + k^2 f = 0$ $C(f) - kf$ von Null verschieden führt zu einem Widerspruch.

Aus dem Vorangehenden ergibt sich, dass sich jede ganze Function, die der Gleichung $C(f) = kf$ bei Berücksichtigung der Relationen zwischen den Variabeln genügt, als ganze Function darstellen lässt, die derselben Differentialgleichung auch bei unbeschränkter Variabilität der Grössen y genügt.

III.

Nunmehr kann man die Endlichkeit eines Invariantensystems, das durch eine einzige reguläre Differentialgleichung zweiter Art bestimmt wird, leicht beweisen.

Auf Grund des Fundamentaltheorems des Herrn Hilbert lassen sich alle ganzen Invarianten[1]) unseres Systems als lineare und homogene Functionen einer endlichen Anzahl derselben $i_1\, i_2 \ldots i_m$ darstellen. Die Coefficienten dieser Linearformen sind ganze Functionen der Variabeln x.

Nach Herrn Hilberts Vorgang beweisen wir zunächst:

Die Darstellung lässt sich so einrichten, dass die auftretenden Coefficienten ebenfalls ganze Invarianten sind. Diese Coefficienten kann man dann ebenfalls als lineare und homogene Functionen von $i_1\, i_2 \ldots i_m$ der Art darstellen, dass die Coefficienten wieder ganze Invarianten sind. In dieser Weise fortfahrend überzeugt man sich von der Richtigkeit des Satzes.

Es sei nun

$$J = a_1\, i_1 + a_2\, i_2\ \ldots\ + a_m\, i_m$$

eine beliebige ganze Invariante des Systems; $a_1\, a_2 \ldots a_m$ sind ganze Functionen der Variabeln x.

Die Coefficienten a lassen sich als lineare und homogene Functionen einer Anzahl von ausgezeichneten Functionen $q_1\, q_2 \ldots q_\varrho$

[1]) Es ist allgemein üblich, rationale Functionen, die invariant sind, als „rationale Invarianten" zu bezeichnen. Dementsprechend bezeichne ich invariante ganze Functionen als „ganze Invarianten".

der Art darstellen, dass die Coefficienten Constante sind. Sei etwa

$$a_\mu = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} a_{\mu\sigma}\,\varphi_\sigma \qquad \mu = 1, 2, \ldots m$$

wo die $a_{\mu\sigma}$ Constante sind.

Die Indices der ausgezeichneten Functionen $\varphi_1\,\varphi_2\ldots\varphi_\varrho$ bezeichne ich wieder mit $k_1\,k_2\ldots k_\varrho$. Unter denselben können beliebig viele einander gleiche vorkommen.

Sind alle Indices gleich Null, so sind alle Coefficienten a Invarianten. Nehmen wir an, es sei wenigstens k_ϱ von Null verschieden. Nun ist wegen

$$C(J) = 0 \qquad \text{und} \qquad C(i_\mu) = 0$$

auch

$$\sum_{\mu=1}^{m} C(a_\mu)\, i_\mu = 0$$

also

$$J = \sum_{\mu=1}^{m} \left[a_\mu - \frac{1}{k_\varrho}\, C(a_\mu) \right] i_\mu$$

und

$$a_\mu - \frac{1}{k_\varrho}\, C(a_\mu) = \sum_{\sigma=1}^{\varrho-1} \left(1 - \frac{k_\sigma}{k_\varrho}\right) a_{\mu\sigma}\,\varphi_\sigma$$

Die in der neuen Darstellung von J auftretenden Coefficienten $a_\mu - \frac{1}{k_\varrho}\,C(a_\mu)$ lassen sich somit als Summen von höchstens $\varrho - 1$ ausgezeichneten Functionen darstellen. Man kann offenbar das eben angewendete Verfahren solange fortsetzen, bis man zu einer Darstellung von J gelangt, bei der nur mehr Invarianten als Coefficienten auftreten.

Mit Hilfe des Hilbert'schen Verfahrens kann man auch leicht zeigen, dass sich alle ausgezeichneten Functionen als ganze Functionen einer gewissen Anzahl derselben darstellen lassen.

IV.

Da die ganzen Invarianten, die durch eine reguläre Differentialgleichung erster Art bestimmt sind, als Semiinvarianten eines Systems von Binärformen betrachtet werden können, so ergibt sich die Endlichkeit des Formensystems aus dem Gordan'schen Satz, sofern die Grössen x von einander unabhängig sind. Dagegen bleibt der Fall, dass Relationen zwischen ihnen bestehen, noch zu erledigen.

Geht man von der in Art. II nachgewiesenen Normalform der regulären infinitesimalen Transformation erster Art aus:

$$C(f) = \sum_{h=1}^{m} \left[y_{1h} \frac{\partial f}{\partial y_{2h}} + 2 y_{2h} \frac{\partial f}{\partial y_{3h}} \ldots + (e_h - 1)\, y_{e_h - 1\, h} \frac{\partial f}{\partial y_{e_h h}} \right]$$

so erkennt man: es gibt eine reguläre infinitesimale Transformation zweiter Art

$$A(f) = \sum_{h=1}^{m} \left[(e_h - 1)\, y_{1h} \frac{\partial f}{\partial y_{1h}} + (e_h - 3)\, y_{2h} \frac{\partial f}{\partial y_{2h}} \ldots - (e_h - 3)\, y_{e_h - 1\, h} \frac{\partial f}{\partial y_{e_h - 1\, h}} \right.$$
$$\left. - (e_h - 1)\, y_{e_h h} \frac{\partial f}{\partial y_{e_h h}} \right]$$

und eine reguläre infinitesimale Transformation erster Art

$$B(f) = \sum_{h=1}^{m} \left[(e_h - 1)\, y_{2h} \frac{\partial f}{\partial y_{1h}} + (e_h - 2)\, y_{3h} \frac{\partial f}{\partial y_{2h}} \ldots + y_{e_h h} \frac{\partial f}{\partial y_{e_h - 1\, h}} \right]$$

die den identischen (für beliebige Functionen f giltigen) Gleichungen genügen:[1])

---

[1]) Aronhold gebraucht für die infinitesimalen Transformationen $A(f)$ $B(f)$ $C(f)$ die Bezeichnungen

$$\sum_{h=1}^{m} \left[D_{11}^{(h)}(f) - D_{22}^{(h)}(f) \right] \quad \sum_{h=1}^{m} D_{12}^{(h)}(f) \quad \sum_{h=1}^{m} D_{21}^{(h)}(f)$$

— Es ist zu bemerken: einer bestimmten Normalform von $C(f)$ entsprechen bestimmte infinitesimale Transformationen $A(f)$ und $B(f)$. Weil aber die Transformation von $C(f)$ in die Normalform von willkürlich zu wählenden Parametern abhängt, so sind die der infinitesimalen Transformation $C(f)$ zu adjungirenden Transformationen $A(f)$ und $B(f)$ nicht vollkommen bestimmt.

$$(1)\quad AB(f)-BA(f)=-2B(f)\quad AC(f)-CA(f)=2C(f)$$
$$CB(f)-BC(f)=A(f)$$

Zwischen den infinitesimalen Transformationen $A(f)B(f)C(f)$ finden eine Reihe von bemerkenswerthen Beziehungen statt. Sie ergeben sich — was einer später zu machenden Anwendung wegen (Art. IV) betont werden muss — aus den Gleichungen (1), ohne dass es nöthig wäre, auf die oben angegebenen expliciten Ausdrücke dieser infinitesimalen Transformationen zurückzugreifen.

Es ist für eine beliebige Function f

$$(2)\quad AB^\nu(f)-B^\nu A(f)=-2\nu B^\nu(f)\quad AC^\nu(f)-C^\nu A(f)=2\nu C^\nu(f)$$
$$C^\nu B(f)-BC^\nu(f)=\nu C^{\nu-1}A(f)+\nu(\nu-1)C^{\nu-1}(f)$$
$$B^\nu C(f)-CB^\nu(f)=-\nu B^{\nu-1}A(f)+\nu(\nu-1)B^{\nu-1}(f)$$

Man beweist diese Gleichungen leicht durch den Schluss von ν auf $\nu+1$.

Nehmen wir nunmehr an, f sei ganze Function und es sei $A(f)=kf$, also f der infinitesimalen Transformation $A(f)$ gegenüber ausgezeichnete Function, dann gilt für $\lambda<\mu$ die Gleichung

$$(3)\qquad C^\mu B^\lambda(f)-B^\lambda C^\mu(f)=\sum_{\sigma=1}^{\lambda}\gamma_\sigma(\mu,\lambda,k)\,B^{\lambda-\sigma}C^{\mu-\sigma}(f)$$

Hier ist

$$\gamma_\sigma(\mu,\lambda,k)=(\sigma!)^2(\mu)_\sigma(\lambda)_\sigma(\mu-\lambda+k)_\sigma$$

Man beweist diese Gleichung leicht durch den Schluss von λ auf $\lambda+1$.

Nehmen wir nun an, es sei $C^\nu(f)=0$ aber $C^{\nu-1}(f)$ von Null verschieden und es sei λ die kleinste Zahl, für die die Gleichung $B^\lambda(f)=0$ besteht.

Setzen wir $\mu=\lambda+\nu-1$, dann verschwinden in der Gleichung (3) die beiden Glieder auf der linken Seite und auf der rechten Seite alle Glieder mit Ausnahme des letzten $\gamma_\lambda(\lambda+\nu-1,\lambda,k)\,C^{\nu-1}(f)$. Nun ist

$$\gamma_\lambda(\lambda+\nu-1,\lambda,k)=(\lambda!)^2(\lambda+\nu-1)_\lambda(\nu-1+k)_\lambda$$

IV.

Da die ganzen Invarianten, die durch eine reguläre Differentialgleichung erster Art bestimmt sind, als Semiinvarianten eines Systems von Binärformen betrachtet werden können, so ergibt sich die Endlichkeit des Formensystems aus dem Gordan'schen Satz, sofern die Grössen x von einander unabhängig sind. Dagegen bleibt der Fall, dass Relationen zwischen ihnen bestehen, noch zu erledigen.

Geht man von der in Art. II nachgewiesenen Normalform der regulären infinitesimalen Transformation erster Art aus:

$$C(f) = \sum_{h=1}^{m} \left[y_{1h} \frac{\partial f}{\partial y_{2h}} + 2 y_{2h} \frac{\partial f}{\partial y_{3h}} \ldots + (c_h - 1) y_{c_h - 1\, h} \frac{\partial f}{\partial y_{c_h h}} \right]$$

so erkennt man: es gibt eine reguläre infinitesimale Transformation zweiter Art

$$A(f) = \sum_{h=1}^{m} \left[(c_h - 1) y_{1h} \frac{\partial f}{\partial y_{1h}} + (c_h - 3) y_{2h} \frac{\partial f}{\partial y_{2h}} \ldots - (c_h - 3) y_{c_h - 1\, h} \frac{\partial f}{\partial y_{c_h - 1\, h}} \right.$$
$$\left. - (c_h - 1) y_{c_h h} \frac{\partial f}{\partial y_{c_h h}} \right]$$

und eine reguläre infinitesimale Transformation erster Art

$$B(f) = \sum_{h=1}^{m} \left[(c_h - 1) y_{2h} \frac{\partial f}{\partial y_{1h}} + (c_h - 2) y_{3h} \frac{\partial f}{\partial y_{2h}} \ldots + y_{c_h h} \frac{\partial f}{\partial y_{c_h - 1\, h}} \right]$$

die den identischen (für beliebige Functionen f giltigen) Gleichungen genügen:[1])

[1]) Aronhold gebraucht für die infinitesimalen Transformationen $A(f)$ $B(f)$ $C(f)$ die Bezeichnungen

$$\sum_{h=1}^{m} \left[D_{11}^{(h)}(f) - D_{22}^{(h)}(f) \right] \quad \sum_{h=1}^{m} D_{12}^{(h)}(f) \quad \sum_{h=1}^{m} D_{21}^{(h)}(f)$$

Es ist zu bemerken: einer bestimmten Normalform von $C(f)$ entsprechen bestimmte infinitesimale Transformationen $A(f)$ und $B(f)$. Weil aber die Transformation von $C(f)$ in die Normalform von willkürlich zu wählenden Parametern abhängt, so sind die der infinitesimalen Transformation $C(f)$ zu adjungirenden Transformationen $A(f)$ und $B(f)$ nicht vollkommen bestimmt.

(1) $AB(f)-BA(f)=-2B(f) \quad AC(f)-CA(f)=2C(f)$
$CB(f)-BC(f)=A(f)$

Zwischen den infinitesimalen Transformationen $A(f)B(f)C(f)$ finden eine Reihe von bemerkenswerthen Beziehungen statt. Sie ergeben sich — was einer später zu machenden Anwendung wegen (Art. IV) betont werden muss — aus den Gleichungen (1), ohne dass es nöthig wäre, auf die oben angegebenen expliciten Ausdrücke dieser infinitesimalen Transformationen zurückzugreifen.

Es ist für eine beliebige Function f

(2) $AB^\nu(f)-B^\nu A(f)=-2\nu B^\nu(f) \quad AC^\nu(f)-C^\nu A(f)=2\nu C^\nu(f)$
$C^\nu B(f)-BC^\nu(f)=\nu C^{\nu-1}A(f)+\nu(\nu-1)C^{\nu-1}(f)$
$B^\nu C(f)-CB^\nu(f)=-\nu B^{\nu-1}A(f)+\nu(\nu-1)B^{\nu-1}(f)$

Man beweist diese Gleichungen leicht durch den Schluss von ν auf $\nu+1$.

Nehmen wir nunmehr an, f sei ganze Function und es sei $A(f)=kf$, also f der infinitesimalen Transformation $A(f)$ gegenüber ausgezeichnete Function, dann gilt für $\lambda<\mu$ die Gleichung

(3) $$C^\mu B^\lambda(f)-B^\lambda C^\mu(f)=\sum_{\sigma=1}^{\lambda}\gamma_\sigma(\mu,\lambda,k)B^{\lambda-\sigma}C^{\mu-\sigma}(f)$$

Hier ist

$$\gamma_\sigma(\mu,\lambda,k)=(\sigma!)^2(\mu)_\sigma(\lambda)_\sigma(\mu-\lambda+k)_\sigma$$

Man beweist diese Gleichung leicht durch den Schluss von λ auf $\lambda+1$.

Nehmen wir nun an, es sei $C^\nu(f)=0$ aber $C^{\nu-1}(f)$ von Null verschieden und es sei λ die kleinste Zahl, für die die Gleichung $B^\lambda(f)=0$ besteht.

Setzen wir $\mu=\lambda+\nu-1$, dann verschwinden in der Gleichung (3) die beiden Glieder auf der linken Seite und auf der rechten Seite alle Glieder mit Ausnahme des letzten $\gamma_\lambda(\lambda+\nu-1,\lambda,k)C^{\nu-1}(f)$. Nun ist

$$\gamma_\lambda(\lambda+\nu-1,\lambda,k)=(\lambda!)^2(\lambda+\nu-1)_\lambda(\nu-1+k)_\lambda$$

Es muss also eine der Zahlen

$$\nu - 1 + k \quad \nu - 2 + k \ldots \quad \nu - \lambda + k$$

gleich Null sein, daher ist

$$1 < \nu + k < \lambda$$

Wenn die Variabeln x von einander unabhängig sind, lässt sich die Beziehung zwischen den Zahlen λ, ν, k noch genauer angeben.

Die Gleichungen (1) bleiben bestehen, wenn man $B(f)$ und $C(f)$ vertauscht und $A(f)$ durch $-A(f)$ ersetzt.

Tritt $-A(f)$ an Stelle von $A(f)$, so tritt $-k$ an Stelle von k. Es gilt daher die der Gleichung (3) entsprechende Gleichung

$$B^{\mu} C^{\nu}(f) - C^{\nu} B^{\mu}(f) = \sum_{\sigma=1}^{\nu} \gamma_{\sigma}(\mu, \nu, -k)\, C^{\nu-\sigma} B^{\mu-\sigma}(f) \qquad \mu \geq \nu$$

Ich setze wieder $\mu = \lambda + \nu - 1$. Es ergibt sich in diesem Fall

$$\gamma_{\nu}(\lambda + \nu - 1, \nu, -k) = (\nu!)^2 (\lambda + \nu - 1)_{\nu} (\lambda - k - 1)_{\nu} = 0$$

und es muss daher eine der Zahlen

$$\lambda - 1 - k \quad \lambda - 2 - k \ldots \quad \lambda - \nu - k$$

gleich Null sein. Es ist also

$$1 + k < \lambda < \nu + k$$

und folglich ist

$$\nu + k = \lambda$$

Diese Schlussweise ist nicht anwendbar, wenn die Variabeln einem Gleichungssystem genügen, das gegenüber der infinitesimalen Transformation $C(f)$ aber nicht gegenüber $B(f)$ invariantiv ist. Denn dann folgt zwar aus dem Verschwinden von $C^{\nu}(f)$ das Verschwinden von $C^{\nu+1}(f)$ $C^{\nu+2}(f)$ u. s. w., aber aus der Gleichung $B^{\lambda}(f) = 0$ folgt nicht $B^{\lambda+1}(f) = 0$.

Die Function $f' = BC(f)$ ist ebenso wie f der infinitesimalen Transformation $A(f)$ gegenüber ausgezeichnet und ihr Index ist ebenfalls $= k$.

Es ergibt sich dies aus den Identitäten

$$A(f') = ABC(f) = (AB - BA)C(f) + B(AC - CA)(f) + BCA(f)$$
$$= -2BC(f) + 2BC(f) + kBC(f) = kf'.$$

Aus (1) folgt

$$AC(f) = (k+2)\,C(f)$$

und aus (2)

$$(C^\nu B - BC^\nu)\,C(f) = \nu(\nu+k+1)\,C^\nu(f)$$

Folglich ist

$$C^\nu(f') = C^\nu BC(f) = \nu(\nu+k+1)\,C^\nu(f) + BC^{\nu+1}(f)$$

Dementsprechend ist für $\nu > 1$

$$C^{\nu-1}(f') = (\nu-1)(\nu+k)\,C^{\nu-1}(f) + BC^\nu(f)$$

Da $\nu + k$ eine ganze positive Zahl ist, so ist $C^\nu(f') = 0$ und wenn $\nu > 1$ $C^{\nu-1}(f')$ von Null verschieden.

Aus dem Bewiesenen folgt:

Unter der Voraussetzung $\nu > 1$ ist die ganze Function $\varphi = f - \frac{1}{(\nu-1)(\nu+k)} BC(f)$ ebenso wie f der infinitesimalen Transformation $A(f)$ gegenüber ausgezeichnet und sie hat denselben Index k. Sie genügt überdies der Differentialgleichung $C^{\nu-1}(\varphi) = 0$.

Nach diesen Vorbereitungen kann man das Hilbert'sche Beweisverfahren anwenden.

Eine jede ganze Invariante J der durch $C(f)$ erzeugten eingliedrigen Gruppe lässt sich als lineare und homogene Function einer gewissen Anzahl derselben $i_1\, i_2 \ldots i_m$ darstellen. Sei etwa

$$J = a_1 i_1 + a_2 i_2 \;\ldots + a_m i_m$$

wo $a_1\, a_2 \ldots a_m$ ganze Functionen der Variabeln x sind. Es kommt wieder nur darauf an zu beweisen, dass sich die Darstellung so einrichten lässt, dass die Coefficienten a ebenfalls ganze Invarianten sind. Wir denken uns diese Coefficienten als lineare und homogene Functionen einer Anzahl in Bezug

auf die infinitesimale Transformation $A(f)$ ausgezeichneter Functionen $\varphi_1\,\varphi_2\,..\,\varphi_\varrho$ dargestellt. Sei

$$a_\mu = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} a_{\mu\sigma}\,\varphi_\sigma \qquad \mu = 1, 2, \,..\, m$$

wo die Coefficienten $a_{\mu\sigma}$ Constante sind.

Der Index der Function φ_σ in Bezug auf $A(f)$ sei k_σ und es sei $C^{\nu_\sigma}(\varphi_\sigma) = 0$ aber $C^{\nu_\sigma - 1}(\varphi_\sigma)$ von Null verschieden. Sind alle Zahlen $\nu_\sigma = 1$, so sind die Coefficienten a Invarianten. Nehmen wir an, eine dieser Zahlen — etwa ν_ϱ — sei > 1. Nun ist wegen $C(J) = 0$ und $C(i_\mu) = 0$

$$\sum_{\mu=1}^{m} BC(a_\mu)\, i_\mu = 0$$

also

$$J = \sum_{\mu=1}^{m} \left[a_\mu - \frac{1}{(\nu_\varrho - 1)(\nu_\varrho + k_\varrho)} BC(a_\mu) \right] i_\mu$$

An Stelle der Functionen φ_σ treten nunmehr die Functionen

$$\psi_\sigma = \varphi_\sigma - \frac{1}{(\nu_\varrho - 1)(\nu_\varrho - k_\varrho)} BC(\varphi_\sigma)$$

Die ψ_σ sind ebenso wie die φ_σ ausgezeichnete Functionen in Bezug auf $A(f)$ und es ist für $\sigma = 1, 2, \,..\, \varrho - 1$ $C^{\nu_\sigma}(\psi_\sigma) = 0$, aber ausserdem ist $C^{\nu_\varrho - 1}(\psi_\varrho) = 0$.

Durch wiederholte Anwendung des eben benützten Verfahrens gelangt man offenbar zu einer Darstellung von J, bei der als Coefficienten nur ganze Invarianten auftreten.

V.

Wir nehmen nun an, der Satz von der Endlichkeit des Formensystems gelte für alle Gruppen, deren Ordnung $< r$ ist, und beweisen, dass er dann auch für alle zusammengesetzten Gruppen von der Ordnung r gilt.

Zu diesem Zweck soll zunächst gezeigt werden:

Besitzt die von den regulären infinitesimalen Transformationen

$$C_1(f) \qquad C_2(f) \;.\;.\;.\; C_r(f)$$

erzeugte Gruppe r^{ter} Ordnung G eine ausgezeichnete Untergruppe Γ, so besitzt sie sicher eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe.

Damit G überhaupt eine ausgezeichnete Untergruppe Γ der Ordnung ϱ besitzt, ist erforderlich, dass man ϱ linear unabhängige in der Gruppe G enthaltene infinitesimale Transformationen

$$K_1(f) \qquad K_2(f) \;.\;.\;.\; K_\varrho(f)$$

der Art bestimmen kann, dass

$$C_\lambda K_\mu(f) - K_\mu C_\lambda(f) = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \delta_\nu^{\lambda\mu} K_\nu(f) \quad \lambda = 1,2,..r;\; \mu = 1,2..\varrho$$

wo die $\delta_\nu^{\lambda\mu}$ Constante sind.

Es kann der Fall eintreten, dass jede der Untergruppe Γ angehörende Substitution T mit jeder Substitution S der Gruppe G vertauschbar ist, dass also $ST = TS$. In diesem Fall müssen alle Constanten $\delta_\nu^{\lambda\mu}$ verschwinden und es ist demnach auch jede infinitesimale Transformation $K_\mu(f)$ von Γ mit jeder infinitesimalen Transformation $C_\lambda(f)$ von G vertauschbar.

Nehmen wir nun an, die Gruppe Γ sei nicht regulär und $K_1(f)$ sei eine ihr angehörende nicht reguläre infinitesimale Transformation. Jede derartige infinitesimale Transformation lässt sich als Summe einer Anzahl regulärer Transformationen

$$L_1(f) \qquad L_2(f) \;.\;.\;.\; L_k(f)$$

darstellen (vergl. Art. I). Alle diese infinitesimalen Transformationen gehören der Gruppe G an.

Man kann nun leicht beweisen: ist eine beliebige infinitesimale Transformation $C(f)$ mit $K_1(f)$ vertauschbar, so ist $C(f)$ auch mit jeder der infinitesimalen Transformationen $L_1(f)\, L_2(f) \,..\, L_k(f)$ vertauschbar. Die Gesammtheit der regulären Transformationen $L(f)$, zu denen man durch Zerlegung der ϱ Transformationen $K_\mu(f)$ gelangt, erzeugen offenbar eine reguläre Gruppe Γ', der folgende Eigenschaften zukommen:

1. Jede in Γ' enthaltene infinitesimale Transformation ist mit jeder in G enthaltenen infinitesimalen Transformation vertauschbar.

2. Γ' ist entweder ausgezeichnete Untergruppe von G oder Γ' fällt mit G zusammen.

Im letzteren Fall sind je zwei infinitesimale Transformationen von G mit einander vertauschbar und beliebige ϱ reguläre Transformationen von G erzeugen eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe.

Nehmen wir nunmehr an, Γ enthalte Substitutionen, die nicht mit jeder Substitution von G vertauschbar sind. Es sei T eine bestimmte derartige Substitution.

Die allgemeine Substitution der Gruppe G, deren Coefficienten sich als rationale Functionen von r variabeln Parametern $u_1\, u_2 \ldots u_r$ darstellen lassen, bezeichne ich mit $S(u)$. Wir transformiren nun T durch $S(u)$.

Das System (Σ) der transformirten Substitutionen

$$P(u) = S(u)^{-1}\, T\, S(u)$$

hat folgende Eigenschaften:

1. Jede Substitution des Systems gehört der Untergruppe Γ an.

2. Transformirt man eine Substitution von (Σ) durch eine beliebige Substitution der Gruppe G, so gehört die Transformirte wieder dem System (Σ) an. Dieses System ist also in der Gesammtgruppe ausgezeichnet.

3. Das System (Σ) ist durch ein irreducibles System algebraischer Gleichungen bestimmt, denen die Coefficienten der allgemeinen Substitution $P(u)$ genügen. Man gelangt zu diesen Gleichungen durch Elimination der rational auftretenden Parameter u.

Bilden die Substitutionen des Systems (Σ) eine Gruppe — was im Fall $\varrho = 1$ nothwendig eintritt — so haben wir in (Σ) eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe von G. Ist dies nicht der Fall, so setzen wir zwei allgemeine Substitutionen

von (Σ) $P(u)$ und $P(v)$, die zwei verschiedenen Systemen variabler Parameter entsprechen, zu einer Substitution

$$Q(u|v) = P(u)\,P(v)$$

zusammen. Auch das System (Σ') der Substitutionen $Q(u|v)$ besitzt die oben genannten drei charakteristischen Eigenschaften. Die Anzahl der Coefficienten von $Q(u|v)$, über die durch geeignete Bestimmung der Parameter $u_1\,u_2\,..\,u_r\;v_1\,v_2\,..\,v_r$ verfügt werden kann, ist mindestens um eins grösser als die Anzahl der verfügbaren Coefficienten von $P(u)$. Hat das System (Σ') Gruppencharakter, so ist (Σ') eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe von G. Andernfalls bilden wir das System (Σ''), das die Substitutionen

$$R(u|v|w|t) = Q(u|v)\,Q(w|t)$$

umfasst u. s. w. Auf diesem Weg fortschreitend, müssen wir schliesslich zu einer regulären ausgezeichneten Untergruppe von G gelangen.

Nunmehr können und wollen wir voraussetzen, die ausgezeichnete Untergruppe Γ sei regulär. Wir wollen ferner annehmen, die infinitesimalen Transformationen

$$C_1(f) \quad C_2(f)\;.\;.\;.\; C_r(f)$$

seien so gewählt, dass eine jede regulär ist, und dass

$$C_{r-\varrho+1}(f) \quad C_{r-\varrho+2}\;.\;.\;.\; C_r(f)$$

der Untergruppe Γ angehören. Es bestehen dann Relationen der Form

$$C_\lambda C_\mu(f) - C_\mu C_\lambda(f)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\varrho} \varepsilon_\nu^{\lambda\mu}\, C_{r-\varrho+1}(f) \quad \lambda = 1, 2, \dots r;\; \mu = r-\varrho+1,\; r-\varrho+2, \dots r$$

Ist nun f Invariante der Untergruppe Γ, so ist $C_\mu\, C_\lambda(f) = 0$. Daraus ergibt sich: Ist f ganze Invariante der Untergruppe Γ, so gilt dasselbe für jede der Functionen

$$C_\lambda(f) \quad (\lambda = 1, 2, \dots r-\varrho)$$

Nach Voraussetzung lassen sich alle ganzen Invarianten

1. Jede in Γ' enthaltene infinitesimale Transformation ist mit jeder in G enthaltenen infinitesimalen Transformation vertauschbar.

2. Γ' ist entweder ausgezeichnete Untergruppe von G oder Γ' fällt mit G zusammen.

Im letzteren Fall sind je zwei infinitesimale Transformationen von G mit einander vertauschbar und beliebige ϱ reguläre Transformationen von G erzeugen eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe.

Nehmen wir nunmehr an, Γ' enthalte Substitutionen, die nicht mit jeder Substitution von G vertauschbar sind. Es sei T eine bestimmte derartige Substitution.

Die allgemeine Substitution der Gruppe G, deren Coefficienten sich als rationale Functionen von r variabeln Parametern $u_1\, u_2 \,..\, u_r$ darstellen lassen, bezeichne ich mit $S(u)$. Wir transformiren nun T durch $S(u)$.

Das System (Σ) der transformirten Substitutionen

$$P(u) = S(u)^{-1}\, T S(u)$$

hat folgende Eigenschaften:

1. Jede Substitution des Systems gehört der Untergruppe Γ' an.

2. Transformirt man eine Substitution von (Σ) durch eine beliebige Substitution der Gruppe G, so gehört die Transformirte wieder dem System (Σ) an. Dieses System ist also in der Gesammtgruppe ausgezeichnet.

3. Das System (Σ) ist durch ein irreducibles System algebraischer Gleichungen bestimmt, denen die Coefficienten der allgemeinen Substitution $P(u)$ genügen. Man gelangt zu diesen Gleichungen durch Elimination der rational auftretenden Parameter u.

Bilden die Substitutionen des Systems (Σ) eine Gruppe — was im Fall $\varrho = 1$ nothwendig eintritt — so haben wir in (Σ) eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe von G. Ist dies nicht der Fall, so setzen wir zwei allgemeine Substitutionen

von (Σ) $P(u)$ und $P(v)$, die zwei verschiedenen Systemen variabler Parameter entsprechen, zu einer Substitution

$$Q(u|v) = P(u)\,P(v)$$

zusammen. Auch das System (Σ') der Substitutionen $Q(u|v)$ besitzt die oben genannten drei charakteristischen Eigenschaften. Die Anzahl der Coefficienten von $Q(u|v)$, über die durch geeignete Bestimmung der Parameter $u_1\, u_2 \ldots u_r\;\, v_1\, v_2 \ldots v_r$ verfügt werden kann, ist mindestens um eins grösser als die Anzahl der verfügbaren Coefficienten von $P(u)$. Hat das System (Σ') Gruppencharakter, so ist (Σ') eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe von G. Andernfalls bilden wir das System (Σ''), das die Substitutionen

$$R(u|v|w|t) = Q(u|v)\,Q(w|t)$$

umfasst u. s. w. Auf diesem Weg fortschreitend, müssen wir schliesslich zu einer regulären ausgezeichneten Untergruppe von G gelangen.

Nunmehr können und wollen wir voraussetzen, die ausgezeichnete Untergruppe Γ sei regulär. Wir wollen ferner annehmen, die infinitesimalen Transformationen

$$C_1(f) \qquad C_2(f) \;\ldots\; C_r(f)$$

seien so gewählt, dass eine jede regulär ist, und dass

$$C_{r-\varrho+1}(f) \qquad C_{r-\varrho+2} \;\ldots\; C_r(f)$$

der Untergruppe Γ angehören. Es bestehen dann Relationen der Form

$$C_\lambda C_\mu(f) - C_\mu C_\lambda(f)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\varrho} \varepsilon_\nu^{\lambda\mu}\, C_{r-\varrho+1}(f) \quad \lambda = 1, 2, \ldots r;\; \mu = r-\varrho+1,\; r-\varrho+2, \ldots r$$

Ist nun f Invariante der Untergruppe Γ, so ist $C_\mu\, C_\lambda(f) = 0$. Daraus ergibt sich: Ist f ganze Invariante der Untergruppe Γ, so gilt dasselbe für jede der Functionen

$$C_\lambda(f) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r-\varrho)$$

Nach Voraussetzung lassen sich alle ganzen Invarianten

der Gruppe Γ, deren Ordnung $\varrho < r$ ist, als ganze Functionen einer Anzahl derselben $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_\sigma$ ausdrücken.

Durch wiederholte Anwendung der Operation $C_\lambda(f)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots r - \varrho)$ auf diese Functionen erhalten wir nun ganze Invarianten der Gruppe Γ. Da aber der Grad von $C_\lambda(f)$ in den Variabeln x nicht höher sein kann als der von f, so ist klar, dass sich alle Functionen, zu denen man auf diesem Weg gelangt, als lineare und homogene Functionen einer Anzahl derselben $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m$ der Art darstellen lassen, dass die Coefficienten der Linearformen Constante sind. Es bestehen daher für die Functionen φ_μ Gleichungen der Form:

$$C_\lambda(\varphi_\mu) = \sum_{\nu=1}^{m} a_{\lambda\mu\nu}\, \varphi_\nu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots r - \varrho\,; \; \mu = 1, 2, \ldots m$$

wo $a_{\lambda\mu\nu}$ eine Constante ist.

Da sich jede ganze Invariante f von G als ganze Function von $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_\sigma$ darstellen lässt, so ist

$$C_\lambda(f) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} x_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa} c_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_\mu} x_\nu$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} C_\lambda(\varphi_\varkappa) \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \sum_{\nu=1}^{m} a_{\lambda\varkappa\nu}\, \varphi_\nu \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa}$$

Den Ausdruck $\sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \sum_{\nu=1}^{m} a_{\lambda\varkappa\nu}\, \varphi_\nu \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa}$ bezeichne ich mit $\overline{C}_\lambda(f)$.

Die $r - \varrho$ infinitesimalen Transformationen $\overline{C}_\lambda(f)$ erzeugen eine lineare Gruppe $\overline{G}$ der Ordnung $r - \varrho$, die mit G isomorph ist. Die Gruppe $\overline{G}$ ist regulär, denn sie lässt sich aus der regulären Gruppe G durch algebraische Operationen ableiten.

Da die Anzahl m der Functionen φ im Allgemeinen grösser als die Anzahl der von einander unabhängigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$C_{r-\varrho+1}(f) = 0 \quad C_{r-\varrho+2}(f) = 0 \ldots \quad C_r(f) = 0$$

ist, so werden zwischen den Functionen φ algebraische Gleichungen bestehen. Weitere Relationen zwischen diesen Functionen

ergeben sich, wenn die Variabeln x nicht von einander unabhängig sind, sondern einem System invariantiver Gleichungen

$$(F) \qquad F_1 = 0 \qquad F_2 = 0 \;\ldots\ldots$$

genügen. Sei nun $\Phi = 0$ eine der Gleichungen, denen die Functionen φ genügen. Drückt man die Functionen φ durch ihren Werth in Function der x aus, so muss die Gleichung $\Phi = 0$ entweder identisch oder infolge der Gleichungen (F) erfüllt sein. Auf jeden Fall besteht mit $\Phi = 0$ auch die Gleichung $C_i(\Phi) = 0$ also auch die Gleichung $\bar{C}_\lambda(\Phi) = 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots r - \varrho)$. Das Gleichungssystem, dem die Functionen φ genügen, ist also der Gruppe $\bar{G}$ gegenüber invariantiv. Das allgemeine Invariantensystem der Gruppe G — und ebenso jedes specielle — kann somit auch als specielles Invariantensystem der Gruppe $\bar{G}$ betrachtet werden. Das letztere Invariantensystem ist nach Voraussetzung endlich; dasselbe gilt daher auch für das allgemeine und jedes specielle Invariantensystem der Gruppe G.

VI.

Wir halten an der im vorigen Artikel eingeführten Voraussetzung fest, dass jede Gruppe, deren Ordnung kleiner als r ist, ein endliches System ganzer Invarianten besitzt, und beweisen nunmehr, dass dies auch für jede einfache Gruppe der Ordnung r gilt.

Ich schicke einen Hilfssatz voraus.

Nehmen wir an, zwischen den infinitesimalen Transformationen

$$A(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

$$B(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} b_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

bestehen die identischen Gleichungen

$$AB(f) - BA(f) = -2B(f) \qquad AC(f) - CA(f) = 2C(f)$$
$$CB(f) - BC(f) = A(f)$$

dann sind nothwendig die infinitesimalen Transformationen $B(f)$ und $C(f)$ regulär von der ersten Art, und $A(f)$ ist regulär von der zweiten Art.

Den ersten Teil dieser Behauptung habe ich schon früher bewiesen,[1]) die Richtigkeit des zweiten Teils ergibt sich auf folgendem Weg:

Wir bezeichnen mit k eine Wurzel der zu $A(f)$ gehörigen charakteristischen Gleichung, mit $u_1 u_2 \ldots u_n$ ein Lösungssystem der Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\mu} u_\lambda = k u_\mu \qquad \mu = 1, 2, \ldots n$$

Die Linearform $f = u_1 x_1 + u_2 x_2 \ldots + u_n x_n$ genügt der Gleichung $A(f) = kf$. Nehmen wir an, es sei

$$B^\lambda(f) = 0 \qquad C^\nu(f) = 0$$

dagegen verschwinden die Linearformen $B^{\lambda-1}(f)$ und $C^{\nu-1}(f)$ nicht identisch. Dann ist $k = \lambda - \nu$ (s. Art. IV), also ist jede Wurzel der zu $A(f)$ gehörigen charakteristischen Gleichung eine ganze Zahl.

Nehmen wir nun einen Augenblick an, die charakteristische Determinante der infinitesimalen Transformation $A(f)$ besitze einen zur Wurzel k gehörigen Elementartheiler höherer Ordnung. Man kann dann zwei Werthsysteme $u_1 u_2 \ldots u_n$ und $u'_1 u'_2 \ldots u'_n$ der Art bestimmen, dass

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\mu} u_\lambda = k u_\mu + u'_\mu \quad \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\mu} u'_\lambda = k u'_\mu \qquad \mu = 1, 2 \ldots n$$

Die Linearformen

$$f = u_1 x_1 + u_2 x_2 \ldots + u_n x_n \quad \text{und} \quad f' = u'_1 x_1 + u'_2 x_2 \ldots + u'_n x_n$$

verschwinden nicht identisch und sie genügen den Gleichungen

$$(1) \qquad A(f) = kf + f' \qquad A(f') = kf'$$

[1]) Diese Berichte 1894, S. 307.

Ich werde beweisen, dass diese Gleichungen nicht bestehen können. Damit ist dann bewiesen, dass die zu $A(f)$ gehörige charakterische Determinante nur Elementartheiler erster Ordnung besitzt, und dass folglich die infinitesimale Transformation $A(f)$ regulär von der zweiten Art ist.

Nehmen wir wieder an, es sei $B^{\lambda}(f) = 0$ und $C^{\nu}(f) = 0$ aber $B^{\lambda-1}(f)$ und $C^{\nu-1}(f)$ seien von Null verschieden; es sei ferner $B^{\lambda'}(f') = 0$ und $C^{\nu'}(f') = 0$ dagegen seien $B^{\lambda'-1}(f)$ und $C^{\nu'-1}(f')$ von Null verschieden.

Es ist dann $k = \lambda' - \nu'$.

Da (Art. IV, 2)

$$A C^{\nu}(f) = C^{\nu} A(f) + 2\nu C^{\nu}(f) = (k + 2\nu) C^{\nu}(f) + C^{\nu}(f')$$

so ist $C^{\nu}(f') = 0$ also $\nu > \nu'$. Analog ist $\lambda > \lambda'$.

Man kann die Functionen f, f', wenn Gleichungen von der Form der Gleichungen (1) überhaupt möglich sind, stets so wählen, dass $\lambda = \lambda' = 1$.

Wäre nämlich $\lambda' > 1$, so ersetzen wir f durch $\varphi = B^{\lambda'-1}(f)$ und f' durch $\varphi' = B^{\lambda'-1}(f')$.

Wegen

$$\begin{aligned} B^{\lambda'-1} A(f) &= -(A B^{\lambda'-1} - B^{\lambda'-1} A)(f) + A B^{\lambda'-1}(f) \quad \text{(Art. IV.2)} \\ &= 2(\lambda' - 1) B^{\lambda'-1}(f) + A B^{\lambda'-1}(f) \end{aligned}$$

ist

$$A(\varphi) = (k - 2\lambda' + 2)\varphi + \varphi'$$

und auf analogem Weg ergibt sich

$$A(\varphi') = (k - 2\lambda' + 2)\varphi'$$

Es ist also zulässig $\lambda' = 1$ vorauszusetzen.

Ist nun nicht λ ebenfalls $= 1$, so ersetze ich f durch

$$\varphi = f - \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda - k)} C B(f)$$

(Da $k = \lambda' - \nu' = 1 - \nu'$, so ist $\lambda - k$ nicht gleich Null.)

Es ist nun

$$A(\varphi) = A(f) - \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda - k)} A C B(f)$$

und

$$A C B(f) = (AC - CA) B(f) + C(AB - BA)(f) + CBA(f)$$
$$= k C B(f) + C B(f')$$

also wegen $$B(f') = 0$$

$$A C B(f) = k C B(f)$$

Folglich

$$A(\varphi) = kf + f' - \frac{k}{(\lambda - 1)(\lambda - k)} C B(f)$$
$$= k\varphi + f'$$

Ferner ist wegen $B^{\lambda}(f) = 0$ (vergl. Art. IV, 2)

$$B^{\lambda-1} C B(f) = (B^{\lambda-1} C - C B^{\lambda-1}) B(f)$$
$$= -(\lambda - 1) B^{\lambda-2} A B(f) + (\lambda - 1)(\lambda - 2) B^{\lambda-1}(f)$$

und

$$A B(f) = B A(f) - 2 B(f) = (k - 2) B(f)$$

Folglich

$$B^{\lambda-1} C B(f) = (\lambda - 1)(\lambda - k) B^{\lambda-1}(f)$$

Demnach ist $B^{\lambda-1}(\varphi) = 0$.

Ist $\lambda = 2$, so ist also $B(\varphi) = 0$, ist dagegen $\lambda > 2$, so ersetze ich φ durch

$$\chi = \varphi - \frac{1}{(\lambda - 2)(\lambda - 1 - k)} C B(\varphi) \qquad \text{u. s. w.}$$

Nunmehr sind wir berechtigt anzunehmen $\lambda = \lambda' = 1$.

Es ist nun wegen $B(f) = 0$ und $C^{\nu}(f) = 0$

$$(B C^{\nu} - C^{\nu} B)(f) = 0$$

Andererseits ist (Art. IV, 2)

$$(B C^{\nu} - C^{\nu} B)(f) = -\nu C^{\nu-1} A(f) - \nu(\nu - 1) C^{\nu-1}(f)$$
$$= -\nu(\nu + k - 1) C^{\nu-1}(f) - \nu C^{\nu-1}(f')$$

also weil $k = 1 - \nu'$

$$\nu(\nu - \nu') C^{\nu-1}(f) + \nu C^{\nu-1}(f') = 0$$

Diese Gleichung fordert, wenn $\nu' = \nu$ $C^{\nu-1}(f) = 0$ und wenn $\nu' < \nu$ $C^{\nu-1}(f) = 0$. Beides widerspricht unseren Voraussetzungen.

Das Tripel der Differentialgleichungen

$$A(f) = 0 \qquad B(f) = 0 \qquad C(f) = 0$$

zeigt ganzen Functionen gegenüber eine merkwürdige (übrigens aus der Invariantentheorie der Binärformen bekannte) Eigenschaft: genügt irgend eine ganze Function f den Bedingungen

$$A(f) = kf \qquad B^{\lambda}(f) = 0 \qquad C^{\nu}(f) = 0$$

während $B^{\lambda-1}(f)$ und $C^{\nu-1}(f)$ nicht verschwinden, so ist (Art. IV) $k = \lambda - \nu$. Ist daher $k = 0$ und eine der beiden Zahlen λ, ν gleich eins, so ist auch die andere gleich eins. Jede ganze Function, die den Differentialgleichungen $A(f) = 0$ und $B(f) = 0$ oder den Differentialgleichungen $A(f) = 0$ und $C(f) = 0$ genügt, genügt auch der Differentialgleichung $C(f) = 0$ beziehungsweise $B(f) = 0$.

Dies gilt, gleichviel ob die Variabeln x unabhängig variabel sind oder nicht, wenn nur im letzteren Fall die Relationen, an die sie gebunden sind, den Differentialgleichungen $A(f) = 0$ $B(f) = 0$ $C(f) = 0$ gegenüber invariantiv sind.

Um nun den im Eingang dieses Artikels angekündigten Beweis zu führen, stütze ich mich auf die folgenden Sätze von Killing über einfache Gruppen:[1])

Man kann die infinitesimalen Transformationen, durch die die einfache Gruppe G erzeugt wird, so wählen, dass eine gewisse Anzahl l derselben

$$C_{01}(f) \qquad C_{02}(f) \quad . \; . \; . \quad C_{0l}(f)$$

paarweise vertauschbar sind. Diese erzeugen eine l-gliedrige Untergruppe Γ. Die übrigen $r - l$, deren Anzahl nothwendig gerade ist, $C_1(f)$ $C_2(f)$ .. $C_{r-l}(f)$ genügen Relationen der Form

$$C_{0\lambda} C_{\mu}(f) - C_{\mu} C_{0\lambda}(f) = \omega_{\lambda\mu} C_{\mu}(f) \quad \lambda = 1, 2, .. l; \; \mu = 1, 2, .. r-l$$

[1]) Math. Annalen, Bd. 33, S. 1 und Bd. 34, S. 187; vergl. auch die These von Cartan: Sur la structure des groupes de transformations. Paris 1894.

Die Grössen $\omega_{\lambda_1}\,\omega_{\lambda_2}\ldots\omega_{\lambda\,r-l}$ sind, wenn die infinitesimalen Transformationen der Untergruppe Γ passend gewählt werden, alle unter einander verschieden. Jeder Transformation $C_\mu(f)$ ist eine zweite $C_{\mu'}(f)$ der Art zugeordnet, das $\omega_{\lambda\mu'} = -\omega_{\lambda\mu}$ für $\lambda = 1, 2, \ldots l$. Es gibt eine in der Untergruppe Γ enthaltene infinitesimale Transformation $K_\mu(f)$, die den identischen Gleichungen genügt:

$$K_\mu C_\mu(f) - C_\mu K_\mu(f) = 2\,C_\mu(f) \quad K_\mu C_{\mu'}(f) - C_{\mu'} K_\mu(f) = -2C_{\mu'}(f)$$
$$C_\mu C_{\mu'}(f) - C_{\mu'} C_\mu(f) = K_\mu(f)$$

Unter diesen infinitesimalen Transformationen $K_\mu(f)$ gibt es l linear unabhängige; man kann also die Untergruppe Γ durch l von den Transformationen $K_\mu(f)$ erzeugen.

Aus diesen Sätzen ergibt sich bei Berücksichtigung des oben bewiesenen Hilfssatzes:

Die infinitesimalen Transformationen $C_\mu(f)$ sind alle regulär von der ersten Art, die infinitesimalen Transformationen $K_\mu(f)$ sind alle regulär von der zweiten Art.[1])

Man kann die l infinitesimalen Transformationen $C_{0\lambda}(f)$ so wählen, das eine jede regulär ist.

Unter dieser Voraussetzung sind die Grössen $\omega_{\lambda\mu}$ alle ganze Zahlen. Die $r-l$ infinitesimalen Transformationen $C_\mu(f)$ zerfallen in zwei Classen; die erste enthält die Transformationen. die positiven Zahlen $\omega_{\lambda\mu}$ entsprechen, die zweite die negativen Zahlen $\omega_{\lambda\mu'}$ entsprechenden. Von jedem Paar einander zugeordneter infinitesimaler Transformationen $C_\mu(f)$ $C_{\mu'}(f)$ gehört die eine zur ersten, die andere zur zweiten Classe. Die zur ersten Classe gehörigen $\frac{r-l}{2}$ infinitesimalen Transformationen erzeugen eine Untergruppe G^+ und ebenso erzeugen die zur zweiten Classe gehörigen eine Untergruppe G^-.[2])

Die Untergruppen G^+ und Γ zusammengenommenen bilden wieder eine Untergruppe H der Ordnung $\frac{r+l}{2}$.

[1]) Ich möchte beiläufig den bemerkenswerthen Satz hervorheben, dass jede einfache oder halb-einfache Gruppe linearer Substitutionen regulär ist.

[2]) Vergleiche meine schon erwähnte Arbeit, diese Berichte 1894.

Jede ganze Function, die der Untergruppe H gegenüber invariant ist, ist auch der Gesammtgruppe G gegenüber invariant, denn wenn eine ganze Function den Differentialgleichungen $K_\mu(f) = 0$ und $C'_\mu(f) = 0$ genügt, so genügt sie auch der dritten Differentialgleichung des Tripels $C'_{\mu'}(f) = 0$. Da nach Voraussetzung die Gruppe H ein endliches System ganzer Invarianten besitzt, so gilt dasselbe für die Gruppe G.

VII.

Im Vorangehenden ist bewiesen worden: alle ganzen Functionen, die einem System von Differentialgleichungen

$$(1) \qquad C'_1(f) = 0 \quad C'_2(f) = 0 \quad \ldots \quad C'_r(f) = 0$$

genügen, lassen sich als ganze Functionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen. Aber die Frage, unter welchen Bedingungen es überhaupt ganze Functionen gibt, die diesen Differentialgleichungen genügen, ist offen geblieben. Diese Frage soll noch kurz erörtert werden. Dabei beschränke ich mich aber auf den Fall, dass die Grössen $x_1\, x_2 \ldots x_n$ als unabhängig variabel betrachtet werden.

Von den r Differentialgleichungen (1) können eine Anzahl — etwa $r - r'$ — eine Folge der übrigen sein.

Ich setze voraus, die Anzahl n der Variabeln x sei grösser als r' und ich halte an der Voraussetzung fest, die Gruppe G, die von den r infinitesimalen Transformationen $C'_\varrho(f)$ erzeugt wird, sei regulär.

Unter diesen Voraussetzungen steht von vornherein die Existenz von $n - r'$ unter einander unabhängigen rationalen Functionen fest, die den Differentialgleichungen (1) genügen.

Es sei nun $J = \frac{\varphi}{\psi}$ eine derartige rationale Function, φ und ψ seien ganze Functionen. Diese Functionen müssen Differentialgleichungen der Form

$$C'_\varrho(\varphi) = k_\varrho \varphi \qquad C'_\varrho(\psi) = k_\varrho \psi \qquad \varrho = 1, 2, \ldots r$$

genügen, wo die k_ϱ Constante sind. In zwei Fällen lässt sich nachweisen, dass die Constante k_ϱ gleich Null sein muss.

Nämlich erstens in dem Fall, dass die infinitesimale Transformation $C'_\varrho(f)$ regulär von der ersten Art ist (vergl. Art. II). Den zweiten Fall betreffend ist zu bemerken: die infinitesimalen Transformationen

$$C'_\sigma C'_\tau(f) - C'_\tau C'_\sigma(f) \qquad \sigma, \tau = 1, 2, \ldots r$$

gehören sämmtlich der Gruppe G an und sie erzeugen eine ausgezeichnete Untergruppe derselben, „die Hauptuntergruppe", die übrigens auch mit der Gruppe G selbst zusammenfallen kann. Nun ist

$$C'_\sigma C'_\tau(\varphi) - C'_\tau C'_\sigma(\varphi) = 0$$

Es ist somit die Constante k_ϱ jedesmal gleich Null, wenn die infinitesimale Transformation $C'_\varrho(f)$ der Hauptuntergruppe angehört.

Aus dem Vorangehenden ziehen wir den Schluss:

1. Wenn die Gruppe G keine reguläre infinitesimale Transformation zweiter Art enthält, die nicht zugleich der Hauptuntergruppe angehört, so gibt es $n - r'$ unter einander unabhängige ganze Invarianten der Gruppe.

2. Unter derselben Voraussetzung gilt auch der auf demselben Weg zu beweisende Satz:

Ist das Product von mehreren ganzen Functionen Invariante, so gilt dasselbe für jeden der Factoren.

Wenn dagegen die Gruppe G reguläre infinitesimale Transformationen zweiter Art enthält, die nicht der Hauptuntergruppe angehören, so gilt im Allgemeinen keiner dieser beiden Sätze. Man kann aber auch in diesem Fall die Analogie mit der Theorie der projectiven Invarianten aufrecht erhalten, indem man den in Art. II eingeführten Begriff der ausgezeichneten Functionen erweitert. Eine ganze Function φ werde als ausgezeichnet bezeichnet, wenn sie r Differentialgleichungen der Form

$$C'_\varrho(\varphi) = k_\varrho\, \varphi \qquad \varrho = 1, 2, \ldots r$$

genügt, wo die k_ϱ irgend welche ganze Zahlen sind.

Da diese ausgezeichneten Functionen Zähler und Nenner der rationalen Invarianten der Gruppe G bilden, so steht von vornherein die Existenz von $n - r' + 1$ unter einander unabhängigen derartigen Functionen fest.

Es gelten für sie die beiden Sätze:

1. Alle ausgezeichneten Functionen lassen sich als ganze Functionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen und

2. Ist das Product von mehreren ganzen Functionen ausgezeichnete Function, so gilt dasselbe für jeden der Factoren.



Amerikanische Dekapoden der k. bayerischen Staatssammlungen.

Von Dr. F. Doflein.

(Eingelaufen 3. Juni.)

I. Liste der von Dr. Doflein auf seiner Reise in Westindien und Nordamerika gesammelten Dekapoden-Krebse.

a) Martinique.

Wenn auch die hier publizierte Liste wenig Neues an Arten und morphologischen Beobachtungen bringt, so hielt ich ihre Veröffentlichung dennoch für nützlich, da viele der aufgeführten Arten an für sie neuen Lokalitäten gefunden wurden; denn ich glaube zum Ausbau einer wissenschaftlichen Tiergeographie ist es notwendig, über die Verbreitung der einzelnen Arten möglichst zahlreiche und genaue Daten zu besitzen. Ausserdem enthalten die nachfolgenden Zeilen eine Anzahl von Beobachtungen über die Lebensweise verschiedener Formen. Die tiergeographischen Folgerungen aus den aufzuführenden Funden werde ich am Schluss dieser verschiedenen Listen zusammenfassen.

1. Palaemon lamarrei M. Edw.

Das Rostrum meiner Exemplare ist nicht länger als die Scaphoceriten.

Bei St. Anne, Südmartinique, gefangen im Seewasser, aber in der Nähe einer Flussmündung.

2. Pagurus tuberculosus(?) M. Edw.

Meine Exemplare liessen sich nicht mit absoluter Sicherheit auf diese unscharf definierte Art zurückführen, jedoch noch weniger auf irgend eine andere.

Martinique.

3. Petrochirus granulatus Olivier.

Ich fand ein riesiges Exemplar dieses grössten bekannten Paguriden. Die Kiemenzahl ist 14, was nach Ortmann noch nicht genau festzustehen scheint, (11 + 3).

In Strombus gigas L. bei St. Anne, Südmartinique, zwischen Korallen.

4. Alpheus parvirostris Dana.

Sonst nur aus dem tropischen Indo-pacific bekannt. Meine Exemplare sind aber mit keiner anderen Art zu identifizieren.

Bei St. Pierre, Nordmartinique in Spongien.

5. Alpheus sp.

Diese Art ist jedenfalls neu; ich werde die Artdiagnose erst später publizieren, wenn mir mehr Vergleichsmaterial zur Verfügung steht. Sie ist auffallend durch ihre feuerrote Farbe, welche vollkommen mit der Färbung der von den Tieren bewohnten Spongien (Geodia-artige Schwämme) übereinstimmt.

St. Anne, Südmartinique.

6. Senex argus Latr.

Die Furchen auf den Abdomensegmenten sind nicht überall deutlich unterbrochen, entsprechen aber der von Ortmann angegebenen Variationsbreite. Die von der Behaarung gebildete Faser am Unterrand der grossen Antennen ist sehr ausgeprägt. Die Dornen dunkelbraun.

St. Anne, Martinique, Strandregion.

7. Podochela grossipes Stimpson.

Am Meeresgrunde, nahe der Küste zwischen Spongien, Algen, Hydroïden. Das Tier ist an seinem Aufenthaltsort durch Anpassung vorzüglich geschützt. Bietet schon die bizarre Form zwischen den Stengeln der bodenbewachsenden Tiere

und Pflanzen einen ausgezeichneten Schutz, so wird derselbe noch gesteigert durch die Maskierung der Krabben. Dieselben sind bedeckt mit Hydroïdenstöckchen, Algen u. s. w., welche an Körper und Beinen mit Angelhaken (s. Aurivillius) befestigt sind. Bei P. grossipes stehen diese Haken auf den Extremitäten vereinzelt, während sie bei anderen Arten von Podochela in bestimmter Anordnung z. B. paarweise angebracht sind.

St. Pierre, Martinique.

8. Pericera cornuta M. Edw.

Auch bei dieser Art gibt es eine, allerdings sehr enge Fissur im oberen Orbitalrand.

St. Pierre und St. Anne, Martinique. Zwischen Algen, Gorgonien, Korallen am Meeresboden in der Strandnähe.

9. Mithrax sculptus Lam. (= Mithraculus aut.).

Diese an der ganzen Küste von Martinique häufige Art, wird auf Felsen und Klippen der Ebbezone kletternd angetroffen.

10. Mithrax hispidus Herbst.

Ich erhielt in St. Pierre, Martinique, aus 4—5 Faden Tiefe ein riesiges Exemplar einer Mithraxart, welche in vielen Punkten mit den bisher von Amerika beschriebenen nicht übereinstimmt. Am nächsten steht es den Arten M. hispidus Herbst und M. laevimanus Desh. et Schr., welche Ortmann bereits als eine Art auffasst, wobei er geneigt ist, auch M. verrucosus M. Edw. hinzu zu ziehen. Mir scheint es nicht unwahrscheinlich, dass die als obige Arten beschriebenen Exemplare nicht ausgewachsen waren, und dass mein Exemplar den erwachsenen Typus darstellt. Doch dies wird nur auf Grund eines sehr reichen Materials zu entscheiden sein. Die Masse meines Exemplares sind

Länge des Thorax	17,5 cm
Grösste Breite des Thorax (Cardialregion)	16—17 „
Länge der Scheere	20 „
Breite der Scheere	8,5 „
Fingerlänge	12 „

Der Rücken ist mit zahlreichen spitzen Höckern versehen, wie bei laevimanus; die Cardialregion ist sehr scharf abgesetzt und von ihr aus laufen zwei tiefe Furchen nach vorn.

Die Scheeren sind kolossal ausgebildet. Merus und Carpus sind mit sehr zahlreichen spitzen Höckern besetzt, einzelne derselben sind abgestumpft, knopfförmig. Die Hand selbst ist auf der Aussenseite ziemlich glatt, bedeckt mit sehr feinen Granulationen, welche eine Tendenz zur Anordnung in unregelmässigen Querreihen haben. Die Innenseite der Hand besitzt die nämlichen Granulationen, auf der Mitte der Fläche ausserdem 2—3 warzenartige Auswüchse von 5—7 mm Länge. Aehnliche Warzen, 5—7 mm lang, 4—5 mm breit, bilden am Oberrand der Hand eine Reihe.

Die feinen Granulationen erstrecken auch auf den beiden Fingern bis gegen die Spitze hin, sind aber gröber als auf der Hand selbst. Die Finger sind stark gebogen, berühren sich nur an den löffelartig ausgehöhlten Enden. Diese Endlöffel sind von einer Leiste eingefasst, welche auf der Innenseite glatt verläuft, nach vorn aus einzelnen Teilen zusammengesetzt, fast einem geschlossenen Wirbeltiergebiss gleicht, und auf der Aussenseite in mehrere zahnartige Höcker verläuft: am beweglichen Finger sind es deren 3, am unbeweglichen 5. Der bewegliche Finger trägt an seiner Unterseite etwa in der Mitte einen 1 cm langen und 1 cm breiten dreieckigen, zahnartigen Vorsprung, welcher aber nicht wie bei anderen Gattungen zahnähnlich in seiner Substanz ist, sondern vom cutikularen Panzer mit seinen Granulationen überzogen ist.

Das Tier war im lebenden Zustand am Thorax dunkelrot, an den Schreitbeinen ziegelrot, die Scheeren waren rosenrot mit gelben Fingern. Es wurde zwischen Korallen gefunden und bewegte sich ausserhalb des Wassers infolge der Schwere seiner Scheeren nur mit Mühe.

11. Pilumnus vinaceus M. Edw.

Bei St. Pierre auf tierreichem Meeresgrund, 20—30 m Tiefe; besonders auf und in Spongien (Kakospongien und Geodien).

12. Domoecia hispida Souleyet.

Bei St. Pierre in 20 m Tiefe auf Gorgonien kletternd und sich besonders auf flabellum mit den feinen Krallen sehr fest anheftend.

13. Neptunus sp. juv.

Dieser junge N. ist in seiner äusseren Form durchaus mit diacanthus übereinstimmend. Der Hinterleib ist aber dreieckig.

St. Pierre.

14. Achelous spinimanus Leach.

St. Pierre.

15. Achelous ruber Lam.

Diese Art, von Brasilien und Mexiko bekannt, war in den Antillen noch nicht gefunden worden.

St. Anne.

16. Grapsus lividus M. Edw.

St. Pierre, am Strand, Ebbezone und auf Felsen.

17. Sesarma cinerea M. Edw.

St. Pierre.

18. Ocypoda arenaria Latr.

Bei St. Anne am flachen Sandstrand, wo oft am Morgen der Sand ganz von den zickzackformigen Spuren der Tiere bedeckt ist. Bei Annäherung von Menschen vergraben sie sich mit grosser Schnelligkeit.

19. Gecarcinus ruricola Fabr.

Sehr häufig bei St. Pierre, wo besonders die Berghänge in der Nähe des botanischen Gartens von den Krabben wimmeln. Besonders auch in der Nähe der Bäche. Weibchen mit Eiern habe ich nicht gefunden, aber zur Zeit meines Aufenthaltes gab es sehr zahlreiche junge Tiere bis herab zur Grösse von 0,75 bis 1 cm; diese wurden gefunden am Land in der Nähe eines Baches. Daraus geht hervor, dass die Tiere, wenn es sich auch bestätigen sollte, dass die Eier im Meere abgelegt werden, doch schon in sehr jungem Alter das Land wieder aufsuchen.

20. Megalobrachium granuliferum Stm.

Die Gattung wird wohl nicht als solche zu Recht bestehen. Die Definition bei Stimpson ist nicht sehr genau; doch scheint mir die Art zu Petrolisthes zu ziehen und sie würde zwischen die Gruppe von lamarcki und galathinus gehören. Doch ist dies nach meinem einzigen, dazu jungen Exemplar nicht definitiv zu entscheiden.

St. Anne, Korallenriff.

21. Calappa marmorata Fabr.

St. Anne.

22. Dromia vulgaris M. Edw.

Mit einer grossen Spongelia auf dem Rücken. Das Exemplar ist zugleich ein guter Beweis für die Richtigkeit der Beseitigung der Species D. lator M. Edw. durch Ortmann. Die westindische Art stimmt durchaus mit der mediterranen überein.

St. Anne.

23. Remipes scutellatus Fabr.

St. Pierre, am Sandstrand.

Von den aufgeführten Arten waren bisher für die Antillen eigentlich nur Palaemon lamarrei, Achelous ruber und Alpheus parvirostris unbekannt. Palaemon lamarrei, welcher in Südamerika besonders im Amazonasgebiet an zahlreichen Orten gefunden worden ist, erstreckt sich also nach Norden bis Martinique; da er in den Antillen somit überhaupt vorkommt, ist es wahrscheinlich, dass er sich auch noch weiter nördlich wird nachweisen lassen. Der Fund von Achelous ruber verbindet die beiden bisher bekannten Wohnbezirke dieser Art: Brasilien und Mexiko. Anders ist es mit Alpheus parvirostris; diese Art ist bisher nur aus dem Indopacifischen Gebiet bekannt. Es ist also aus diesem Grunde zweifelhaft, ob es sich thatsächlich um diese Art handelt. Die Abgrenzung der Arten dieser Gattung bedarf der Revision, bei welcher sich vielleicht die von mir gefundene Art als neu herausstellen wird.

b) Bai von Monterey, Mittel-Californien.

Die sehr tierreiche Bai von Monterey verfügt über die verschiedenartigsten Wohnbezirke; daher finden sich in derselben Tiere vereinigt, welche wir sonst selten in so enger Nachbarschaft beisammen finden. In meiner Dekapodensammlung kommt diese Thatsache nicht sehr zum Ausdruck, dafür ist die Sammlung zu klein. Sie ist hauptsächlich zusammengesetzt aus Formen, welche die Gezeitentümpel und die Algenwiesen und Felsen der Gezeitenzonen bewohnen.

1) Oregonia gracilis Dana.

Diese Form bewohnt das tiefere Wasser. Das Tier wohnt zwischen Algen etc. In der Diagnose von Dana ist nicht erwähnt, dass der Rücken mit zahlreichen Angelhaaren bedeckt ist. Diese vermitteln eine Maskierung durch Hydroïdpolypen etc., welche den Tieren einen ausgezeichneten Schutz gewährt.

2) Scyra acutifrons Dana.

Meine Exemplare unterscheiden sich von Danas Beschreibung durch etwas gedrungenere Gestalt und Zähnchen an den Innenseiten der äusseren Antennenglieder.

Strandregion.

3) Epialtus productus Rand.

Diese schöne Form ist sehr häufig in der Gezeitenzone; sie bewohnt die Algenwiesen und ist durch die olivengrüne Farbe und den öligen Glanz der Körperbedeckung ausserordentlich den Algen und Tangen ähnlich. Verfolgt flüchtet sie sich stets in die Algenbüsche, bleibt unbeweglich stehen und ist dann sehr schwer zu entdecken.

4) Cryptolithodes typicus Brandt.

Mein Exemplar ist ein Weibchen mit Eiern unter dem Abdomen (im Juni gefangen). Diese sehr seltene Form ist ein echt arktischer Repräsentant. Bisher ist sie aus dem nördlichen Eismeer von Alaska bis Californien bekannt. Die Farbe

des Tiers ist silbergrau mit einem leicht durchschimmernden rötlichen Ton.

Tieferes Wasser.

5) Cancer antennarius Stm.

kommt häufig in den Gezeitentümpeln bei Pacific Grove vor. Es kommen hier Exemplare der glatten und der behaarten Varietät nebeneinander vor. Ob es sich hiebei vielleicht nur um ein Stadium des Panzerwechsels handelt? Ein junges Exemplar hat im Gegensatz zum Typus weissen Finger und Daumen; bei den übrigen normal schwarz.

6) Cancer gracilis Dana.

Ist ebenfalls in der Gezeitenzone zuhause.

7) Pachygrapsus crassipes Rand.

Auf den Felsen nahe der Küste.

8) Pseudograpsus nudus Dana.

Ebenda.

9) Pachycheles rudis Stm.

Algenzone.

Diese wenigen Arten zeichnen sich alle übereinstimmend dadurch aus, dass sie in ihrer Verbreitung nach Norden weisen. Fast alle sind im Puget-Sound, an der Küste von Oregon und bis nach Alaska hin gefunden worden. Sehr wenige erstrecken sich viel weiter als die Kalifornische Küste nach Süden. Ebenso zeigt die übrige Fauna nordischen Charakter. Dieser ist sehr erklärlich durch das Vorhandensein einer kalten Strömung, welche der westamerikanischen Küste entlang bis etwa zur Südspitze von Niederkalifornien verlauft, um sich dann nach Westen zu wenden. Diese Strömung, welche das Klima der kalifornischen Küste stark beeinflusst und ihre Vegetation bestimmt, gibt auch der marinen Fauna ihr Gepräge: ganz im Gegensatz zur Landfauna, welche zahlreiche Beimischungen aus dem Süden enthält.

II. Liste der von I. K. H. Prinzessin Therese von Bayern auf einer Reise in Südamerika gesammelten Dekapoden-Krebse.

I. K. H. Prinzessin Therese hatte die Güte, mir die von ihr auf einer Reise durch Südamerika gesammelten Krebse zur Bestimmung zu übergeben. Da viele der neuen Fundorte ein grosses tiergeographisches Interesse beanspruchen, so publiziere ich an dieser Stelle die vollständige Liste, indem ich die sehr genauen Notizen der hohen Sammlerin über Färbung der Tiere und ihr Vorkommen hinzufüge. Die Collektion ist in der Privatsammlung der Prinzessin Therese aufgestellt.

1) Penaeus brasiliensis Latr.

Färbung weisslich-farblos.

Pernambuco. Oktober.

2) Palaemon lamarrei M. Edw.

Färbung: Scheeren rötlich mit blauem Fleck. Sonst ist das ganze Tier weiss.

Guayaquil. Mitte August.

Die Exemplare wurden in Guayaquil auf dem Markt gekauft; da die Art aus Zuflüssen des stillen Ozeans noch nicht bekannt ist, vermutete ich zuerst sie könnten etwa aus Zuflüssen des Amazonas stammen, wie die ebenfalls in Ecuador gesammelten Exemplare von Reiss (nach Ortmann), welche aus dem Rio Paute kamen, einem Zufluss des Amazonas. Wie mir jedoch Prinzessin Therese schreibt, kann der Markt von Guayaquil aus Zuflüssen des Amazonas nicht beschickt werden, da deren Quellen mindestens 8 Tagereisen weit entfernt sind.

3) Palaemon sp. juv.

Jugendformen von Palaemon sind unmöglich zu bestimmen, da sich die Artdiagnosen auf Merkmale beziehen, die sich während des Wachstums beständig ändern.

Baranquilla. August.

4) Bithynis Gaudichaudii M. Edw.

1 Grosses Exemplar.

Rio Tambo bei Mollendo.

2 kleine Exemplare.

Von Lima (Markt) aus dem Rio Chillon. September.

Färbung gelbgrün mit gelbbraunen Flecken am Rücken; Glieder des ersten Brustbeins rötlich, die Scheeren selbst jedoch grünblau.

5) Coenobita diogenes Latr.

Färbung vorwiegend rot, kleine Scheere rot, grosse Scheere rotviolett.

Cartagena, August. Am Meeresstrand.

6) Hippa emerita L.

Die Exemplare bestätigen die Ansicht Ortmanns, dass die Art der Westküste mis derjenigen der Ostküste übereinstimmt, also H. emerita L. = H. analoga Stm. Färbung: Beine, Schwanz und Unterseite weiss. Rücken im kons. Zustand mit rotvioletten Streifen und Flecken.

Mollendo, Peru. Ende September.

7) Pseudocorystes armatus M. Edw.

An dem Exemplar sind sichtbare Spuren von roter Marmorierung auf ockergelbem Grunde; die Beine sind an den Gelenken rötlich angehaucht.

Mollendo, Südperu. September. Trocken an der Küste gefunden.

8) Neptunus diacanthus Latr.

1) 2 ♂ 1 ♀ Pernambuco, Oktober.
2) 1 ♂ Baranquilla, August.
3) 1 ♂ Guayaquil, September.

Das Männchen von Baranquilla unterscheidet sich in einigen kleinen Merkmalen von den übrigen, welche typisch sind. Vor allem ist der Vorderrandbogen grösser. Die Art scheint, nach anderen Exemplaren unserer Sammlung zu schliessen, ziemlich stark zu variieren.

Der Fund in Guayaquil ist sehr auffallend; man betrachtete die Art bisher als gänzlich auf die Ostküste von Amerika beschränkt. Das Exemplar ist gut charakterisiert, die T-Form des Abdomens sehr ausgesprochen.

Färbung: Rückenschild graulichgrün, Brustbeine im ganzen kobaltblau, die Scheeren rotlila, blaugerandet, die letzten Glieder des 5. Beinpaares graulichgrün, die vorderen Glieder blau.

9) Neptunus anceps Sauss.

Trockenes Exemplar. Carupano, Venezuela. Juni.

10) Neptunus sp. juv.

Cartagena.

11) Cancer dentatus Bell.

Auf dem Markt in Lima gekauft. Färbung blaurot. Wurde bisher in Chile und durch Reiss (nach Ortmann) im Ancon-Golf (Ecuador) gefunden. Der neue Fund verbindet somit die beiden bisherigen getrennten Fundorte.

Callao. September.

12) Cycloxanthus sexdecemdentatus M. Edw. et Lucas.

Färbung blaurot.

Callao, September. Meer.

13) Potamocarcinus dentatus Latr. (früher Pseudotelphusa dentata Latr.).

Martinique, Juni. Gebirge zwischen Fort de France und St. Pierre, in den Strassengräben gefangen.

Färbung: Mitte des Rückenschildes schwarzbraun samtig, Rand desselben und Scheeren orange, Bauchseite gelb.

Bei den jungen Exemplaren ist die Stirnkante vollkommen deutlich; somit scheinen die von Ortmann erwähnten „jungen Exemplare" aus Ecuador zu Potamocarcinus planus Smith zu gehören (vgl. Ortmann Zool. Jahrb. Abt. Syst. VII. p. 494 unter Pseudotelphusa dentata Latr.).

14) Potamocarcinus aequatorialis Ortmann.

Rio grande bei Soacha, Hochebene von S. Fé de Bogotá, gekauft auf dem Markte in Bogotá. Juli.

Die Exemplare nähern sich sehr der von Ortmann aus Ecuador beschriebenen Art, weichen aber in einigen Punkten ab. Zur Aufstellung einer neuen Art scheinen mir die Abweichungen aber nicht auszureichen. Ausserdem ist mein Vergleichsmaterial ungenügend.

Der Exopodit des 3. Maxillarfusses ohne Geissel, Stiel bedeutend kürzer als das Ischium. Eine obere Stirnkante ist vorhanden; oft allerdings etwas abgeschliffen. Sie steht nicht über der unteren vor, bildet eine ziemlich stumpfe Kante, keinen Kiel. Der obere Stirnrand bei den meisten Exemplaren glatt, weil abgeschliffen. Bei manchen deutlich gekörnelt; leicht gebogen. Die untere Stirnkante ist gekielt. Abdomen beim ♂ wie Ortmanns Beschreibung, beim ♀ kolossal breit, wobei die drei letzten Glieder die Hauptmasse ausmachen. Das Abdomen ist hochgewölbt mit leerem Raum darunter, auch in der Zeit der Eilosigkeit.

2 ♀ 2 ♂.

Färbung: Ziemlich einförmig dunkelbraun. Scheere etwas rötlicher, aber ebenfalls dunkel. Ein ♀ ist fast schwarzviolett einfarbig.

15) Trichodactylus quinquedentatus Rathbun.

Die Arten von Trichodactylus scheinen sehr willkürlich abgegrenzt zu sein und bedürfen der Revision. Die Bezahnung des Thoracalrandes variiert. Bei den mir vorliegenden Exemplaren sind die Zähne z. B. sehr klein. Färbung grau.

Quebrada Cabuial bei Ibagué, Juli. Oberlauf des Magdalena, 1200 km vom atlantischen Ozean.

16) Leptograpsus variegatus Fabr.

Grundfarbe des Rückenschilds matt gelblich-graugrün. Scheeren an einzelnen Stellen violettlich, Endglieder der Schreitbeine orangerot.

Antofagasta, Chile. Oktober. Strand, in einem Salzwassertümpel.

17) Sesarma cinerea Bosc.

1) ♂ u. ♀ von Baranquilla } August.
2) Junge von Cartagena }

Cartagena: Hafenstrand, Baranquilla: Caño der von Baranquilla in den Magdalena fliesst und in dem die Dampfer liegen. Daher wohl Salz- und Brackwasser. Ortmann bezeichnet Sesarma als reine Süsswasserform.

Färbung: grau mit schwarzer Zeichnung.

18) Oedipleura cordata L. (= Uca una Latr.)

Färbung: dunkelbraun, Beine rotviolett.

Bahia, Oktober. Auf dem Markt gekauft.

19) Cardisoma guanhumi Latr.

1) ♂ Martinique, Fort de France. Juni.

Farbe graugrün.

2) ♀ Cartagena, August. Brack- und Süsswasser.

Rückenschild dunkelblau, hintere Glieder des ersten Brustbeinpaares dunkelblau, Scheere bläulich; die Schreitbeine fleischfarbig.

3) ♀ von Pernambuco, Oktober.

Färbung blau. Die Scheeren der jüngeren Exemplare sind mehr zusammenschliessend als die der alten.

Vgl. Ortmann a. a. O. VII. S. 736.

20) Ocypoda gaudichaudii M. Edw. et Lucas.

♂ Färbung gelb.

Mollendo, Peru.

21) Ocypoda urvillei M. Edw. = ceratophthalma Pall.

Mollendo, Peru. September.

Mein Exemplar ist ein junges Tier, daher schwer definitiv zu bestimmen. Sonst wäre dies der erste Fund der Art in Amerika, eine neue Art für Amerika. Die Art ist sonst indopacifisch.

Färbung: Weiss und grau gezeichnet.

22) Ocypoda arenaria Say.

Cartagena, August. Eine Anzahl junge Exemplare.

Färbung: Grau mit schwarzer Zeichnung.

Einige Uca (= Gelasimus)arten behandele ich im Zusammenhang mit den übrigen Ucaarten der Münchener Sammlung.

Einige der Funde sind sehr auffallend und wichtig für unsere Kenntnis von der Verbreitung der betreffenden Arten. So vor allem der von Palaemon lamarrei in Zuflüssen des stillen Ozeans. Es ist dies der erste Fall, in welchem eine Art von Palaemon sich als dem atlantischen und pacifischen Gebiet gemeinsam erweist. Da bereits durch Ortmann aus dem Rio Paute, einem Zufluss des Amazonas, in nicht allzugrosser Ferne von Guayaquil, die Art bekannt ist, so muss es sich um eine Ueberschreitung der Wasserscheide beider Ozeane handeln, analog dem Falle des P. niloticus, welcher Ostafrika und dem Nil gemeinsam ist. Man muss wohl an eine Uebertragung durch Wasservögel denken.

Noch weit auffallender ist aber der Fund von Neptunus diacanthus in Guayaquil. Wenn sich die Art in Zukunft nicht als reichlicher im stillen Ozean verbreitet herausstellen sollte, ist dieser ganz vereinzelte Fund rätselhaft.

Potamocarcinus aequatorialis von Bogotá bietet den umgekehrten Fall, indem eine Art, welche bisher nur im Westen des Kontinents bekannt war, nun auch aus dem Osten sich nachweisen liess. Bei einer Telphuside ist dies weniger verwunderlich, da deren Verbreitungsfähigkeit ja ziemlich gross ist. Möglicherweise wird sich die Art noch als weiter im centralen Südamerika verbreitet herausstellen.

Der Nachweis von Trichodactylus quinquedentatus 1200 km den Magdalena stromaufwärts, beweist, dass die Angehörigen dieser Gattung zu ausgesprochenen Süsswasserbewohnern geworden sind. Der von Rathbun angegebene Fall, wo Exemplare der gleichen Art in Nicaragua, im Escondidofluss 50 Meilen von der Mündung bei Bluefields gefunden wurden, bezeichnete bisher die äusserste Grenze des Vorkommens im Süsswasser.

III. Die Uca-Gelasimusarten der Münchener Staats-Sammlung.

Die wenigen Arten der nach der Ortmann'schen Prioritätsreform nunmehr Uca benannten, bisher als Gelasimus bezeichneten Gattung, welche unser Münchener Museum enthält, bieten einige der Wissenschaft neue Thatsachen dar; ich hielt es daher für nützlich, sie im Zusammenhange zu veröffentlichen. Ich stellte der Liste voraus die von I. K. H. Prinzessin Therese gesammelten Arten, welche sich in ihrem eigenen Besitze befinden.

1) Uca vocator Herbst.

a) Brackwasser bei Cartagena. August.
b) Guayaquil. September.

Verbreitet an beiden Küsten Amerikas. An der Westküste bisher südlich nur bis Panama bekannt. Die Länge des überstehenden Fingers ist bei den einzelnen Exemplaren oft verschieden und zwar weil dessen Spitze öfters abgenützt oder abgebrochen und gut verheilt ist.

Färbung: Rückenschild braungrau, bei einem Exemplar graugrün. Scheeren graurötlich bis fleischfarbig.

leg. Prinzessin Therese.

2) Uca pugilator Desm.

1) Baranquilla, leg. Prinz. Therese. August 98.
2) Florida, leg. Packard 76.

Viele ♂ und ♀ und Junge. Auffallend ist der Unterschied in der Form der Scheerenfinger bei Jungen und Alten. Bei Jungen erscheinen sie glatter und schärfer; dazu im Verhältnis zur Hand viel kürzer als im späteren Alter. Die ganze Scheere wird dann viel schlanker, nicht unähnlich denen der jungen U. stenodactylus. Von diesen unterscheiden sie sich, abgesehen von der fehlenden bei stenodactylus aber auch oft abgeschliffenen Leiste durch den weniger geschweiften Contour des Vorderrandes.

3) Uca sp. juv.

Cartagena, leg. Prinz. Therese.

4) Uca cultrimana White.

1) Südsee, Salmin leg.

Der bewegliche Finger auffallend komprimiert, breiter als die Zeichnung bei Kingsley 1880. Jedoch scheinen alle Zeichnungen von Kingsley nicht sehr genau.

2) Viti Ins. Kandavu. Dr. Buchner leg. 78. juv.

Abweichende Form der Scheere, die Lappen sehr nahe beieinander. Scheere auch noch klein, vor allem Verhältnis der Länge zur Breite abweichend vom ausgewachsenen Tier.

3) Indischer Ozean, Salmin leg.

2 Exemplare typisch. Ob nicht kontinuierliche Uebergänge zu U. Dussumieri existieren? Die Bestachelung des Merus scheint doch sehr schwankend zu sein.

4) Angebl. von Charleston, U. S. Amerika leg. Josefine Dingle.

Da infolge der Persönlichkeit der Sammlerin kein anderes Charleston gemeint sein kann, so ist kaum anders anzunehmen, als dass einmal eine Verwechslung irgendwelcher Art stattgefunden hat; obwohl bei der peinlichen Genauigkeit, mit welcher v. Siebold die Sammlung leitete, eine solche kaum möglich war.

5) Uca vic. Gaimardi.

Viti Ins. Kandavu, lebt in warmen Quellen. Dr. Buchner leg. 78.

Die Exemplare, vielleicht einer neuen Art angehörend, sind zur Gaimardi-Gruppe, Ortmann zu rechnen. Sie unterscheiden sich jedoch von den beiden Ortmann'schen Arten

a. von latreillei:

Untere schräge Leiste deutlich, wenn auch nicht grob granuliert. Körnerleisten noch ziemlich deutlich.

b. von variabilis:

Körner der Leiste nicht grob; Körnerleiste an der Basis der Finger deutlich; keine accessorische Körnerreihe am unteren Orbitalrand.

Steht also latreillei M. Edw. näher.

6) Uca stenodactylus M. Edw. et Lucas.

Rio Bayano bei Panama (zum stillen Ozean). M. Wagner leg.

1. Exemplar gross, ausgewachsen. Mit deutlicher Leiste auf der Unterseite der Hand, stark gekörnelt. Dagegen Zähne auf den Schneiden der Scheere.

2. Hier die Leiste nicht granuliert; dagegen keine Zähne auf den Schneiden; dieselben ungekörnelt.

Offenbar sind die abnützbaren Körnelungen kein gutes systematisches Merkmal.

3. Form der Scheere wie bei 2., hier aber wohlausgebildete Körnelung.

Einige Exemplare Essendorfer leg. atlantische Küste von Südamerika.

7) Uca acuta Stm.

Bisher nur bekannt von Macao und den Mergui-Inseln.

Ceylon, Schlagintweit leg.

8) Uca annulipes M. Edw.

Indischer Ozean. Salmin leg.

9) Uca dussumieri M. Edw.

Indischer Ozean. Salmin leg.

10) Uca tetragonon Herbst.

Tor, Sinaïhalbinsel. Dr. Hofer leg. 92.

Das Exemplar (♂) stimmt vollkommen mit der Beschreibung von de Man überein, auch der rote Fleck auf der Palma ist deutlich zu sehen. Von den Leisten auf der Unterseite ist zu bemerken, dass sie durch Granulationen wohl angedeutet sind, aber nicht zu vergleichen mit der starken Entwickelung bei cultrimanus.

11) Uca amazonensis nov. sp.

Teffé, Amazonenstrom leg. Salmin. Breitstirnig.

Die untere schräge Leiste auf der Innenseite der Hand ist gut entwickelt und granuliert; sie sitzt tief unten und fasst

mit einer fein granulierten Kante auf der Aussenseite ein Feld an der Unterseite der Hand ein. Sie endet proximal unmittelbar vor der Artikulation von Hand und Karpus. Die Scheerenfinger sind bis zur Spitze gezähnelt. Jedoch besitzt der bewegliche keinen auffallenden Zahn vor der Spitze. Der unbewegliche zeigt gewöhnlich in der Mitte einen grossen prismatischen Zahn. Schwankend je nach dem Grad der Abnutzung ist das Vorhandensein einer einfachen äusseren Längsleiste am Oberrand der Hand.

Die Finger sind ziemlich lang und schmal, mässig komprimiert.

Der obere Orbitalrand ist von zwei fein granulierten Leistchen eingefasst, welche sich erst unmittelbar vor der äusseren Ecke vereinigen. Orbitalränder ziemlich schief, Körper nach hinten sich ziemlich verschmälernd.

Die Färbung der Tiere ist verschieden: bei einigen auf gelbem Grunde eine dunkel bordeauxrote Zeichnung; ein breiter Strich am Vorderrand, ein ebensolcher in der Cardialregion, beide durch einen Bogen verbunden, ferner eine breite Zeichnung am Hinterrand, mit gelben Flecken. Bei anderen Exemplaren nimmt das Rot überhand, sodass es als Grundfarbe erscheint, auf welchem einzelne gelbe Flecken sitzen. Die Zeichnung ist sehr auffallend.

Ortmann bemerkt über die Verbreitung der Gattung Uca in seinen Carcinologischen Studien (Zool. Jahrb. Abt. Syst. Bd. X), dass das Vorkommen identischer Arten auf beiden Seiten des amerikanischen Kontinents wohl darauf zurückzuführen sei, „dass zur Jetztzeit die Arten dieser Gattung imstande sind, die Landbarriere bei Panama infolge gewisser bionomischer Gewohnheiten zu überschreiten.“ Wie richtig diese Ansicht im Prinzip ist, beweisen einzelne der hier mitgeteilten Beobachtungen. In diesen Zeilen sind mehrere Vorkommnisse von Ucaarten aus Brack- und Süsswasser notiert, so speziell aus dem Rio Bayano bei Panama. Noch wichtiger erscheint mir aber die Thatsache, dass eine neue Art U.

amazonensis im Amazonenstrom weit oben mehrere tausend Kilometer von der Küste als spezifischer Süsswasserbewohner vorkommt.

Diese Beobachtung zusammen mit den verschiedenen in den beiden vorhergehenden Listen mitgeteilten Fällen zeigen, wie sehr die grossen Stromsysteme Südamerikas bei dem Austausch von Arten zwischen beiden Küsten beteiligt sind. Genauere Untersuchungen von diesem Gesichtspunkte aus würden uns sicher eine Menge überraschender Aufschlüsse bringen.

Sitzung vom 8. Juli 1899.

1. Herr P. Groth legt eine Arbeit des Herrn Privatdozenten Dr. Ernst Weinschenk: „Geologisches aus dem bayerischen Walde“ vor.

2. Herr H. Seeliger bringt eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten Dr. Arthur Korn in Vorlage: „Grundlagen einer mechanischen Theorie des elastischen Stosses und der inneren Reibung in kontinuirlichen Medien.“

3. Herr W. Dyck legt eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten Dr. Eduard von Weber: „Bilinearformen und Differentialsysteme“ vor.

4. Herr Alfred Pringsheim trägt: „Ueber ein Convergenzkriterium für Kettenbrüche mit positiven Gliedern“ vor.

5. Herr Johannes Rückert hält einen längeren Vortrag: „Ueber Polyspermie.“ Derselbe wird an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

Geologisches aus dem bayerischen Walde.

Von Dr. E. Weinschenk.

(*Eingelaufen 8. Juli.*)

Mit Tafel II und III.

Die geologische Beschaffenheit des bayerischen Waldes ist im Allgemeinen wenig abwechslungsreich und in den centralen und südlichen Partien vor allem durch den Wechsel von Granit und Gneis charakterisiert. Den normalen Gneisen gegenüber, welche zum grossen Teil als Granat- resp. Cordieritgneise entwickelt sind, verhält sich der Granit als echte intrusive Bildung, welche teils in mächtigen Lagern, teils in grossen Stöcken auftritt.

Die Granite des bayerischen Waldes sind in ihrer typischen Entwicklung mittelkörnige Zweiglimmergranite von recht gleichmässiger Beschaffenheit, welche gewöhnlich eine äusserst massige Bankung aufweisen und daher an zahlreichen Punkten in mächtigen Quadern gewonnen werden.

Was den Gneis betrifft, so zeigt derselbe die schichtige Structur im Grossen wie im Kleinen aufs deutlichste entwickelt. Die ungemein intensive Faltung, welche denselben betroffen hat, lässt sich häufig schon im Handstück aufs Schönste verfolgen und steht gewissermassen in Contrast zu der äusserst kompakten Beschaffenheit der Gesteine, welche nirgends eine mechanische Lockerung ihres Gefüges erkennen lassen. Im Allgemeinen brechen die Gneisse blockig und zeigen nur untergeordnet eine gewisse Schieferung. Diese klotzigen Felsen,

welche im Gegensatz zum Granit durch die Einwirkung der Atmosphärilien eine Rundung nicht annehmen, bilden so recht das Bezeichnende für den „Wald", in welchem im Uebrigen in Folge der intensiven Bewachsung eigentliche Aufschlüsse verhältnismässig selten sind, so dass man im innern Wald oft auf stundenlanger Wanderung kein sicher anstehendes Gestein zu Gesichte bekommt. Besonders charakteristisch ist, dass namentlich als Bekrönung der Berge Haufwerke zusammengestürzter oder im Zusammensturz befindlicher Gneismassen auftreten, wie sie z. B. die Configuration des Arbergipfels schon auf weitere Entfernung hin kenntlich macht.

Ueber den Ursprung und die geologische Stellung des Gneisgebirges etwas Genaueres zu sagen, ist bei dem augenblicklichen Stande unseres Wissens nicht wohl möglich; es mag hier nur betont werden, dass in den normalen Gneisen des bayerischen Waldes echte Schichtgesteine vorliegen, welche man heute im Allgemeinen als die vielleicht typischsten Vertreter der archäischen Formation ansieht, ohne allerdings direkt bindende Beweise für diese Anschauung beibringen zu können.

Andererseits muss festgestellt werden, dass eine ganze Reihe von Gesteinen, welche in diesem Gebiete gleichfalls als Gneise aufgefasst und kartiert wurden, so z. B. ein grosser Teil der sog. „Körnelgneise", der „Winzergneise" etc. nicht als Schichtgesteine angesehen werden dürfen, sondern vielmehr die schieferigen Randzonen der Granitmassive darstellen, mit welchen sie genetisch zusammengehören.

Die Contactzonen zwischen Granit und Gneis zeigen im Allgemeinen die charakteristischen Erscheinungen, welche man an der Grenze einer intrusiven Bildung gegen Schiefer zu beobachten gewöhnt ist. Zu eingehender Schilderung der hier in Betracht kommenden Verhältnisse wird sich mehrfach Gelegenheit bieten.

Wenn man von Zwiesel aus gegen das die ganze Gegend beherrschende Rabenstein emporsteigt, so erblickt man zunächst etwas nördlich von Zwiesel unten im Thale die be-

rühmte Glashütte Theresienthal, über deren Arbeiterhäusern eine kleine, waldige Kuppe ansteigt, das Rothe Koth oder der Röthberg, welcher dadurch bemerkenswert ist, dass etwa auf halber Höhe desselben die Fortsetzung des Bodenmaiser Erzlagers aufgeschlossen ist, das hier auch eine zeitlang bergmännisch betrieben, vor einigen Jahren aber definitiv aufgelassen wurde. Die Spuren desselben lassen sich ostwärts bis zum Rachel verfolgen. Beim weiteren Anstieg gegen die Höhe von Rabenstein entwickelt sich mehr und mehr eine Fernsicht auf die gerundeten und bewaldeten Berge, welche überall eine gewisse Monotonie der Landschaft hervorbringen und so recht den Charakter einer Waldlandschaft bezeichnen.

Etwa auf der Passhöhe, welche den südlichen Ausläufer des Arbers, den Hühnerkobel oder Hennenkobel von dem Hauptmassiv trennt, befinden wir uns auf granitischem Boden, welcher in der ganzen Gegend durch eine sehr reichliche Sandentwicklung gegenüber dem Gneis ausgezeichnet ist. Hier durchsetzt den Granit einer der zahlreichen Pegmatitgänge, welche die granitischen Bildungen im bayerischen Walde überall begleiten und von denen der vorliegende jedenfalls der berühmteste ist, da er seit Jahrzehnten zum Zweck der Gewinnung von Quarz für den Strassenbau, resp. für die Glashütten, in neuerer Zeit auch zur Gewinnung von Feldspath für die Porzellanfabrikation in ziemlich lebhaftem Betriebe steht. Der Pegmatit selbst zeigt hier die für den Wald typische Entwicklung. Zwar fehlt die für Pegmatite sonst so bezeichnende Ausbildung offener Drusen, auf welchen frei ausgebildete Krystalle aufsitzen, hier wie in den meisten Pegmatiten des Waldes so gut wie ganz und ferner ist auch die charakteristische Schriftgranitstruktur an diesem Vorkommnis nur wenig entwickelt, aber die Unregelmässigkeit in der Struktur, die riesenhafte Korngrösse des Gesteines, die Ungleichmässigkeit in der Verteilung der Mineralien und namentlich die nesterartige Anhäufung einzelner, sonst seltener und an seltenen Elementen reicher Mineralien verleihen dem Gestein so recht den Charakter eines echten Pegmatits.

Die hauptsächlichsten Mineralien dieses Vorkommnisses sind zunächst Quarz und Feldspath, ersterer etwa mit zwei Dritteln, letzterer mit nahezu einem Drittel an der Zusammensetzung des Gesteins beteiligt. Der Quarz ist fast ausschliesslich als Rosenquarz entwickelt, welcher aber seine in frischem Zustande rosenrote Färbung unter der Einwirkung des Sonnenlichtes rasch einbüsst und matt, trübe und weiss wird. Im Uebrigen ist Rosenquarz in den Pegmatiten des Waldes auch sonst weit verbreitet, und es ist sehr bezeichnend, dass überall in diesen Pegmatiten manganreiche Mineralien als Begleiter desselben auftreten, wie auch der Rosenquarz selbst geringe Mengen von Mangan enthält, auf welches wohl mit Recht seine Färbung zurückgeführt werden darf. Der Rosenquarz ist stets derb, grosskörnig und bildet die letzte Ausfüllungsmasse; nur ganz selten lässt derselbe Hohlräume frei, in welchen dann merkwürdig skelettartige Krystalle von gemeinem Quarz oder Rauchquarz zu liegen pflegen, welche gar nicht selten ringsum ausgebildet und in einer mulmigen Masse eingebettet sind.

Der Feldspath, neben Orthoklas resp. Mikroklin, ein graulichweisser Plagioklas bildet in dem Quarz krystallographisch recht gut begrenzte Individuen von mächtigen Dimensionen, die sich gerne zu Nestern zusammenhäufen. Von den übrigen Gemengteilen sind Glimmermineralien die am weitesten verbreiteten: ein echter Muskovit, stets in deutlichen Krystallen mit rhombischem Querschnitt entwickelt und ein dunkler Biotit, welcher nie in Krystallen, sondern fast nur in einer eigentümlichen schaligen Verwachsung mit dem Orthoklas auftritt. In grossen Putzen und Nestern findet man in diesem Mineralaggregat den Triphylin, meist vergesellschaftet mit Beryll, für diesen Fundort die charakteristischsten Bildungen. Der Triphylin bildet bald grobkörnige, frische, blaugraue Massen, aus welchen man hin und wieder deutliche Krystalle herausschlagen kann, bald findet er sich in einzelnen, mit Endflächen versehenen Krystallen, welche aber stets stark zersetzt und zu einem Aggregat von amorphen Manganoxyd- und Eisenoxydphosphaten geworden sind, die man als Pseudotriplit

bezeichnet, neben welchem auf ausgefressenen Höhlungen, meist schlecht krystallisirt, Bildungen von Kraurit, Kakoxen, Beraunit, Vivianit, Wawellit etc., ferner von Wad vorhanden sind. Der Beryll zeigt prismatische Krystalle, meist ohne Endausbildung, teils in Triphylin, teils in Quarz eingewachsen, die selten durchsichtig, meist stark getrübt und gelblich-weiss gefärbt sind. Hin und wieder ist auch der Beryll durch Pseudotriplit verdrängt. Ganz selten endlich beobachtet man noch Krystalle von Columbit, etwas Turmalin, Kalkuranit, sowie Zinkblende, Arseneisen, Speerkies etc.



Fig. 1.
Silberberg bei Bodenmais.

Von dem Quarzbruche aus geht der weitere Weg bis Bodenmais bald durch Gneis bald durch Granit, ohne dass aber irgend welche bemerkenswerten Aufschlüsse dass Studium ihrer gegenseitigen Verhältnisse ermöglichen würden.

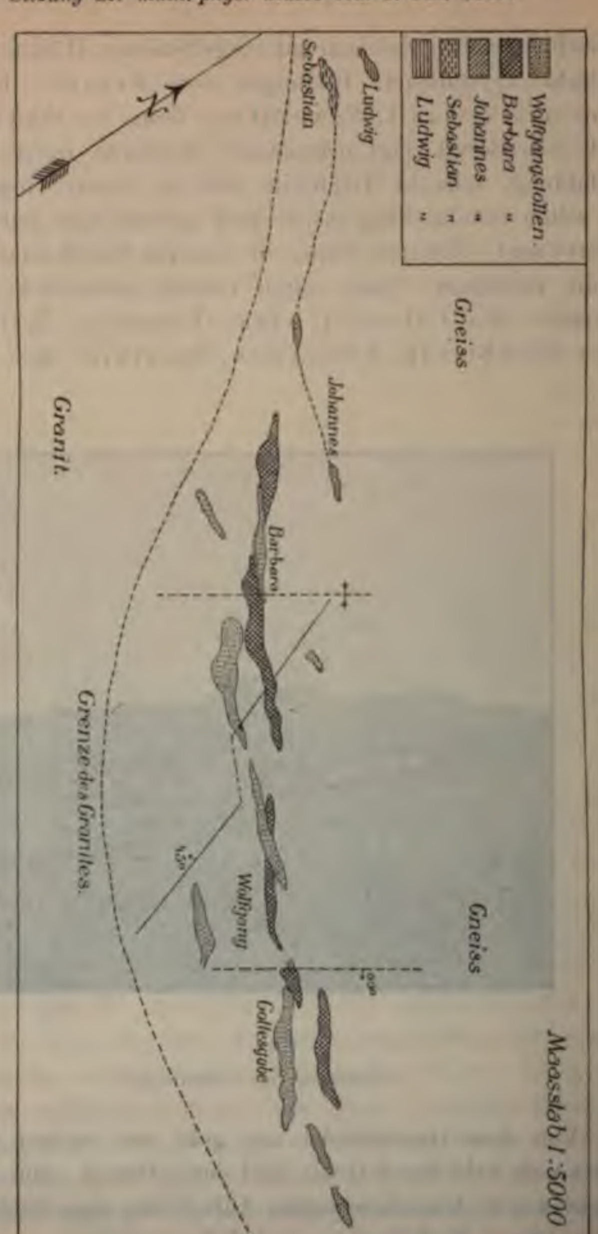


Fig. 2.

Horizontalriss der Erzlager im Silberberg.

Wenn man von Bodenmais nach Süden blickt, so fällt vor allem die kahle zweigipflige Erhebung der „Bischofshaube“ ins Auge, welche nach dem in früheren Zeiten betriebenen Bergbau auf silberhaltigen Bleiglanz den Namen „Silberberg“ erhalten hat. Heutzutage geht der noch immer ziemlich lebhafte Bergbau nur auf Gewinnung der Kiese, welche zur Anfertigung eines durch seine Feinheit und Schärfe in der ganzen Welt berühmten Polierroths, „Potée“, sowie zur

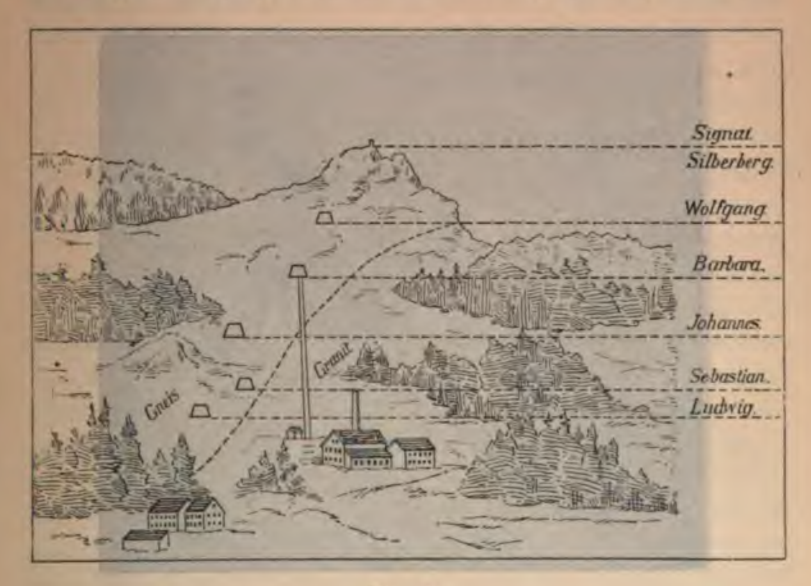


Fig. 3.
Aufriss des Silberbergs.

Gewinnung von kupferhaltigem Vitriol verarbeitet werden. Zu diesem Zwecke werden die zerkleinerten und etwas angerösteten Erze in grossen Haufen aufgeschüttet und einem mehrere Jahre in Anspruch nehmenden natürlichem Röstungsprozess unterworfen. Durch Auslaugen und Schlämmen werden dann aus diesem Röstgut die technischen Produkte in der zwischen Bodenmais und dem Silberberg im Thale liegenden Vitriolhütte gewonnen.

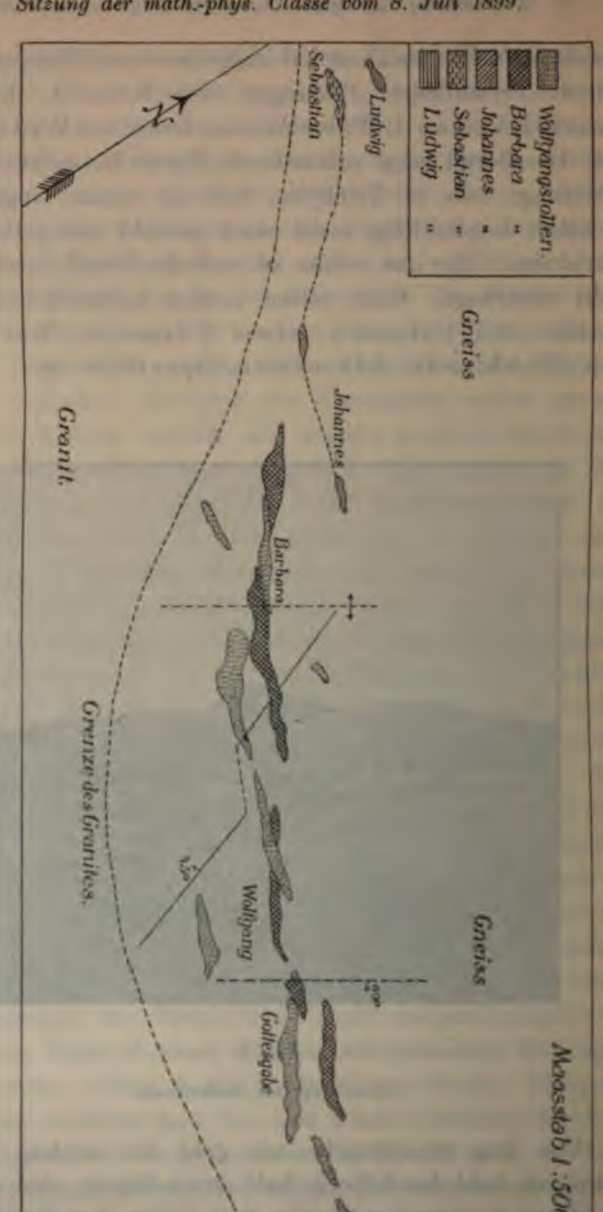


Fig. 2.

Horizontalriss der Erzlager im Silberberg.

Wenn man von Bodenmais nach Süden blickt, so fällt vor allem die kahle zweigipflige Erhebung der „Bischofshaube“ ins Auge, welche nach dem in früheren Zeiten betriebenen Bergbau auf silberhaltigen Bleiglanz den Namen „Silberberg“ erhalten hat. Heutzutage geht der noch immer ziemlich lebhafte Bergbau nur auf Gewinnung der Kiese, welche zur Anfertigung eines durch seine Feinheit und Schärfe in der ganzen Welt berühmten Polierroths, „Potée“, sowie zur



Fig. 3.
Aufriss des Silberbergs.

Gewinnung von kupferhaltigem Vitriol verarbeitet werden. Zu diesem Zwecke werden die zerkleinerten und etwas angerösteten Erze in grossen Haufen aufgeschüttet und einem mehrere Jahre in Anspruch nehmenden natürlichem Röstungsprozess unterworfen. Durch Auslaugen und Schlämmen werden dann aus diesem Röstgut die technischen Produkte in der zwischen Bodenmais und dem Silberberg im Thale liegenden Vitriolhütte gewonnen.

verbunden sind, oder aber, dass sie nicht genau in demselben Niveau auftreten. Die regelmässige Linsenform der Einlagerungen ist häufig gestört durch die Faltungen und Umbiegungen, welche den erzführenden Gneis betroffen haben, so dass manchmal rein sattelförmige, resp. schliesslich eigentümliche keilförmige Einlagerungen hervorgehen. Hin und wieder werden sie auch von Verwerfungsklüften durchzogen, welche bald mit ziemlich reinem Erz ausgefüllt sind, bald als sog. „faule Ruscheln" auftreten. Adern von Erz, die in das Nebengestein ausschwärmen, sind nicht allzuselten, meist aber sehr wenig mächtig, doch finden sich auch grössere Erzkörper, welche unbedingt den Charakter von Gängen an sich tragen. Die Erzeinlagerungen treten besonders gerne an der Grenze zwischen einem ganz dichten, nicht geschiefertem Cordieritgneis von äusserst kompakter Beschaffenheit und eigenartigen Lagen von grobkörnigem, meist grünem Feldspath auf, welch' letztere der Bergmann daher als „höffliches" Gestein bezeichnet, dem er beim Suchen nach Erz folgt. Ausserdem beobachtet man, dass in der Nähe der Erzlinsenzüge die Gesteine meist besonders stark erschüttert sind und in geradezu enormer Anzahl kleinere oder grössere Quarzlinsen enthalten, die in allen Erscheinungen die Art des Auftretens der Erzlinsen im Kleinen wiedergeben. Wo eine solche Erzlinse in ihrem ganzen Querschnitt frisch aufgeschossen ist, kann man hin und wieder den bilateral symmetrischen Aufbau auf's Beste studieren. Auf beiden Seiten zunächst ein dünnes, oft nur millimeterbreites Schwefelkiesband, dann eine Zone von fast reiner Blende, welche häufig einem sehr grobkörnigen Magnetkies Platz macht, auf den die Hauptfüllung der übrigen Erze folgt. Hin und wieder enthalten diese Erze auch grössere oder kleinere Brocken der umgebenden Gesteine eingeschlossen und dann beobachtet man um dieselben die gleiche Reihenfolge der Erze, so dass eigentliche Kokardenerze entstehen.

Für die Erklärung der genetischen Verhältnisse des Erzlagers sind neben der Anordnung der Erzlinsen, dem Vorkommen gangförmiger Bildungen, sowie dem bilateral sym-

metrischen Bau der Linsen und dem Auftreten der Kokardenerze folgende Beobachtungen hauptsächlich von Interesse:

1. Die Erze enthalten stets in grösserer Menge einzelne Individuen der Bestandteile des umgebenden Gneises: Cordierit, Orthoklas (spangrün), Oligoklas (lauchgrün), Quarz, Biotit, oft in Verwachsung mit Chlorit, Hypersthen, Andalusit, Zinkspinell etc., welche in ringsum ausgebildeten Krystallen entwickelt sind, die oberflächlich wie angeschmolzen aussehen und häufig mit einer dünnen, schwarzen, magnetkiesführenden Haut überzogen sind; namentlich tragen die Quarze alle Erscheinungen magmatisch corrodierten Porphyrquarzes an sich.

2. Die Erze treten häufig als Bindemittel zertrümmerter Gneispartieen oder zertrümmerter Quarzlinsen auf, deren einzelne Bruchstücke um so mehr krystallähnlich zu werden pflegen, je mehr das Erz vorherrscht.

3. Die den Erzen zunächst liegenden Gesteine sind sehr häufig mit Zinkspinell (Kreittonit) imprägniert, so dass alle Risse der Mineralien und die Grenzen der einzelnen Individuen etc. mit diesem Mineral ausgekleidet erscheinen, welches hin und wieder auch in grösseren Krystallen in nesterförmigen Anzeicherungen im Erzlager selbst auftritt.

4. Die Erze zeigen manchmal eine blasige, stellenweise eine schlackige Ausbildung, welche nicht auf Verwitterungsvorgänge zurückgeführt werden kann, da solche Bildungen gerade in den grössten Teufen beobachtet werden, in welchen den Atmosphärilien keine irgendwie geartete Wirksamkeit mehr zukommt, und auch thatsächlich keine Spur einer sonstigen Umwandlung zu bemerken ist.

Es weisen somit alle Erscheinungen auf eine mit dem Granit in Zusammenhang stehende rein eruptive Bildung des Bodenmaiser Fahlbandes hin, während bei Annahme gleichzeitiger Entstehung der Erze mit den umgebenden Gneisen die meisten und charakteristischsten Erscheinungen der Erzlagerstätte nicht erklärt werden können.

Die Erze, die man am Silberberg beobachtet, sind vorherrschend Magnetkies, welcher nickelfrei und stets derb

ausgebildet ist, und Schwefelkies, der namentlich gegen den damit zusammen vorkommenden Kupferkies deutliche Krystallform aufweist, der aber in Folge einer nicht unbedeutenden Beimengung von Speerkies äusserst leicht verwittert und auch in Sammlungen kaum längere Zeit konserviert werden kann. Er nimmt dabei eine eigenartige löcherige Beschaffenheit an, welche man treffend als „wurmstichig" bezeichnet hat. Ferner finden sich der schon erwähnte Kupferkies, Blende mit geringem Cadmiumgehalt und silberhaltiger Bleiglanz, in geringen Mengen Zinnerz, etwas Magneteisen und Titaneisen. Von weiteren Mineralien der Erzlagerstätte sind ausser den schon angeführten zu nennen: Graphit in einzelnen Blättchen, Kalkspath, der häufig in Spatheisen und Brauneisen umgewandelt ist, eine braune, monokline Hornblende, welche früher als Anthophyllit bezeichnet wurde, öfters umgewandelt in asbestartige Aggregate, Rutil, welcher im umgebenden Gneis eine besondere Rolle spielt, spärlich Flussspath und Turmalin, sodann verschiedene Zeolithe, sowie ein eigenartiges braunes wasserhaltiges Silikat mit muschligen Bruch, das von Kobell als Jollyit bezeichnet wurde. Endlich als Verwitterungsprodukt der Erze Vivianit, Eisenvitriol, Gyps, Schwefel, Phosphoreisensinter, Brauneisen, Göthit, Rotheisen etc. Erwähnenswert ist ferner, dass in den Erzlagern hin und wieder Gänge von Pegmatit vorkommen, sowie solche auf welchen Spessartin das hauptsächlichste Mineral darstellt, und schliesslich, dass auch Apophysen des Granits in weiterer Entfernung von der Contactzone auftreten, von welchen namentlich diejenige besondere Beachtung verdient, welche nahe am Gipfel des Silberberges ansteht. Hier erweist sich nämlich der Granit als besonders reich an derben Partieen von Magneteisen, welche starken, attraktorischen Magnetismus zeigen.

Von Bodenmais bis Zwiesel sind die geologischen Verhältnisse wieder weniger gut aufgeschlossen; zu erwähnen ist vor allem, dass hier früher bei Langdorf auf Graphit gegraben wurde; wegen schlechter Beschaffenheit des Graphits aber wurde die Gewinnung aufgelassen. Nachdem man aus dem Gneisgebiet wieder in das granitische Terrain übergetreten ist, folgt der nächste gute Aufschluss eigentlich erst am Pfahl, welcher in der nachstehend abgebildeten Ruine Weissenstein einen seiner schönsten Punkte aufweist.



Fig. 6.
Weissenstein bei Regen.

Der Pfahl gehört bekanntlich zu den geologisch interessantesten Bildungen; er stellt eine mächtige Quarzmasse dar, welche in gerader Linie den ganzen bayerischen Wald auf eine Entfernung von ca. 150 km durchsetzt, beginnend bei Pleistein, östlich von Passau, fast bis Schwarzenfeld, nördlich von Regensburg. Er tritt allerdings nur in einem sehr

unterbrochenem Zuge hochaufragender Quarzfelsen zu Tage, deren Typus die Quarzfelsen darstellen, auf welche die Ruine Weissenstein aufgebaut ist. Dieses Verschwinden und Wiederauftauchen der anstehenden Felsen, welches den ganzen Zug des Pfahls charakterisiert, hängt zum Teil mit den einfachen Erosionsvorgängen zusammen, zum Teil aber auch damit, dass der Pfahl durchaus nicht in seiner ganzen Erstreckung die gleiche Mächtigkeit besitzt, sondern sich oft ziemlich ausbaucht, bald aber zu geringer Mächtigkeit zusammenschmilzt.

Der Pfahl selbst besteht ausschliesslich oder jedenfalls fast ausschliesslich aus derbem Quarz, welcher hin und wieder etwas kavernöse Beschaffenheit hat und dann auf den Hohlräumen durchsichtige Krystalle von Quarz der einfachsten Combination aufweist. Die mächtigen weissen Felsen sind hin und wieder durchaus gleichmässig struiert, meist aber zeigen sie eine eigentümliche Trümmerstruktur, welche sich in einer Durchäderung einer lichtbräunlich bis graulich gefärbten Masse durch völlig weisse Quarzadern zu erkennen gibt, wie sie namentlich an verwitterten Stellen deutlich hervortritt.

In seiner ganzen Erstreckung wird der Pfahl begleitet von einer Gruppe eigenartiger Schiefergesteine, den Pfahlschiefern Gümbels, welche überall im Streifen und Fallen mit dem Pfahl selbst übereinstimmen. Das ist auch der hauptsächlichste Grund, welcher Gümbel zu der Ueberzeugung brachte, dass in dem Pfahl eine Einlagerung von Quarzit in den Schiefergesteinen vorliege, und dass derselbe eine gleichalterige Bildung mit den umgebenden Schiefergesteinen darstelle.

Das geologische Interesse, welches der Pfahl besitzt, wird durch seine Auffassung als Einlagerung nicht gemindert, im Gegenteil dürfte eine analoge Einlagerung, begleitet von so eigenartigen Schichtgesteinen, wie das die Pfahlschiefer darstellen, auf der ganzen Erde nicht mehr vertreten sein. Indess scheint doch schon bei einer eingehenden Betrachtung des Pfahlquarzes selbst die Theorie seiner sedimentären Entstehung einigermassen anfechtbar, ganz abgesehen davon, dass das

Studium der Pfahlschiefer zu durchaus abweichenden Resultaten führt.

Die dem Pfahl zunächst liegenden Gesteine sind zum Teil völlig dichte, hälleflintartige Bildungen, welche chemisch gneisartig zusammengesetzt sind, meist aber so dicht erscheinen, dass man auch unter dem Mikroskop die Mengenverhältnisse der einzelnen Mineralien nicht beurteilen kann. Zum Teil sind sie mehr schieferig ausgebildet, und es treten schliesslich an Stelle derselben eigentliche feinschieferige, weisse Sericitschiefer, wie sie in vollständig analoger Ausbildung z. B. unter den Porphyroiden des Taunus vorhanden sind. Bei weiterer Entfernung vom Pfahl tritt etwas Flaserstruktur hervor, ausgezogene Feldspathaugen liegen in einer Grundmasse mit ziemlich viel dunkelem Glimmer; der Sericit tritt mehr und mehr zurück, der dunkle Glimmer hervor, die Gesteine werden daher immer dunkeler und nur die lichten Flecken der Feldspäthe, welche sich mehr und mehr in ihrer Form Krystallen nähern, treten daraus hervor.

In nicht zu weiter Entfernung schon lassen sich die Pfahlschiefer als sehr glimmerreiche, porphyrische Randzone des Granitmassivs erkennen, dessen Umgrenzung sie bilden. Die eigentümliche Erscheinung der Ausbleichung des Gesteins, die damit verbundene Auszerrung der Feldspathkrystalle zu Augen, die Zertrümmerung der ganzen Bildung unter gleichzeitiger Neubildung von Sericit, welche diese Granitporphyre in eigentliche Sericitschiefer hinüberführt, lässt nun nach allen bisherigen Erfahrungen nur eine Erklärung als richtig erscheinen, nämlich die, dass das Auftreten des Pfahls mit seinen Pfahlschiefern die Stelle einer bedeutenden Dislokation bezeichnet, dass die Sericitschiefer nichts weiter sind als eine aus dem Granitporphyr hervorgegangene Reibungsbreccie, welche hin und wieder sandartig zertrümmert erscheint, an anderen Stellen schieferig ist oder endlich zu einem hälleflintähnlichen Gestein verfestigt erscheint, und dass schliesslich der Pfahl selbst nichts weiter ist als die Ausfüllung dieser ungewöhnlich weit zu verfolgenden Dislokationsspalte, also ein ächter Gang,

der mit den umgebenden Gesteinen absolut nicht gleichalterig sein kann.

Von Regen nach Zwiesel und von da nach Grafenau sind in den Bahneinschnitten hin und wieder unbedeutende Aufschlüsse vorhanden, welche bald Granit bald Gneis anstehend zeigen, nirgends aber lässt sich der Zusammenhang beider Gesteine eingehend verfolgen. Auch auf dem Wege von Grafenau bis Freyung ist kaum irgendwo eine Stelle von grösserem geologischem Interesse vorhanden. Erwähnt mag nur werden, dass in der Gegend von Hohenau der sonst so gleichmässige Granit eine eigentümliche Beschaffenheit annimmt, indem hier grössere Blättchen von Biotit aus der weissen Grundmasse des Gesteins in ziemlicher Anzahl hervortreten und demselben ein gefllecktes Ansehen verleihen; technisch ist dieses an sich schöne Gestein kaum verwendbar, da es stark zermalmt ist.

Die Contactverhältnisse des Granites mit den Schiefergesteinen trifft man in besonders schöner Ausbildung in der Buchbergerleite bei Freyung, welche auch landschaftlich die schönste Partie in der weitesten Umgebung darstellt.

Am Eingang des Thales von Freyung her trifft man eine porphyrartige Ausbildung des Granites, welche namentlich schön etwas oberhalb des Thalweges an einem Wegeinschnitt aufgeschlossen ist und hier nebeneinander alle möglichen Uebergänge zu eigentlicher Augengneisstruktur erkennen lässt. Etwas weiter thaleinwärts wird dieser Granitporphyr glimmerreich, und es gehen bald ähnliche dunkle, glimmerreiche Porphyrgesteine mit Augengneisstruktur hervor, wie sie in der Nähe des Weissensteins vorhanden sind. Doch nimmt hier die Umwandlung des Gesteins einen anderen Verlauf. An Stelle der sericitischen, weissen Schiefer, die ein so typisches dynamometamorphes Produkt darstellen, findet man hier, dass unter Erhaltung der dunklen Farbe die Grundmasse dichter und dichter wird, so dass schliesslich makroskopisch der Reichtum

an Glimmer nicht mehr zu erkennen ist. Hin und wieder treten gleichzeitig die Einsprenglinge ganz zurück, und man hat an Stelle der Porphyre dichte, dunkle Gesteine von mattem Bruch, welche man bei flüchtiger Betrachtung leicht mit bituminösem Mergelschiefer oder ähnlichen klastischen Bildungen verwechseln könnte. Diese verschiedenen Faciesbildungen des granitischen Gesteines finden sich nun aber nicht etwa in einer bestimmten Reihenfolge, sondern vielmehr in buntem Gemenge, so dass man an den fast fortdauernden Aufschlüssen, welche die nun zur Schlucht werdende Buchbergerleite bietet, von Schritt zu Schritt einen Wechsel der Gesteine beobachtet, der noch interessanter wird dadurch, dass zwischen den einzelnen Ausbildungsformen des Eruptivgesteins sich unzweifelhafte Contactgesteine in schmäleren oder mächtigeren Lagern einschalten. Diese letzteren Gesteine haben zum Teil echten Hornsteinhabitus, bald sind sie in ihrem Aussehen von den dunklen granitischen Gesteinen kaum zu unterscheiden, und es dürfte in vielen Fällen bei makroskopischer Betrachtung die Entscheidung schwer werden, welcher Art von Bildungen ein derartiges dichtes, dunkles Gestein zuzuzählen ist.

Der Weg von Freyung nach Waldkirchen bringt keine bemerkenswerten Aufschlüsse; man überschreitet die Grenze des Granites gegen einen ziemlich mächtigen Stock dioritischer Gesteine von sehr charakteristischem Habitus, die aber nirgends in grösserer Ausdehnung entblösst sind, sondern fast nur in Findlingen studiert werden können.

An einzelnen Stellen findet dieser Diorit als Strassenmaterial Verwendung, zu welchem er sich in Folge seiner Zähigkeit im Gegensatz zu dem hier fast überall verwendeten Granit recht gut eignet.

Zwischen Waldkirchen und Hauzenberg gelangt man ebenso unmerklich wieder in das Gebiet des Granites, welcher hier seine vorzüglichste Beschaffenheit annimmt. Besonders ausgezeichnet durch gleichmässiges Korn, Festigkeit und gross-

bankige Absonderung ist das Gestein auf der Höhe von Hauzenberg. In dem dortigen Bruche liegen noch einige mächtige Monolithe, welche von der guten Beschaffenheit des Materials ein glänzendes Zeugnis ablegen, und die seinerzeit zum Bau der Befreiungshalle in Kelheim hier gebrochen wurden, deren Transport sich aber in Folge des schwachen Unterbaues der Strassen als unmöglich erwies, und die nun zum Teil an Ort und Stelle ihres Vorkommens lagern, zum Teil an der Strasse von Hauzenberg nach Passau liegen geblieben sind.



Fig. 7.

Graphitgrube bei Pfaffenreuth mit Haspelbetrieb.

In Hauzenberg ist man an der westlichen Grenze des berühmten Passauer Graphitgebietes angelangt, welches sich von hier ostwärts fast bis zur Landesgrenze, südlich bis zur Donau und stellenweise noch etwas darüber hinaus ausdehnt. Direkt östlich von Hauzenberg tritt eine nach

allen Seiten vollständig regelmässig gebaute Kuppe hervor, von welcher südlich ein ziemlich mächtiger Stock eines echten Hornblendegabbro mit Uebergängen in Uralitgabbro und Norit ansteht, welches Gestein ich mit dem Namen Bojit belegt habe.

Der Weg von Hauzenberg nach dem bekannten Graphitfundort Pfaffenreuth führt vor Germannsdorf zunächst über den Bojit und sodann meist ohne gute Aufschlüsse durch einen Wechsel von Granit und Gneis, welche von kleineren Bojitstöcken, sowie von Gängen eines Hornblendeporphyrits (Nadeldiorit Gümbel's) durchsetzt werden.

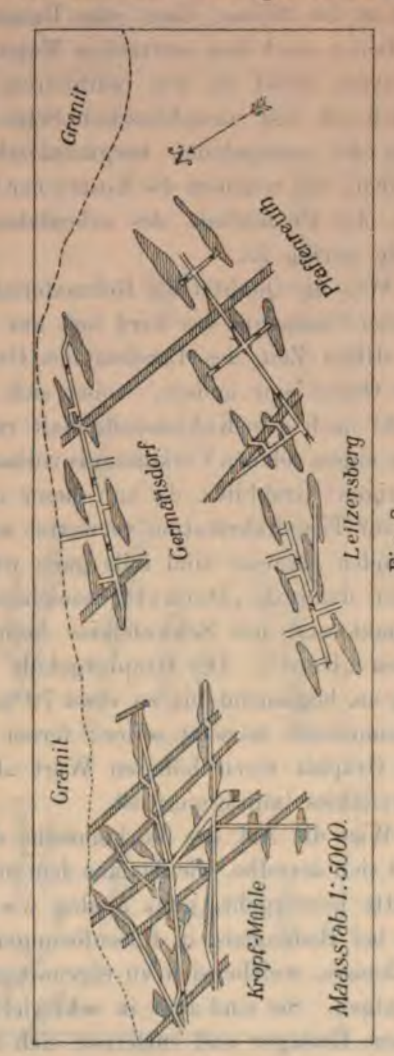


Fig. 8. Horizontalriss des Kropfmühl-Pfaffenreuther Graphitstreichens.

Kurz vor Pfaffenreuth betritt man eines der wichtigsten und reichsten Graphitlager, dessen Streichen durch eine grosse Anzahl von Bretterhütten bezeichnet wird, deren Charakter die beigefügte Abbildung gibt, welche aufs Augenfälligste die primitive Art und Weise der Ausbeutung zeigt, wie sie fast allenthalben im Graphitgebiet ausgeübt wird, und bei welcher der Haspel

noch das einzige Förderungsmittel ist. Die Gewinnung des Graphits erfolgt heutzutage ausschliesslich unterirdisch, und zwar in der Weise, dass jeder Bauer auf dem eigenen Grund und Boden nach dem wertvollen Material gräbt, da der Graphit in Bayern nicht zu den muthbaren Mineralien gehört. Der Betrieb ist fast ausschliesslich Schachtbetrieb, der Abbau in Folge der mangelnden bergmännischen Schulung ein echter Raubbau, bei welchem die Kosten der Gewinnung ungewöhnlich hoch, der Prozentsatz des erbeuteten Materials unverhältnismässig gering ist.

Was die Qualität des Rohmaterials betrifft, so ist dasselbe in jeder Campagne (es wird fast nur während des Winters, in der stillen Zeit des Landmannes Graphit gegraben) und in jeder Grube eine andere, wobei sich die Wertschätzung nicht sowohl nach dem Kohlenstoffgehalt richtet als nach der Menge des in einem solchen Vorkommnis vorhandenen gröber blätterigen, „flinzigen“ Graphites, da nur dieser aus dem Gestein gewonnen und zur Tiegelfabrikation verwertet werden kann. Die graphitführenden Gesteine sind teils ganz weich, geradezu erdig und werden dann als „Dachel“ bezeichnet, oder sie sind hart und kompakt und mit Schwefelkies imprägniert und führen den Namen „Beos“. Der Graphitgehalt ist sehr wechselnd, von 20 % ca. beginnend bis zu etwa 70 %, doch sind die letzteren Vorkommnisse äusserst selten; ferner besitzt der schwefelkiesfreie Graphit einen höheren Wert als derjenige, welcher mit Schwefelkies imprägniert ist.

Was die Art des Vorkommens des Graphites betrifft, so findet sich derselbe, wie das aus dem nebenstehenden Horizontalschnitte hervorgeht, ganz analog wie die Erzlager am Silberberg bei Bodenmais in linsenförmigen Anreihungen innerhalb des Gneises, welche sich zu eigenartigen Komplexen von Zügen vereinigen. Sie sind aber in sehr viel grösserer Zahl vorhanden als jene Erzlager und entfernen sich bedeutend weiter von der Contactgrenze des Granits, wie dies die Kartenskizze des Passauer Graphitgebietes erkennen lässt; doch ist der genetische Zusammenhang des Graphits mit dem Granit schon äusserlich da-

durch klargelegt, dass in der nächsten Nachbarschaft des Granites die mächtigsten und zahlreichsten Linsenkomplexe auftreten, welche gleichzeitig auch das „flinzigste“ Material

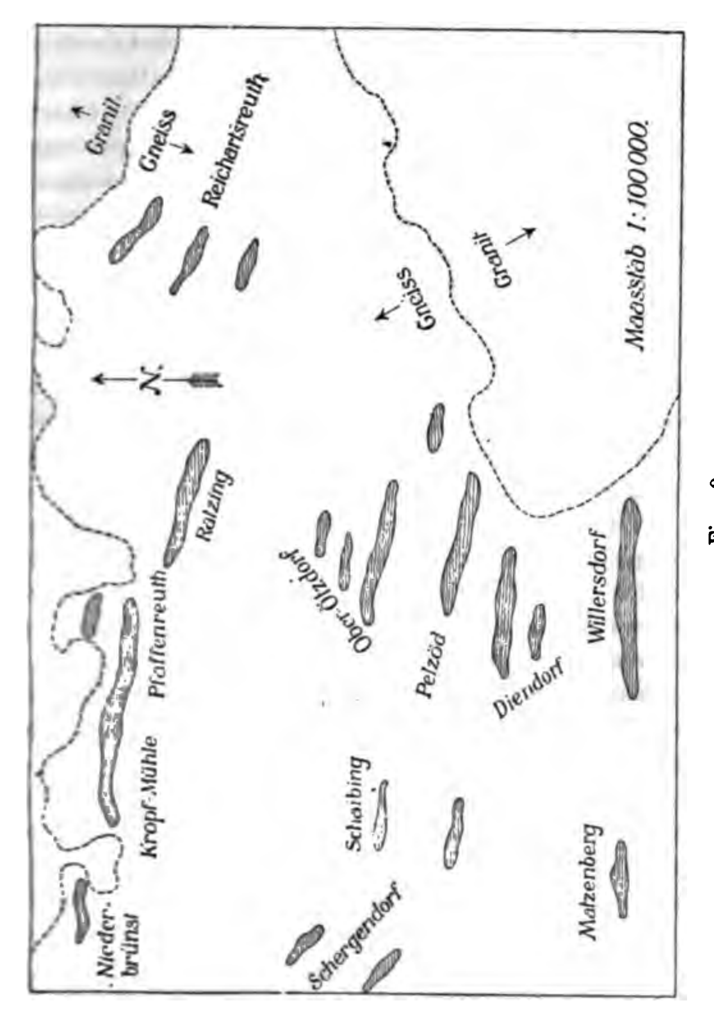


Fig. 9. Uebersichtsplan des Graphitgebietes.

führen, während die im Centrum des Gebietes auftretenden Vorkommnisse minderwertigen Graphit darbieten. Ein besonderes Interesse wecken eine Reihe von Umständen, welche die Graphit-

einlagerungen fast überall begleiten. Man beobachtet zunächst, dass sie sich mit besonderer Vorliebe an Lager von körnigem Kalk anschliessen, welche an zahlreichen Stellen als Einlagerungen im ganzen Gebiete auftreten, und die durch das Vorhandensein einzelner Graphitindividuen und zahlreicher Contactmineralien ausgezeichnet sind, von welchen namentlich Forsterit, Phlogopit, Spinell, Pargasit, Chondrodit, Chlorit und Wollastonit zu nennen sind. Zwischen die Graphitlager und diese Kalkzüge haben sich häufig Lagergänge eines eigenartigen, pegmatitähnlichen Augitsyenits eingedrängt, welche durch unregelmässige und grobkörnige Struktur ausgezeichnet, namentlich durch das Vorkommen grosser Titanitkrystalle (Grothit) und langprismatischer Individuen von Skapolith (Porzellanspath, Passauit) bekannt geworden sind.

In diesen Gesteinen stellen sich in der Nachbarschaft einer Graphiteinlagerung stets eigenartige mehr oder minder weitgehende Umbildungserscheinungen ein, welche durch intensive chemische Processe hervorgebracht wurden. Im einfachsten Fall ist der Augit, der gerne in derben Putzen auftritt, in Uralit umgewandelt, und daneben der als accessorischer Gemengteil auftretende Skapolit, sowie auch der Feldspath mehr oder minder in Kaolin umgewandelt. Dann aber geht die Veränderung weiter, der Uralit wird zu losen Aggregaten von Nontronit, welches Mineral auch das übrige Gestein durchädert und Schritt für Schritt die Stelle des Orthoklases einnimmt, so dass schliesslich das ganze Alkalithonerdegestein in wasserhaltiges Eisenoxydhydrat verwandelt erscheint.

Auch die graphitführenden Gneise selbst haben die weitgehendsten Veränderungen erlitten, so dass sie an zahlreichen Stellen selbst aus den tiefsten Teufen nur als lockerer Mulm gefördert werden. Man beobachtet auch in ihnen die Umbildung zu Kaolin, häufiger aber Bildungen von Nontronit, welche oft von Opal begleitet werden, von mulmigen Mangansuperoxydsilikaten (Mog) mit kleinen perlmutterglänzenden Blättchen von Batavit. Kurzum die ganze Erscheinung weist auf äusserst intensive chemische Prozesse hin, welche an das

Auftreten des Graphits gebunden erscheinen, und die daher unzweifelhaft auch genetisch mit demselben in Zusammenhang stehen, zumal ganz analoge Umbildungen sich auch in Begleitung des Graphites im nahegelegenen böhmischen Gebiete finden und auch das berühmte Ceyloner Graphitvorkommen von ähnlichen Umwandlungsprodukten begleitet wird.

Im allgemeinen findet sich der Graphit in diesen zersetzten Gesteinen als gleichmässige Imprägnation von schuppiger Beschaffenheit, wobei die Art des Auftretens des Minerals im Gesteine gleichfalls für seine sekundäre Entstehung spricht. Die Graphitblättchen liegen stets auf den Grenzen der einzelnen Gesteinsgemengteile, auf den Spaltrissen der ursprünglichen Mineralien, namentlich der Glimmer, soweit diese erhalten geblieben sind, wobei sie sich den eckigen Contouren der einzelnen Mineralkörner aufs Innigste anschliessen. Endlich aber beobachtet man auch gar nicht selten gangförmige Bildungen von Graphit, allerdings meist von geringen Dimensionen, welche die zersetzten Gneise durchziehen.

Ausserdem treten als Begleitgesteine der Graphiteinlagerungen nicht selten Plagioklasgesteine vom Charakter der schon erwähnten Hornblendegabbro (Bojite) und Hornblendeporphyrite, welche teils als Lager die Linsenzüge begleiten, teils auf Verwerfungsspalten durch die Graphitlinsen hindurchsetzen, wie solche namentlich das Kropfmühle-Pfaffenreuther Lager (Fig. 8) in grosser Anzahl aufweist. Schon dadurch sind sie als jüngere Bildungen kenntlich, was aber auch daraus hervorgeht, dass diese Gesteine die Umwandlungsvorgänge nicht mitgemacht haben, sondern stets frisch sind, dass sie dagegen die Graphitlager chemisch dadurch beeinflussen, dass sie dieselben stets mit Schwefelkies imprägnieren, so dass alle jene Lager kiesführend sind, welche von solchen Plagioklasgesteinen begleitet werden.

Das ganze abwechslungsreiche Bild, welches uns die Passauer Graphitlagerstätte darbietet, macht die sekundäre Zuführung des Graphites zweifellos, eine Zuführung, welche von chemischen Prozessen begleitet war, die mit höchster Intensität

wirkend, Umsetzungen hervorbrachten, wie wir sie sonst selten und nur im Zusammenhang mit vulkanischen Prozessen zu beobachten gewöhnt sind; bei welchen ferner eine massenhafte Zuführung höherer Oxyde von Eisen und Mangan stattgefunden hat, so dass kaum eine andere Hypothese Wahrscheinlichkeit für sich hat, als diejenige, dass der Graphit der Exhalation gasförmiger Carbonyle dieser Metalle seine Entstehung verdankt, einer Gruppe leicht zerstörbarer Verbindungen, welche beim geringsten Anstoss zu Kohlenstoff einesteils, zu Metalloxyd andernteils zerfallen.

Von den im Graphitgebiet zu beobachtenden Verhältnissen sind nun noch einige Worte den am südlichen Rande des Gebietes hoch über der Donau liegenden Kalkbruch am Steinhag bei Obernzell zu widmen, welcher in der Geologie eine gewisse Berühmtheit erlangt hat durch das Vorkommen von Ophicalciten, welche Gümbel mit den seinerzeit aus Canada beschriebenen scheinbaren organischen Resten identificierte und als Eozoon bavaricum abschied. Die hier auftretenden Bildungen sind durchschnittlich etwas gröber struiert als die canadischen, zeigen aber in ihrer petrographischen Ausbildung wie in ihrem geologischen Auftreten die grösste Aehnlichkeit mit diesen. Es sind eigentümlich schlierige, in ihrer Form mit kleinen Korallenstücken vergleichbare Einlagerungen im reinen, schneeweissen Marmor, welche die Ophicalcitbildung aufweisen. Was die Entstehung der Ophicalcite selbst betrifft, so liegen in denselben nichts weiter vor als Umwandlungsprodukte besonders Forsterit-reicher, contactmetamorphischer Kalke, welch' letztere schon in frischem Zustand eine der „Eozoon"struktur nicht unähnliche Bildung aufweisen, wobei die feinere Struktur aber erst durch die Umbildung des Forsterits in Serpentin entsteht, indem dadurch erst die verschiedenen „Röhren" und „Kanäle" zur Entstehung kommen, welche zur Verwechslung mit organischen Ueberresten geführt hat. In den ursprünglichen Forsteritkalken wird trotz der Aehnlichkeit der Verteilung des Forsterits im Gesteine mit derjenigen des späteren Serpentins niemand eine organische Struktur vermuten. Die

eigenartige Form, welche diese Silikatanreicherungen im Kalk besitzen, dürfte am ehesten mit den bedeutenden Faltungsprozessen in Zusammenhang gebracht werden, welche die Gneise in so hohem Masse erkennen lassen, die die linsenförmige Kalkeinlagerung umschliessen. Solchen Kräften gegenüber pflegt sich reiner Kalk als durchaus plastische Masse zu verhalten, während die silikatreicheren Partieen spröder und weniger umbiegungsfähig sind. Sie wurden daher zerrissen, und wir haben in den schlierigen Ophicalcitpartieen wohl nichts anderes als die auseinandergezogenen Reste einer ursprünglich Forsteritreichen Gesteinsschicht vor uns.

Im übrigen ist zu erwähnen, dass in dem Kalkbruch die Linsenform der Kalkeinlagerung prachtvoll zu verfolgen ist, und dass im Hangenden derselben früher ein Lager von Syenit aufgeschlossen war, welches sich als besonders reich an grossen Passauitindividuen erwies.

Beim Abstieg vom Steinhag gegen Oberzell hat man am Wege, der sich am Steilabhange über der Donau hinzieht, ein prachtvolles Profil des Systems der Gneise vor sich, an welchem man namentlich die Schichtenverbiegungen in grossartiger Weise beobachten kann und hin und wieder auch kleinere Einlagerungen von körnigem Kalk sieht.

In Obernzell selbst wird seit Jahrhunderten der grösste Teil des im Gebiete gewonnenen Graphites zur Anfertigung von Schmelztiegeln (Passauer Tiegeln) verarbeitet, zu welchem Zwecke das Rohmaterial zunächst gepocht und gemahlen und durch Absieben oder Ausblasen von dem dabei entstehenden feineren Material gereinigt wird. Der in dem Gneis vorhandene blätterige, „flinzige" Graphit widersteht in Folge seiner Geschmeidigkeit der Zertrümmerung, während die steinigen Gemengteile zu Staub zerkleinert werden, und man kann auf diesem einfachen Wege aus verhältnismässig geringhaltigem Rohmaterial ein Produkt mit einem Reingehalt von 92—94 % Kohlenstoff erzielen, in dem auch von dem ursprünglich vorhandenen Schwefelkies nichts mehr vorhanden ist, so dass der gereinigte Passauer Graphit zum Zwecke der Tiegelfabrikation

guten Ceylonsorten völlig ebenbürtig ist. Der so gewonnene „Flinz“, welcher eine äusserst milde und schlüpfrige Beschaffenheit hat, wird in grossen Knetmaschinen gleichmässig mit feinem Thon gemengt und das so gewonnene Produkt dann auf der Töpferscheibe zu Tiegeln geformt und gebrannt. Der Hauptvorzug der aus diesen blätterigen Graphiten hergestellten Tiegel besteht vor allem in der guten Wärmeleitungsfähigkeit des Materials, in ihrer Widerstandsfähigkeit gegen das Zerreissen bei raschem Temperaturwechsel, sowie in der Eigenschaft, dass eine Legirung mit den Metallen, welche in solchen Tiegeln geschmolzen werden, nicht eintritt. Für viele wichtige Zwecke der Technik sind sie somit völlig unersetzlich.

Die Steilwände der Donau zwischen Obernzell und Passau zeigen im ersten Teil den Gneis in seiner typischsten Entwicklung. Später treten einzelne granitische Lager in demselben auf und schliesslich ist der Wechsel zwischen den Lagern von Granit und Gneis ein so bunter geworden, dass sich der Gesteinscharakter fast von Schritt zu Schritt ändert. Es macht dann den Eindruck als ob die Gneisscholle an ihrem Rande geradezu aufgeblättert wäre, wobei zwischen die einzelnen Lagen das schmelzflüssige, granitische Magma sich eingedrängt hätte.

Grundlagen einer mechanischen Theorie des elastischen Stosses und der inneren Reibung in kontinuirlichen Medien.

Von **Arthur Korn.**

(Eingelaufen 8. Juli.)

Man darf wohl sagen, dass sich in der Mechanik zwei Principien über jeden Zweifel bewährt haben:

1) das Princip von D'Alembert,

2) das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft;

das erste ist insofern allgemeiner, als es uns jeden mechanischen Vorgang in allen seinen Einzelnheiten ergiebt, während wir aus dem zweiten immer nur eine specielle Seite dieses Vorganges gewinnen können.

Zur Versöhnung der gegenwärtigen Theorieenbildungen in der Physik wäre es nun von Wichtigkeit, wenn man das Princip der lebendigen Kraft immer gradezu aus dem Princip von D'Alembert ableiten könnte; das ist nun bei allen reinmechanischen Problemen stets möglich gewesen mit einigen speciellen Ausnahmen, bei denen wohl die Schuld in der Stellung der betreffenden Aufgabe zu suchen ist. Ein Beispiel hierfür liefert das Problem des Stosses zwischen zwei materiellen Teilchen:

Wenn zwei materielle Teilchen m_1 m_2 in der Richtung der x Axe mit den Geschwindigkeiten V_1 V_2 fortfliegen, so werden sie, falls V_1 grösser als V_2 (und zu irgend einer Anfangszeit die x Koordinate von m_2 grösser ist, als die von m_1), in einem

bestimmten Momente zusammenstossen; es ergiebt sich aus dem D'Alembert'schen Princip — es ist dies eine von D'Alembert selbst gegebene Anwendung seines Princips — dass die beiden Teilchen nach dem Stoss mit der gemeinsamen Geschwindigkeit:

$$V_1' = V_2' = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

weiterfliegen, und das Princip der lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2} m_1 V_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 V_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 V_2'^2$$

wird im allgemeinen nicht erfüllt sein.

Der Grund dieser Nichtübereinstimmung ist — das hebt bereits D'Alembert in seiner Dynamik selbst hervor — in den Unstetigkeiten im Augenblicke des Stosses zu suchen, und man darf diese Aussage ganz allgemein machen:

Ueberall, wo bei mechanischen Problemen das D'Alembert'sche Princip zu Verstössen gegen das Princip der lebendigen Kraft führt, sind Verstösse gegen das Princip der Stetigkeit in den Voraussetzungen des betreffenden Problems die Ursache.

Wenn wir den sogenannten elastischen Stoss, der mit dem Princip der lebendigen Kraft in Einklang ist, aus dem D'Alembert'schen Princip herleiten wollen, müssen wir uns von allen Unstetigkeiten frei machen, und wir stellen uns das Problem in folgender Weise:

Der ganze Raum ist erfüllt durch ein inkompressibles Kontinuum, wir betrachten in demselben zwei materielle Teilchen m_1 und m_2, d. h. zwei die kleinen Volumina τ_1 und τ_2 erfüllende kontinuierliche Medien, die — allerdings nur sehr grossen Drucken gegenüber — einer geringen Kompression resp. Dilatation fähig sind; die Geschwindigkeitskomponenten $u\ v\ w$ sind im ganzen Raum, also auch an den Oberflächen von τ_1 und τ_2 stetig.

Aussen wie innen bestehen Gleichungen von der Form:

$$
1)\quad \begin{cases} \mu \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \mu \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}
$$

wo p eine stetige Funktion der Zeit und der Stelle, den Druck des Kontinuums vorstellt. Ferner ist aussen:

$$
2)\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,
$$

infolge der Inkompressibilität des Aussenmediums, innen besteht ausser der Kontinuitätsgleichung

$$
3^a)\quad \frac{du}{dt} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)
$$

noch eine Relation:

$$
3^b)\quad F(\mu, p) = 0,
$$

die wir hier nicht als bekannt vorauszusetzen brauchen, abgesehen von der Kenntnis, dass die Dichtigkeit μ nur durch ausserordentlich grosse Druckschwankungen geringe Veränderungen erleiden kann.

Wir suchen die Bedingungen auf, unter welchen die Geschwindigkeitskomponenten im ganzen Raume von der Form sein können:

$$
4)\quad \begin{cases} u = u_0 + L \sin \dfrac{t}{T} 2\pi, \\ v = v_0 + M \sin \dfrac{t}{T} 2\pi, \\ w = w_0 + N \sin \dfrac{t}{T} 2\pi, \end{cases}
$$

wo T eine gegen die Zeiteinheit sehr kleine Schwingungsdauer vorstellt und, wie immer, über $u_0\, v_0\, w_0\, L\, M\, N$ die Voraussetzung gemacht wird, dass:

5ᵃ) $\left\{\begin{matrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ L & M & N \end{matrix}\right|$ nicht gegen die Geschwindigkeitseinheit,

5ᵇ) $\left\{\begin{matrix} \frac{du_0}{dt} & \frac{dv_0}{dt} & \frac{dw_0}{dt} \\ \frac{dL}{dt} & \frac{dM}{dt} & \frac{dN}{dt} \end{matrix}\right|$ nicht gegen die Grösse $\frac{\text{Geschwindigkeitseinheit}}{\text{Zeiteinheit}}$

von der Ordnung $\frac{\text{Zeiteinheit}}{T}$ gross sein sollen.

Die aus 1) bis 5) folgenden Bedingungen sind: Es besteht eine Funktion φ von der Beschaffenheit, dass bis auf kleine Grössen:

$$6)\qquad \left\{\begin{aligned} L &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ M &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ N &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right| \text{ im ganzen Raume,}$$

$$7)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \text{ im Aussenraume}$$

und:

$$8)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = k \cdot \varphi, \text{ innerhalb } \tau_1 \text{ und } \tau_2,$$

wo k eine Konstante ist, die von der Kompressibilität der Teilchen m_1 und m_2 abhängt und hier zur Vereinfachung für beide Teilchen von derselben Grösse vorausgesetzt werden möge. Zur Ableitung von 8) aus 3ᵃ) und 3ᵇ) brauchen wir, wie leicht zu übersehen ist, die Relation 3ᵇ) selbst nicht zu kennen, abgesehen von der Kenntnis, dass die Dichtigkeit μ nur durch ausserordentlich grosse Druckschwankungen geringe Veränderungen erleiden kann.

Schliesslich müssen die Ableitungen von φ im ganzen Raume, also auch bei dem Durchgange durch die Oberflächen

ω_1 und ω_2 von τ_1 und τ_2 stetig sein und im Unendlichen[1]) die Bedingungen der Ableitungen von Potentialfunktionen erfüllen.

Die Gleichungen 6) bis 8) stellen ein ganz bestimmtes Problem der Potentialtheorie dar, wenn an der grossen Kugelfläche (P) ein gegebener periodischer Druck vorausgesetzt wird, durch den die Konstante:

$$9) \qquad c = -\frac{\int\limits_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\omega\,^{2})}{\tau}, \quad (\tau_1 = \tau_2 = \tau \text{ vorausgesetzt}),$$

die „mittlere Kompression" der Teilchen $m_1\, m_2$ gegeben ist.

Das Problem ist durch folgende kombinatorische Methode lösbar:

Man bilde successive die folgenden Gleichungen:

$$10_0) \qquad \varphi_0 = c,$$

$$10_1) \qquad \varphi_1 = -\frac{k}{4\pi}\int\limits_{\tau_1} \frac{c}{r}\, d\tau - \frac{k}{4\pi}\int\limits_{\tau_2} \frac{c}{r}\, d\tau,$$

$$10_2) \qquad \varphi_2 = -\frac{k}{4\pi}\int\limits_{\tau_1} \frac{\varphi_1}{r}\, d\tau - \frac{k}{4\pi}\int\limits_{\tau_2} \frac{\varphi_1}{r}\, d\tau,$$

$$10_3) \qquad \varphi_3 = -\frac{k}{4\pi}\int\limits_{\tau_1} \frac{\varphi_2}{r}\, d\tau - \frac{k}{4\pi}\int\limits_{\tau_2} \frac{\varphi_2}{r}\, d\tau,$$

. . . . ,

dann folgt:

$$\Delta(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots) = 0, \text{ im Aussenraume,}$$

$$\Delta(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots) = k(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots),$$
innerhalb τ_1 und τ_2,

es ist also:

$$11) \qquad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$$

[1]) An einer grossen Kugelfläche (P).

[2]) Wir setzen ω, τ, wenn man dafür sowohl $\omega_1\, \tau_1$, als auch $\omega_2\, \tau_2$ schreiben kann; ν bezeichnet die innere Normale.

die gesuchte Funktion φ, falls diese Reihe konvergiert, was jedenfalls eintritt, wenn k einen gewissen endlichen Wert nicht überschreitet.

Betrachten wir nun die Funktionen $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3 \ldots$ etwas genauer: die Funktion φ_1 ist dem Newton'schen Potential der Teilchen m_1 und m_2 proportional; diesem Gliede entspricht eine scheinbare Anziehungskraft der beiden Teilchen von der Grösse

$$12_1) \qquad R_1 = \frac{k}{\varrho^2}(a_0 + D_1),$$

wo ϱ die Entfernung der beiden Teilchen, D_1 eine Grösse vorstellt, die gegen die Konstante a_0 von der Ordnung des Verhältnisses der Dimensionen von $\tau_1\ \tau_2$ gegen die Entfernung der beiden Teilchen klein ist.[1])

Nimmt man nun zur Berechnung der scheinbaren Wechselwirkung noch das zweite Glied φ_2 der Reihe 11) hinzu, so ergiebt die Rechnung, dass zu der Anziehungskraft 12_1) infolge des Gliedes φ_2 eine Abstossungskraft von der Grösse

$$12_2) \qquad R_2 = \frac{k^2}{\varrho^5}(b_0 + D_2)$$

hinzukommt.

Man kann in dieser Weise fortgehend noch weitere Glieder für die Wechselwirkung der beiden Teilchen berechnen, und es wird das dritte Glied mit dem Faktor k^3, das vierte mit dem Faktor k^4 u. s. w. behaftet sein.

Vernachlässigt man bereits k^2, so erhält man nur zwischen m_1 und m_2 die Gravitationswirkung; vernachlässigt man aber erst k^3, so wird bei genügender Annäherung von m_1 und m_2 (wobei jedoch ϱ immer noch gegen die Dimensionen der Teilchen gross bleiben möge) die Abstossungskraft R_2 über die Gravitationswirkung R_1 die Oberhand gewinnen, d. h. es werden sich dann die Teilchen m_1 und m_2 umgekehrt proportional der fünften Potenz von ϱ abstossen. Damit gelangen wir zu dem

[1]) Wir nehmen die Entfernung der beiden Teilchen gegen ihre Dimensionen ausserordentlich gross an.

von Maxwell untersuchten Fall der Wechselwirkung zweier Teilchen m_1 und m_2.[1])

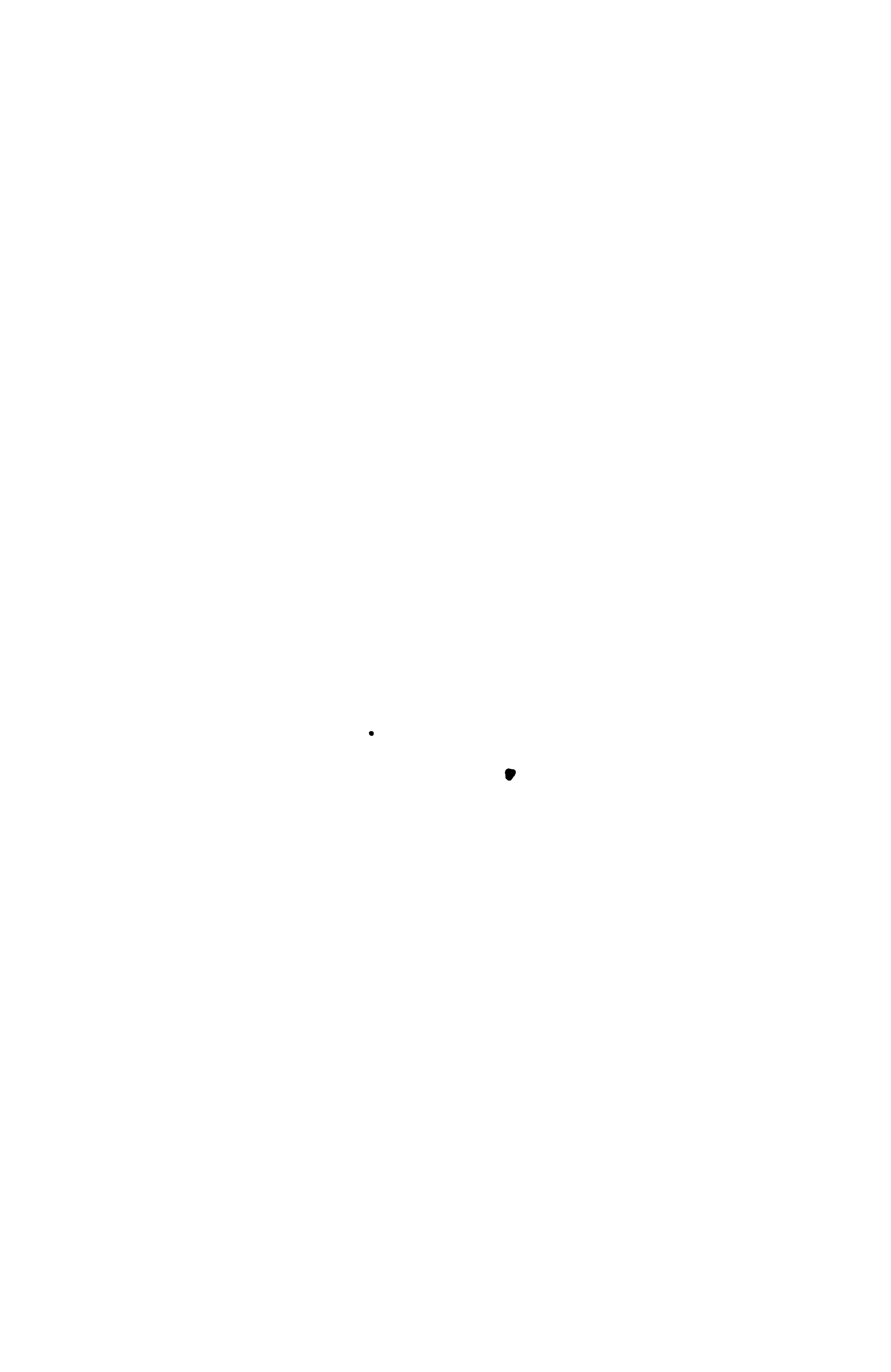
Die Teile m_1 und m_2 können in diesem Falle überhaupt nicht zusammenstossen, sie werden sich vielmehr nach einer bestimmten Annäherung wieder von einander entfernen, und zwar so, als ob sie einen elastischen Stoss auf einander ausgeübt hätten; das Princip der lebendigen Kraft bleibt gewahrt.

Wir gelangen so, ohne über die Art der Kompressibilität der Teilchen m_1 und m_2 mehr zu wissen, als dass ihre Dichtigkeiten nur durch ausserordentlich grosse Druckschwankungen geringe Veränderungen erleiden können, zu einer mechanischen Theorie des elastischen Stosses zwischen m_1 und m_2.

Wir gelangen mit unserem Wechselwirkungsgesetze aber auch zu gleicher Zeit in bekannter Weise zu einer mechanischen Theorie der inneren Reibung in kontinuierlichen Medien, und es dürften die eben auseinandergesetzten Anschauungen auch ein neues Licht auf den Zusammenhang der beiden grossen kinetischen Reibungstheorieen von Maxwell und O. E. Meyer werfen.

---

[1]) Maxwell, Phil. Mag. 35, 1868; Kirchhoff, Wärmetheorie, p. 156; Boltzmann, Gastheorie, 1. T., p. 153.



Bilinearformen und Differentialsysteme.

Von **E. von Weber.**

(Eingelaufen 8. Juli.)

Die algebraischen Thatsachen, die den bisher entwickelten allgemeinen Integrationstheorien partieller Differentialprobleme zu Grunde liegen, fliessen fast ausnahmslos aus derselben Quelle: es ist dies die Theorie der Schaaren von Bilinearformen. Der hiermit berührte Zusammenhang soll in der vorliegenden Note für den Fall der Differentialsysteme mit zwei unabhängigen Veränderlichen des näheren dargelegt werden.

§ I. Passive Differentialsysteme.

1. In diesem § werden die für das Folgende nötigen Sätze aus der Theorie der Differentialsysteme beliebiger Ordnung zusammengestellt.[1])

Es seien x, y unabhängige Veränderliche, $z_1\, z_2 \ldots z_n$ unbekannte Funktionen dieser Variabeln, und es werde gesetzt:

$$z^i_{\alpha\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} z_i}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}; \quad z^i_{00} = z_i \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$$

Unter einem Differentialsystem versteht man dann ein beliebiges Gleichungensystem in $x\, y\, z_1 \ldots z_n$ und einer endlichen Zahl der Ableitungen $z^i_{\alpha\beta}$; die Ordnung des Differentialsystems ist die Ordnung der höchsten darin auftretenden Ableitungen.

---

[1]) Vgl. C. Méray und C. Riquier, Ec. Norm. 1890, p. 23; Riquier Ec. Norm. 1893, p. 65, 123, 167; Sav. Étr. 32; C. Bourlet, Ec. Norm. 1891 Supplém.; A. Tresse Acta Math. 18 p. 1 (1894).

2. Wir wollen die z_i und ihre Ableitungen bis zur μ^{ten} Ordnung einschliesslich folgendermassen in eine Reihe schreiben:

$$(1) \quad z^1_{\mu 0},\ z^1_{\mu-1,1} \dots z^1_{0\mu},\ z^2_{\mu 0} \dots z^2_{0\mu} \dots z^n_{\mu 0} \dots z^n_{0\mu},\ z^1_{\mu-1,0} \dots$$
$$\dots z^n_{0,\mu-1} \dots\dots z^1_{10},\ z^1_{01},\ z^2_{10} \dots z^n_{01},\ z^1_{00} \dots z^n_{00}.$$

In dieser Reihe, die sich nach links hin auf Grund desselben Anordnungsprincips unbegrenzt fortsetzen lässt, steht demnach die Ableitung

$$z^k_{\gamma\delta} \text{ rechts von } z^i_{\alpha\beta},$$

wenn entweder

$$1)\ \gamma + \delta < \alpha + \beta;$$

oder

$$2)\ \gamma + \delta = \alpha + \beta;\ k > i;$$

oder

$$3)\ \gamma + \delta = \alpha + \beta;\ k = i;\ \gamma < \alpha.$$

Eine Relation

$$(2) \qquad z^i_{\alpha\beta} = \varphi\,(x\,y\,z_1 \dots z_n \dots z^k_{\gamma\delta} \dots)$$

heisst **canonisch**, wenn alle in der Funktion φ vorkommenden Grössen z_i, $z^k_{\gamma\delta}$ in der Reihe (1) rechts von $z^i_{\alpha\beta}$ stehen.

Ein Differentialsystem S heisst **canonisch**[1]), wenn 1) jede einzelne Gleichung von S canonisch ist; 2) keine der Grössen $z^i_{\alpha\beta}$, die auf den linken Seiten von S auftritt, in einer der rechten Seiten von S vorkommt.

3. Ist die Gleichung

$$z^k_{\gamma\delta} = \psi\,(x\,y, \dots z_i \dots z^j_{\iota\varsigma} \dots)$$

canonisch, und substituiert man für $z^k_{\gamma\delta}$ die Funktion ψ in die rechte Seite der canonischen Gleichung (2), so erhält man wieder eine canonische Gleichung. Daraus folgt sofort, dass jedes beliebige Differentialsystem durch geeignete Auflösung auf die canonische Form gebracht werden kann.

4. Ist f eine Funktion der Grössen

$$(3) \qquad x,\ y,\ z^i_{\alpha\beta} \quad (\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2 \dots)$$

[1]) Tresse a. a. O.

so verstehen wir unter $D_x f$, $D_y f$ die folgenden Ausdrücke:

$$D_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i} z^i_{10} + \Sigma\Sigma\Sigma \frac{\partial f}{\partial z^i_{\alpha\beta}} z^i_{\alpha+1,\beta}$$

$$D_y f \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i} z^i_{01} + \Sigma\Sigma\Sigma \frac{\partial f}{\partial z^i_{\alpha\beta}} z^i_{\alpha,\beta+1}.$$

Die Operationen D_x, D_y bezeichnen wir als **Derivationen** nach x bezw. y, die Gleichungen

$$D_x f = 0, \quad D_y f = 0$$

als die ersten Derivirten der Gleichung $f = 0$, ferner die Gleichungen

$$D_x(D_x f) = 0, \; D_x(D_y f) = D_y(D_x f) = 0, \; D_y(D_y f) = 0$$

als die zweiten Derivirten etc.

Genügen 4 Zahlen ϱ, ϱ', σ, σ' den Bedingungen

$$\varrho' \leq \varrho, \quad \sigma' < \sigma$$

und steht die Ableitung $z^k_{\gamma\delta}$ in der Reihe (1) rechts von $z^i_{\alpha\beta}$, so steht auch die Ableitung

$$z^k_{\gamma+\varrho',\,\delta+\sigma'} \text{ rechts von } z^i_{\alpha+\varrho,\,\beta+\sigma};$$

daraus folgt sofort, dass die unbegrenzt vielen Derivirten einer canonischen Gleichung wieder canonisch sind.

5. Tritt die Ableitung $z^i_{\alpha\beta}$ in einer der Gleichungen des canonischen Differentialsystems S auf der linken Seite auf, so bezeichnen wir sie selbst und alle Ableitungen der Form

$$z^i_{\alpha+s,\,\beta+t} \quad (s, t = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.})$$

als **principale** Grössen des Systems S, alle übrigen Variabeln (3) als **parametrische** Grössen von S. Die Anzahl der principalen Grössen ist also stets unbegrenzt, aber nicht notwendig die der parametrischen.

Enthält S zwei principale Grössen mit demselben obern Index:

(4) $$z^i_{\alpha\beta}, \quad z^i_{\alpha'\beta'},$$

und ist α'' die grössere der Zahlen α, α', ferner β'' die grössere der Zahlen β, β', so heisst die (gleichfalls principale) Ableitung $z^{i}_{\alpha''\beta''}$ eine **cardinale** Ableitung des canonischen Systems S.

6. Es sei μ die Ordnung des canonischen Systems S; dann ist μ auch die Ordnung der höchsten principalen Ableitungen, die in den Gleichungen S vorkommen. Ist dann ν eine Zahl $\geqq \mu$, so denken wir uns jede Gleichung in S nach x und y wiederholt derivirt, und zwar so lange, bis die derivirten Gleichungen die Ordnung ν erreichen. Indem wir alle so erhaltenen Gleichungen dem System S hinzufügen, erhalten wir ein Differentialsystem S_ν.

Dieses System ist nun zwar im Allgemeinen nicht canonisch; aber es besteht nach Nr. 4 aus lauter canonischen Gleichungen, und da die Anzahl der Grössen $z^{k}_{\gamma\delta}$, die in der Reihe (1) rechts von einer bestimmten Ableitung $z^{i}_{\alpha\beta}$ stehen, begrenzt ist, so schliesst man nach Nr. 3 leicht, dass mittels des Systems S_ν jede principale Ableitung bis zur ν^{ten} Ordnung einschliesslich vermöge einfacher Substitutionen durch die parametrischen Grössen allein dargestellt werden kann.

Enthält aber S zwei principale Ableitungen (4) mit demselben obern Index und wählt man

$$\nu \geqq \alpha'' + \beta'',$$

wobei $z^{i}_{\alpha''\beta''}$ die zugehörige cardinale Ableitung bedeutet, so tritt die letztere auf den linken Seiten mindestens zweier verschiedener Gleichungen des Systems S_ν auf, lässt sich also mit Hülfe von S_ν auf mindestens zwei verschiedene Arten durch die parametrischen Grössen allein darstellen. Diese beiden Darstellungen sind natürlich im allgemeinen verschieden, und ihre Vergleichung führt dann zu einer R e l a t i o n z w i s c h e n d e n p a r a m e t r i s c h e n G r ö s s e n a l l e i n.

7. Ein canonisches System S heisst **passiv**, wenn sich mittels der Gleichungen S und ihrer Derivirten jede principale Ableitung auf n u r e i n e Art durch die parametrischen Grössen allein darstellen lässt, wenn also aus dem System S_ν, wie gross

auch der Index ν gewählt sein mag, keine Relation zwischen den parametrischen Grössen hervorgeht.

Ist ω die Ordnung der höchsten cardinalen Ableitung von S und ergeben sich aus S_ω (bezw. aus S_μ im Falle $\omega \leqq \mu$) keine Relationen zwischen den parametrischen Grössen, so gilt dasselbe a fortiori für alle Systeme S_ν ($\nu > \omega$). Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Passivität des canonischen Systems S der Ordnung μ finden also ihren Ausdruck in einem gewissen System partieller Differentialgleichungen, in dem die Variabeln $x, y, z_1 \ldots z_n$ und die parametrischen Ableitungen bis zur μ^{ten} Ordnung einschliesslich als Independente figuriren, und dem die rechten Seiten der Gleichungen S identisch zu genügen haben.

8. Das canonische System S sei von der Ordnung μ und nicht passiv. Bildet man dann das Differentialsystem $S_{\mu+1}$, bringt dasselbe auf die canonische Form und verfährt mit letzterer wie mit S etc., so gelangt man nach einer endlichen Zahl von Schritten[1]) entweder zu Widersprüchen, eventuell zu Relationen in $x\, y$ allein, und das vorgelegte System S besitzt dann kein Integral, oder zu einem passiven System, auf dessen Integration die von S hinauskommt.

Die Aufsuchung der etwaigen Integrale eines beliebigen Differentialsystems kommt also stets auf die Integration eines canonischen, passiven Systems hinaus.

9. Es sei S ein canonisches, passives System der Ordnung μ; ferner sollen die Grössen

$$(5) \qquad x_0\, y_0 \ldots \bar{z}_i \ldots \bar{z}^k_{\gamma\delta} \ldots$$

constante Anfangswerte der parametrischen Grössen von S bedeuten und folgenden Bedingungen genügen:

1) Die rechten Seiten von S sind in der Umgebung der Stelle $x_0\, y_0\, \bar{z}_i\, \bar{z}^k_{\gamma\delta}$ regulär.

2) Falls die Zahl der parametrischen Grössen, also auch die der Constanten (5) unbegrenzt ist, so sollen die Potenzreihen

[1]) Riquier, Éc. Norm. 1893; Tresse a. a. O.

$$\sum_\gamma \sum_\delta \frac{\bar{z}^k_{\gamma\delta}}{\gamma!\,\delta!} (x - x_0)^\gamma (y - y_0)^\delta \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

in denen die Summe über alle parametrischen Grössen mit dem obern Index k zu erstrecken ist, einen gemeinsamen Konvergenzbezirk besitzen.

Unter diesen Annahmen gibt es ein und nur ein System von Funktionen $z_1 \ldots z_n$, die sich an der Stelle $x_0\, y_0$ regulär verhalten, dem System S identisch genügen, und die Eigenschaft besitzen, dass die parametrischen $z^k_{\gamma\delta}$ an der Stelle $x_0\, y_0$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $\bar{z}^k_{\gamma\delta}$ annehmen.

10. Im Folgenden werden ausschliesslich passive Systeme erster Ordnung betrachtet. Die canonische Form eines solchen Systems besteht aus Gleichungen der Form

$$(\mathrm{K}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z_a}{\partial x} = \varphi_a\left(x, y, z_1 \ldots z_n, \dfrac{\partial z_a}{\partial y}, \dfrac{\partial z_b}{\partial x}, \dfrac{\partial z_b}{\partial y}, \dfrac{\partial z_{b'}}{\partial x}, \dfrac{\partial z_{b'}}{\partial y}, \ldots\right) \\ \dfrac{\partial z_c}{\partial y} = \psi_c\left(x, y, z_1, \ldots z_n, \dfrac{\partial z_d}{\partial x}, \dfrac{\partial z_d}{\partial y}, \dfrac{\partial z_{d'}}{\partial x}, \dfrac{\partial z_{d'}}{\partial y}, \ldots\right) \end{cases}$$

$$(b, b' \ldots > a;\ d, d' \ldots > c).$$

Bezeichnet man mit $z_e, z_{e'}, z_{e''} \ldots$ diejenigen unter den z_i, deren erste Ableitungen beide auf den rechten Seiten von (K) vorkommen, so sind die cardinalen Ableitungen des Systems (K) die folgenden:

$$\frac{\partial^2 z_e}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z_{e'}}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z_{e''}}{\partial x\, \partial y}, \ldots,$$

und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Passivität von (K) bestehen dann nach Nr. 7 darin, dass sich jede der genannten Ableitungen mit Hülfe der ersten Derivirten von (K) auf eine und nur eine Weise durch $x, y, z_1 \ldots z_n$ und die ersten und zweiten parametrischen Ableitungen ausdrücken lässt.

§ II. Zur Theorie der Schaaren von Bilinearformen.

11. Es seien $x_1\, x_2 \dots x_m$, bezw. $y_1\, y_2 \dots y_n$ zwei Variabelngruppen, u und v willkürliche Parameter, endlich P_{ik}, Q_{ik} Constante. Dann wird das volle Invariantensystem, das die Schaar von Bilinearformen

$$W \equiv u \sum_1^m {}_i \sum_1^n {}_k P_{ik}\, x_i\, y_k + v \sum_1^m {}_i \sum_1^n {}_k Q_{ik}\, x_i\, y_k$$

gegenüber beliebigen linearen homogenen Transformationen der beiden Variabelngruppen x und y besitzt, nach Kronecker[1]) folgendermassen gebildet:

Der Rang der Matrix

$$\text{(A)} \qquad \left\| \begin{array}{llll} u\,P_{11} + v\,Q_{11}, & u\,P_{12} + v\,Q_{12} \dots & u\,P_{1n} + v\,Q_{1n} \\ u\,P_{21} + v\,Q_{21}, & u\,P_{22} + v\,Q_{22}, \dots & u\,P_{2n} + v\,Q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ u\,P_{m1} + v\,Q_{m1}, & u\,P_{m2} + v\,Q_{m2} \dots & u\,P_{mn} + v\,Q_{mn} \end{array} \right\|$$

sei gleich τ, d. h. es mögen in diesem Schema alle $\tau + 1$-reihigen, nicht aber alle τ-reihigen Determinanten für beliebige u, v verschwinden. Dann gibt es $m - \tau$ Systeme von je m ganzrationalen homogenen Funktionen der Variabeln $u\; v$ mit constanten Coefficienten:

$$(6) \qquad a_{1s}\; a_{2s} \dots a_{ms} \quad (s = 1, 2, \dots m - \tau)$$

derart, dass die Identitäten

$$a_{1s} \frac{\partial W}{\partial x_1} + a_{2s} \frac{\partial W}{\partial x_2} + \dots + a_{ms} \frac{\partial W}{\partial x_m} = 0$$

für jedes beliebige Wertsystem u, v, $y_1 \dots y_n$ befriedigt sind und dass in der Matrix, die aus den $m - \tau$ Zeilen (6) besteht, nicht alle $m - \tau$-reihigen Determinanten für beliebige $u\; v$ verschwinden. Dann ist jedes andere Formensystem $a_1 \dots a_m$, das die Identität

[1]) Sitzungsber. der Berl. Ak. 1890, p. 1225.

$$(7) \qquad a_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + \ldots + a_m \frac{\partial W}{\partial x_m} = 0$$

erfüllt, eine lineare Combination der Systeme (6), mit Co-
cienten, die in den u v rational sind. Wir denken uns
$m - r$ Formensysteme (6) so ausgewählt, dass ihre Grad-
u, v möglichst klein sind, und es sei M_s der Grad des
dieser Formensysteme.

Ebenso bezeichnen wir mit

$$b_{1s}\; b_{2s} \ldots b_{ns} \quad (s = 1, 2 \ldots n - r)$$

$n - r$ Formensysteme, in deren Matrix nicht alle $n - r$-reih
Determinanten für beliebige u, v verschwinden, und die
Identität

$$b_1 \frac{\partial W}{\partial y_1} + b_2 \frac{\partial W}{\partial y_2} + \ldots + b_n \frac{\partial W}{\partial y_n} \quad 0$$

für beliebige Werte u, v, $x_1 \ldots x_n$ genügen. Diese Form-
systeme seien so ausgewählt, dass ihre Gradzahlen $N_1, N_2, \ldots$
möglichst klein werden.

Wir dürfen ohne die Allgemeinheit zu beschränken
nehmen, dass die r-reihigen Determinanten der Matrix A
$v = 0$ nicht alle verschwinden. Es sei dann

$$(w - w_1)^{\lambda_{11}} (w - w_2)^{\lambda_{12}} \ldots (w - w_x)^{\lambda_{1x}},$$

von einem constanten Faktor abgesehen, der grösste gem-
schaftliche Divisor aller r-reihigen Determinanten der M

$$(A') \qquad Q_{ik} - w P_{ik} \qquad (i = 1 \ldots m;\; k = 1 \ldots n)$$

wobei die Constanten $w_1, w_2, \ldots w_x$ alle verschieden sind.

Allgemein sei

$$(w - w_1)^{\lambda_{i1}} (w - w_2)^{\lambda_{i2}} \ldots (w - w_x)^{\lambda_{ix}}$$

der grösste gemeinsame Divisor aller $r - i + 1$-reihigen D-
minanten obiger Matrix. Setzt man dann:

$\lambda_{1h} - \lambda_{2h} = e_{1h}$; $\lambda_{2h} - \lambda_{3h} = e_{2h}$; .. $\lambda_{r-1,h} - \lambda_{rh} = e_{r-1,h}$; $\lambda_{rh} =$

so bilden die Zahlen

$$M_1,\ M_2,\ \ldots\ M_{m-\tau},\ N_1,\ N_2,\ \ldots\ N_{n-\tau};$$
$$w_1,\ w_2,\ \ldots\ w_\varkappa;\ e_{\alpha\beta}\ (\alpha = 1, 2, \ldots \tau;\ \beta = 1, 2, \ldots \varkappa)$$

das vollständige Invariantensystem der Schaar W, und man hat

$$\tau = \Sigma\, \Sigma\, e_{\alpha\beta} + \Sigma\, M_i + \Sigma\, N_k. \tag{8}$$

12. Für das Folgende ist eine genauere Bestimmung der Zahlen M_i nötig. Es sei allgemein μ_h die Anzahl derjenigen der Zahlen M_i, die gleich h sind; ebenso seien ν_h von den Zahlen N_k gleich h. Da die Zahlen M_i, N_k offenbar nicht grösser als τ sein können, so hat man

$$\mu_{\tau+1} = \nu_{\tau+1} = \mu_{\tau+2} = \nu_{\tau+2} = \ldots = 0.$$

Ferner gelten die Beziehungen:

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_\tau = m - \tau;\quad \nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_\tau = n - \tau. \tag{9}$$

Die beiden Matrices

$$\begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ P_{m1} & P_{m2} & \ldots & P_{mn} \end{Vmatrix};\quad \begin{Vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \ldots & Q_{1n} \\ & & & \\ Q_{m1} & Q_{m2} & \ldots & Q_{mn} \end{Vmatrix}$$

mögen mit P bezw. Q bezeichnet werden, ferner mit B_1 die Matrix

$$\begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n} & Q_{11} & Q_{12} & \ldots & Q_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ P_{m1} & P_{m2} & \ldots & P_{mn} & Q_{m1} & Q_{m2} & \ldots & Q_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{B_1}$$

Allgemein bezeichne B_h die aus $(h+1)\,n$ Colonnen und aus $h\,m$ Zeilen bestehende Matrix, die dadurch gebildet wird, dass man das Schema B_1 h-mal in staffelförmiger Anordnung hinschreibt, also in leicht verständlicher, abgekürzter Schreibweise folgende Form hat:

$$\begin{Vmatrix} P & Q & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & P & Q & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & P & Q \end{Vmatrix}; \tag{B_h}$$

endlich sei ϱ_h der Rang der Matrix B_h.

Werden dann diejenigen unter den Formensystemen (6), deren Grad h ist, mit

$$(10) \qquad a_{1s}^{(h)},\ a_{2s}^{(h)} \,..\, a_{ms}^{(h)} \quad (s = 1, 2, .. \mu_h)$$

bezeichnet, so bestehen folgende Sätze:

1) Genügt ein System $a_1 \,..\, a_m$ von ganzrationalen homogenen Functionen h^{ten} Grads der Variabeln $u\ v$ der Identität (7), so ist es eine lineare Combination der den obern Indices $0, 1, .. h-1, h$ entsprechenden Formensysteme (10), und zwar sind die Coefficienten dieser Linearcombination **ganze** rationale homogene Funktionen in u, v.

2) Es gilt die Gleichung:

$$\mu_h = (h+1)\, m - \varrho_{h+1} - 2\, \mu_{h-1} - 3\, \mu_{h-2} \ldots - (h+1)\, \mu_0.$$

Beide Behauptungen sind für $h = 0$ evident; wir wollen annehmen, dass sie für $h = 0, 1, .. l-1$ bewiesen seien, und zeigen, dass sie unter dieser Annahme auch für $h = l$ zutreffen.

13. Zu diesem Zwecke sestzen wir

$$a_i = a_i^{(0)} u^l + a_i^{(1)} u^{l-1} v + \,..\, + a_i^{(l-1)} u\, v^{l-1} + a_i^{(l)} v^l$$

worin die $a_i^{(k)}$ Constante bedeuten, und drücken aus, dass die linke Seite von (7) für beliebige u, v, $y_1 \,..\, y_n$ verschwindet.

Dadurch erhalten wir:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^m{}_i\, a_i^{(0)} P_{ik} = 0 \\ &\sum_1^m{}_i\, (a_i^{(0)} Q_{ik} + a_i^{(1)} P_{ik}) = 0 \\ &\sum_1^m{}_i\, (a_i^{(1)} Q_{ik} + a_i^{(2)} P_{ik}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n) \\ &\qquad \vdots \\ &\sum_1^m{}_i\, (a_i^{(l-1)} Q_{ik} + a_i^{(l)} P_{ik}) = 0 \\ &\qquad\qquad \sum_1^m{}_i\, a_i^{(l)} Q_{ik} = 0 \end{aligned} \right.$$

Es ist dies ein lineares homogenes Gleichungssystem mit den $(l+1)m$ Unbekannten

(12) $$a_1^{(0)}\ a_1^{(1)} \ldots a_1^{(l)},\ a_2^{(0)} \ldots a_2^{(l)} \ldots a_m^{(0)} \ldots a_m^{(l)},$$

und die Matrix dieses Gleichungssystemes ist B_{l+1}; also besitzen die Gleichungen (11) genau

$$q = (l+1)\,m - \varrho_{l+1}$$

linear unabhängige Lösungensysteme:

$$a_{1s}^{(0)} \ldots a_{1s}^{(l)}\ a_{2s}^{(0)} \ldots a_{2s}^{(l)} \ldots a_{ms}^{(0)} \ldots a_{ms}^{(l)}\ (s = 1, 2, \ldots q).$$

Wir multiplizieren nun das Formensystem (10) der Reihe nach mit den Produkten

$$u^{l-h};\ u^{l-h-1}\cdot v;\ \ldots u\cdot v^{l-h-1};\ v^{l-h}.$$

Indem wir diese Produkte für $h = 0, 1 \ldots l-1$ bilden, erhalten wir Formensysteme l^{ten} Grades, die alle der Identität (7) genügen, und deren Anzahl gleich:

(13) $$(l+1)\,\mu_0 + l\,\mu_1 + (l-1)\,\mu_2 + \ldots + 2\,\mu_{l-1}$$

ist. Diesen Formensystemen entsprechen ebensoviele Wertsysteme (12), die den Gleichungen (11) genügen, und diese Lösungensysteme, deren Inbegriff wir der bequemeren Ausdrucksweise halber mit L bezeichnen wollen, sind linear unabhängig. Andernfalls wäre nämlich eines der obigen Formensysteme l^{ten} Grads mittels constanter Coefficienten aus den übrigen linear zusammensetzbar; also wäre eines der Formensysteme

(14) $$a_{1s}^{(h)}\ a_{2s}^{(h)} \ldots a_{ms}^{(h)}$$
$$(s = 1, 2, \ldots \mu_h;\ h = 0, 1, \ldots l-1)$$

eine lineare Combination der andern, was der Definition dieser Formensysteme widerspricht.

Ausser den Lösungensystemen L, deren Anzahl durch (13) gegeben ist, besitzen nun die Gleichungen (11) noch ω weitere Auflösungen:

$$a_{1s}^{(0)} \ldots a_{1s}^{(l)},\ a_{2s}^{(0)} \ldots a_{2s}^{(l)} \ldots\ldots a_{ms}^{(0)} \ldots a_{ms}^{(l)}\ (s = 1, 2, \ldots \omega)$$

die mit den Systemen L zusammen q linear unabhängige Lösungensysteme darstellen: dabei ist gesetzt:

$$\omega = (l+1)m - \varrho_{l+1} - 2\mu_{l-1} - 3\mu_{l-2} - \ldots - (l+1)\mu_0.$$

Bilden wir jetzt die nachstehenden Formen l^{ten} Grads:

$$a_{is}^{(l)} = a_{is}^{(l)} u^l + a_{is}^{(1)} u^{l-1} v + \ldots + a_{is}^{(l)} v^l \quad (s = 1 \ldots \omega)$$

so verschwinden in der Matrix, die aus den ω Zeilen

(15) $$a_{1s}^{(l)}\; a_{2s}^{(l)} \ldots a_{ms}^{(l)} \quad (s = 1, 2 \ldots \omega)$$

und aus den $\mu_0 + \ldots + \mu_{l-1}$ Zeilen (14) besteht, nicht alle Determinanten der Ordnung

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{l-1} + \omega$$

für beliebige u, v. Andernfalls verschwänden nämlich diese Determinanten insbesondere auch für $u = 1$, $v = 0$. Dann gäbe es offenbar ein Constantensystem $\lambda_s^{(h)}$ von der Beschaffenheit, dass nicht alle Constanten $\lambda_1^{(l)}\; \lambda_2^{(l)} \ldots \lambda_\omega^{(l)}$ verschwänden, und dass die m Formen l^{ten} Grads:

$$\sum_1^{\omega}{}_s\, \lambda_s^{(l)} a_{is}^{(l)} + \sum_0^{l-1}{}_h \sum_1^{\mu_h}{}_s\, \lambda_s^{(h)} a_{is}^{(h)} u^{l-h} \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

durch v teilbar, also in der Form $v B_i$ darstellbar wären; die B_i wären dann Formen $l - 1^{\text{ten}}$ Grads in $u\, v$, die der Identität

$$B_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + \ldots + B_m \frac{\partial W}{\partial x_m} = 0$$

genügen. Da nun die Behauptung 1) des vor. Art. für den Fall $h = l - 1$ bereits bewiesen sein sollte, so wäre das Formensystem $B_1 \ldots B_m$ als lineare Combination mit ganz rationalen, in $u\, v$ homogenen Coefficienten aus dem Formensystem (14) zusammensetzbar; also wäre eines der ω Grössensysteme (15) in derselben Weise durch die übrigen Systeme (15) und die Systeme (14) darstellbar, was der Definition der Systeme (15) widerspricht.

Aus dieser Definition folgt ferner, dass jedes Formensystem $a_1 \ldots a_m$ vom Grade l in den $u\, v$, das die Identität (7) befriedigt, sich als lineare Combination mit ganz rationalen Coefficienten

in $u\,v$ aus den Formensystemen (14) (15) zusammensetzen lässt; also hat man $\omega = \mu_l$, und die beiden Behauptungen der Nr. 12 sind sonach auch für den Fall $h = l$ als richtig erkannt.

Man hat infolgedessen die Recursionsformeln

$$(16)\quad \begin{cases} \mu_0 \;\;= m - \varrho_1; \\ \mu_1 \;\;= 2m - \varrho_2 - 2\mu_0; \\ \mu_2 \;\;= 3m - \varrho_3 - 2\mu_1 - 3\mu_0; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu_\tau \;\;= (\tau+1)m - \varrho_{\tau+1} - 2\mu_{\tau-1} - 3\mu_{\tau-2} - \cdots - (\tau+1)\mu_0 \\ \mu_{\tau+1} = 0,\; \mu_{\tau+2} = 0 \ldots \end{cases}$$

und es lassen sich mittels dieser Formeln die ϱ_i durch die μ_i ausdrücken, und umgekehrt.

Genau ebenso erhält man natürlich auch die Gleichungen:

$$\nu_h = (h+1)\,m - \sigma_{h+1} - 2\,\nu_{h-1} - 3\,\nu_{h-2} - \ldots - (h+1)\,\nu_0$$
$$(h = 0, 1, \ldots \tau),$$

wenn σ_h den Rang der aus $(h+1)\,m$ Colonnen und $h\,n$ Zeilen bestehenden Matrix bedeutet, die aus dem Schema

$$(C_1)\qquad \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{m1} & Q_{11} & Q_{21} & \ldots & Q_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{mn} & Q_{1n} & Q_{2n} & \ldots & Q_{mn} \end{Vmatrix}$$

genau ebenso gebildet wird, wie die Matrix B_h aus B_1.

§ III. Involutionssysteme erster Ordnung.

14. Es werde unter J ein beliebiges Differentialsystem erster Ordnung

$$(J)\qquad f_i\,(x, y, z_1, \ldots z_n, p_1 \ldots p_n, q_1 \ldots q_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

mit n unbekannten Funktionen $z_1 \ldots z_n$ verstanden; dabei ist gesetzt:

$$p_i = \frac{\partial z_i}{\partial x}; \quad q_i = \frac{\partial z_i}{\partial y}.$$

Wir dürfen, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dass die Gleichungen J hinsichtlich der $2n$ Variabeln $p_i\, q_i$ unabhängig sind, also nach m derselben aufgelöst werden können; dann ist $m \leq 2n$ und die Matrix B_1 des vorigen §, in der

$$P_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial p_k}; \quad Q_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \tag{17}$$

gesetzt wird, besitzt vermöge des gegebenen Gleichungssystems J den Rang

$$\varrho_1 = m,$$

d. h. es verschwinden vermöge J nicht alle m reihigen Determinanten.

Wir nehmen jetzt an, dass die canonische Form des Systems J passiv sei, und wollen untersuchen, welche Bedingungen sich hieraus für die unaufgelöste Form des Systems J ableiten lassen.

15. Die Matrix A des vorigen §, in der die $P_{ik}\, Q_{ik}$ wieder durch (17) definiert seien, besitze den Rang τ, d. h. also es mögen in A alle $\tau + 1$-reihigen, aber nicht alle τ-reihigen Determinanten für beliebige u, v vermöge der Gleichungen J verschwinden; wir bezeichnen A als die charakteristische Matrix des Differentialsystems J. Ferner möge die canonische Auflösung K dieses Differentialsystems aus Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} p_a &= \varphi_a (x, y, z_1 \ldots z_n, q_a, p_b, q_b, p_{b'}, q_{b'}, \ldots) \\ q_c &= \psi_c (x, y, z_1 \ldots z_n, p_d, q_d, p_{d'}, q_{d'} \ldots) \\ &(b, b' \ldots > a;\ d, d' \ldots > c) \end{aligned} \tag{K}$$

bestehen, und es sei σ die Anzahl derjenigen unter den Zahlen c, die auch unter den Zahlen a vorkommen, m. a. W.: Die Anzahl der Unbekannten z_a, deren erste Ableitungen p_a, q_a alle beide auf den linken Seiten des canonischen Systems K auftreten.

Indem wir jede der Gleichungen K je einmal nach x und y deriviren, und die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}$$

bezw. mit r_i, s_i, t_i bezeichnen, erhalten wir $2m$ Gleichungen K' der zweiten Ordnung, und unter ihnen befinden sich σ Paare der Eigenschaft, dass die linken Seiten der beiden Relationen eines Paares die gleiche Ableitung s_a enthalten. Eliminirt man aus den rechten Seiten eines solchen Gleichungenpaars die etwaigen principalen Ableitungen 2. O. mit Hülfe der übrigen Gleichungen K', so müssen, falls K passiv sein soll, die genannten rechten Seiten identisch verschwinden, m. a. W.: Betrachtet man K' als ein System linearer Gleichungen in den $3n$ Unbekannten r_i s_i t_i, so reduciren sie sich vermöge K auf genau $2m - \sigma$ linear unabhängige Gleichungen (vgl. Nr. 10).

Da nun K die Auflösung von J ist, so gilt die letztere Thatsache auch von dem linearen Gleichungensystem, das aus J durch je einmalige Derivation nach x und y entsteht:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & M_i + \sum_1^n{}^k P_{ik} r_k + \sum_1^n{}^k Q_{ik} s_k = 0 \\ & N_i + \sum_1^n{}^k P_{ik} s_k + \sum_1^n{}^k Q_{ik} t_k = 0 \end{aligned} \right. \qquad (i = 1 \,.\,.\, m)$$

$$\left(M_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum \frac{\partial f_i}{\partial z_k} p_k; \quad N_i = \frac{\partial f_i}{\partial y} + \sum \frac{\partial f_i}{\partial z_k} q_k\right);$$

es muss also der Rang der Matrix:

$$(B) \quad \left\| \begin{matrix} M_1 & P_{11} & .\,. & P_{1n} & Q_{11} & .\,. & Q_{1n} & 0 & .\,. & 0 \\ . & . & & . & . & & . & . & & . \\ M_m & P_{m1} & .\,. & P_{mn} & Q_{m1} & .\,. & Q_{mn} & 0 & .\,. & 0 \\ N_1 & 0 & .\,. & 0 & P_{11} & .\,. & P_{1n} & Q_{11} & .\,. & Q_{1n} \\ . & . & & . & . & & . & . & & . \\ N_m & 0 & .\,. & 0 & P_{m1} & .\,. & P_{mn} & Q_{m1} & .\,. & Q_{mn} \end{matrix} \right\|$$

vermöge der Relationen J gleich $2m - \sigma$ sein, d. h. es müssen in B alle $2m - \sigma + 1$-reihigen, nicht aber alle $2m - \sigma$-reihigen Determinanten vermöge J verschwinden. Offenbar muss jetzt auch die im vorigen § definirte Matrix B_2, die aus

B durch Streichung der ersten Spalte entsteht, vermöge J den Rang $2m - \sigma$ besitzen. Denn wäre dieser Rang kleiner, so ergäbe sich aus den Gleichungen (18) eine von den $r_i\, s_i\, t_i$ freie Relation, die keine Consequenz von J wäre.

Genau ebenso erkennt man allgemein: Betrachtet man die hm Gleichungen h^{ter} Ordnung, die sich durch $h-1$-malige Derivation nach x und y aus dem System K ergeben, als ein System linearer Gleichungen mit den $(h+1)n$ Unbekannten:

$$z^i_{h-a,\,a} \quad (i = 1, \ldots n;\; a = 0, 1 \ldots h),\text{[1]}$$

so müssen sie sich, falls K passiv sein soll, vermöge K und der derivirten Gleichungen bis zur $h-1^{\text{ten}}$ Ordnung einschliesslich, auf genau

$$hm - (h-1)\sigma$$

linear unabhängige Gleichungen reduciren. Letzteres gilt dann offenbar auch von den hm Derivirten h^{ter} Ordnung des Systems J:

$$(19) \qquad M^h_{ia} + \sum_1^n{}^k P_{ik}\, z^k_{h-a,a} + \sum_1^n{}^k Q_{ik}\, z^k_{h-a-1,a+1} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots m;\; a = 0, 1 \ldots h-1),$$

worin die M^h_{ia} gewisse Funktionen von $x, y, z_1 \ldots z_n$ und von den Ableitungen der z_i bis zur $h-1^{\text{ten}}$ Ordnung bedeuten. Die Matrix dieses Gleichungssystems muss also vermöge J und der Derivirten bis zur $h-1^{\text{ten}}$ Ordnung einschliesslich den Rang $hm - (h-1)\sigma$ besitzen. Diese Matrix besteht aus hm Zeilen und $(h+1)n+1$ Spalten, und wird aus der im vorigen § definirten Matrix B_h erhalten, wenn man die hm Elemente

$$M^h_{10} \ldots M^h_{m0},\; M^h_{11} \ldots M^h_{m1} \ldots M^h_{1,h-1} \ldots M^h_{m,h-1}$$

als neue Colonne hinzufügt. Der Rang, den die Matrix vermöge der Gleichungen J besitzt, kann nicht kleiner als $hm - (h-1)\sigma$ sein, da andernfalls aus den Relationen (19) eine Gleichung folgen würde, die die Ableitungen der z_i nur

[1] $z^i_{h-a,a} = \dfrac{\partial^h z_i}{\partial x^{h-a}\, \partial y^a}$.

bis zur $h-1^{ten}$ Ordnung enthielte, und doch keine Folge des Systems J und seiner Derivirten bis zur $h-1^{ten}$ Ordnung wäre, was mit der Passivität von K in Widerspruch stände. Die im vorigen § definirten Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots\ldots$ haben daher bezw. die Werte:

$$m,\ 2m-\sigma,\ 3m-2\sigma,\ 4m-3\sigma\ldots$$

und aus dem Formelsystem (16) der Nr. 13 schliessen wir jetzt:

$$\mu_0 = 0;\ \mu_1 = \sigma;\ \mu_2 = 0,\ \mu_3 = 0,\ldots.\ \mu_\tau = 0.$$

Da aber nach Art. 12 andererseits:

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_\tau = m - \tau,$$

so folgt:

$$\sigma = m - \tau.$$

Als eine notwendige Bedingung für die Passivität der canonischen Auflösung von J haben wir demnach die erhalten, dass die Matrix B vermöge J den Rang

$$2m - \sigma = m + \tau$$

besitze, wenn unter τ der Rang der charakteristischen Matrix verstanden wird.

16. Ein Differentialsystem J, das die eben genannte Bedingung erfüllt, soll fortan ein **Involutionssystem** erster Ordnung heissen. Durch eine Transformation der unabhängigen Variabeln gelingt es nun in allen Fällen, das gegebene Involutionssystem J auf eine besonders einfache Normalform zu reduciren.

Es seien wieder τ und $m+\tau$ die Rangzahlen, die den beiden Matrices A und B vermöge der gegebenen Gleichungen J zukommen. Wir können dann die Gleichungen J und die Unbekannten z_i von vorneherein so numeriren, dass insbesondere die Determinante:

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} u\,P_{11} + v\,Q_{11} & \ldots & u\,P_{1\tau} + v\,Q_{1\tau} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ u\,P_{\tau 1} + v\,Q_{\tau 1} & \ldots & u\,P_{\tau\tau} + v\,Q_{\tau\tau} \end{vmatrix}$$

vermöge J nicht für jedes beliebige Wertsystem u, v Null ist. Es seien α, β und γ, δ zwei Constantensysteme, die dieser Bedingung genügen und deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht Null ist. Führen wir dann mittels der Formeln:

$$(21) \qquad x' = \alpha x + \beta y; \; y' = \gamma x + \delta y$$

die neuen Independenten x', y' ein, und schreiben wir:

$$p_i' = \frac{\partial z_i}{\partial x'}; \quad q_i' = \frac{\partial z_i}{\partial y'}; \quad r_i' = \frac{\partial^2 z_i}{\partial x'^2} \text{ etc.}$$

so hat man:

$$(22) \qquad \begin{aligned} p_i &= \alpha p_i' + \gamma q_i'; \; q_i = \beta p_i' + \delta q_i', \\ r_i &= \alpha^2 r_i' + 2\alpha\gamma s_i' + \gamma^2 t_i' \text{ etc.} \end{aligned}$$

Verwandelt sich vermöge der Transformation (21) (22) die Funktion f_i in:

$$f_i'(x'\, y'\, z_1 \ldots z_n\, p_1' \ldots q_n')$$

so hat man:

$$(23) \qquad P_{ik}' \equiv \frac{\partial f_i'}{\partial p_k'} = \alpha P_{ik} + \beta Q_{ik}; \; Q_{ik}' = \gamma P_{ik} + \delta Q_{ik}.$$

$$M_i = \alpha M_i' + \gamma N_i'; \; N_i = \beta M_i' + \delta N_i' \text{ [1]}).$$

Bezeichnet man ferner mit A_i, B_i die linken Seiten der beiden ersten Derivirten der Gleichung $f_i = 0$, mit $A_i'\, B_i'$ die linken Seiten der ersten Derivirten von

$$(J') \qquad f_i' = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

so folgt leicht:

$$A_i \equiv \alpha A_i' + \gamma B_i'; \; B_i = \beta A_i' + \delta B_i'.$$

Da sich nun unter den $2m$ Gleichungen $A_i = 0$, $B_i = 0$ genau $m + \tau$ linear unabhängige befinden, so gilt dasselbe von den Gleichungen $A_i' = 0$, $B_i' = 0$, d. h. die Matrix B', die der Matrix B analog aus den Elementen $M_i', N_i', P_{ik}', Q_{ik}'$ gebildet wird, besitzt vermöge der Gleichungen J' wieder den Rang $m + \tau$.

---

[1]) $M_i' \equiv \frac{\partial f_i'}{\partial x'} + \Sigma \frac{\partial f_i'}{\partial z_k} p_k'$ etc.

Ebenso erkennt man ohne weiteres, dass der Rang der zu J' gehörigen charakteristischen Matrix ebenfalls τ ist.

Das transformirte System J' ist also ein Involutionssystem und hat überdies die Eigenschaft, dass die beiden Determinanten

$$|P'_{ik}| \quad |Q'_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \ldots \tau)$$

vermöge J' nicht verschwinden. Wir dürfen daher, indem wir die Accente jetzt wieder weglassen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit von vorneherein annehmen, dass die beiden Determinanten

$$(24) \qquad |P_{ik}| \quad |Q_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \ldots \tau)$$

vermöge des gegebenen Differentialsystems J nicht Null sind. Dann verschwinden in der Matrix:

$$(D) \qquad \left\| \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1\tau} & Q_{11} & Q_{12} & \ldots & Q_{1\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{m1} & P_{m2} & \ldots & P_{m\tau} & Q_{m1} & Q_{m2} & \ldots & Q_{m\tau} \end{matrix} \right\|$$

vermöge J nicht alle m-reihigen Determinanten. Um dies zu zeigen, bemerken wir vorab, dass:

$$2\tau \geqq m;\text{[1]} \quad \tau < m.$$

Ist $\tau = m$, so ist unsere Behauptung evident. Ist aber $\tau < m$, und nehmen wir an, dass in dem Schema D alle m-reihigen Determinanten vermöge J Null sind, so verschwinden in der Matrix D', die aus D durch Hinzufügung der Colonne

$$P_{1,\tau+1}, \; P_{2,\tau+1} \ldots P_{m,\tau+1}$$

entsteht, alle diejenigen m-reihigen Determinanten, welche die erste der Determinanten (24) als Unterdeterminante enthalten. In der That ist ja jede Determinante, die mehr als τ Colonnen der Form $P_{1s} \ldots P_{ms}$ enthält, vermöge J Null; der Rang von D' ist also vermöge J nach einem bekannten Determinantensatz

[1] Denn unter der Annahme $\tau < \frac{m}{2}$ verschwinden in der Matrix B_1 des vorigen § alle m-reihigen Determinanten.

$< m$. Aus analogen Gründen gilt nunmehr dasselbe von der Matrix D'', die aus D' durch Hinzufügung einer Colonne

$$Q_{1,\tau+1},\ Q_{2,\tau+1}, \ldots\ Q_{m,\tau+1}$$

hervorgeht etc. Durch Wiederholung dieser Schlussweise gelangt man zu dem Resultat, dass in der Matrix B_1 des vorigen § alle m-reihigen Determinanten vermöge J Null sind, was unsern Annahmen widerspricht.

17. Unter den nichtverschwindenden Determinanten von D befindet sich mindestens eine, welche die τ ersten Colonnen enthält; darnach kann das System J nach $p_1 \ldots p_\tau$ und nach σ von den Variabeln $q_1 \ldots q_\tau$ [1] aufgelöst werden, und wir dürfen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass das System J auf die **Normalform:**

$$(N)\quad \begin{cases} p_1 = \varphi_1(x, y, z_1 \ldots z_n,\ p_{\tau+1} \ldots p_n,\ q_{\sigma+1} \ldots q_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_\tau = \varphi_\tau(x, y, z_1 \ldots z_n,\ p_{\tau+1} \ldots p_n,\ q_{\sigma+1} \ldots q_n) \\ q_1 = \psi_1(x, y, z_1 \ldots z_n,\ q_{\sigma+1} \ldots q_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_\sigma = \psi_\sigma(x, y, z_1 \ldots z_n,\ q_{\sigma+1} \ldots q_n) \end{cases}$$

gebracht werden kann. Wir bemerken ausdrücklich, dass die ψ_i keine der Grössen $p_{\tau+1} \ldots p_n$ enthalten können, da andernfalls die Gleichungen J nach $\tau + 1$ von den Variabeln $p_1 \ldots p_n$ auflösbar wären, was wegen des Verschwindens aller $\tau + 1$-reihigen Determinanten der Matrix P_{ik} nicht der Fall ist.

18. Zwischen den $2m$ Derivirten zweiter Ordnung der Gleichungen N bestehen nun, wenn sie als lineare Gleichungen in den Variabeln $r_i\ s_i\ t_i$ betrachtet werden, genau σ verschiedene lineare Identitäten. Derivirt man nun die ersten τ Gleichungen N nach y und die letzten σ Gleichungen nach x, so erhält man:

$$(25)\quad s_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \sum_1^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_\alpha} q_\alpha + \sum_{\tau+1}^n{}^{\beta} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_\beta} s_\beta + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\beta} t_\beta\right) + \sum_{\sigma+1}^{\tau} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\gamma} t_\gamma;$$

[1] Wegen $2\tau > m$; $\sigma = m - \tau$ ist $\sigma < \tau$.

$$(26)\quad s_k = \frac{\partial \psi_k}{\partial x} + \sum_1^n \frac{\partial \psi_k}{\partial z_\alpha} p_\alpha + \sum_{\tau+1}^n{}^\beta \frac{\partial \psi_k}{\partial q_\beta} s_\beta + \sum_{\sigma+1}^\tau{}^\gamma \frac{\partial \psi_k}{\partial q_\gamma} s_\gamma,$$

$$(i = 1 \,..\, \tau;\; k = 1 \,...\, \sigma)$$

und die vorhin genannten σ linearen Identitäten bestehen offenbar darin, dass die Gleichungen (26) bezw. mit den σ ersten Gleichungen (25) identisch werden, wenn man vorher auf den rechten Seiten von (26) die Grössen $s_{\sigma+1} \,..\, s_\tau$ durch ihre Werte aus den letzten $\tau - \sigma$ Gleichungen (25) ersetzt hat. Man erhält so die nachstehenden Beziehungen:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi_i}{\partial x} + \sum\limits_1^n \dfrac{\partial \psi_i}{\partial z_\alpha} p_\alpha + \sum\limits_{\sigma+1}^\tau{}^\gamma \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q_\gamma}\left(\dfrac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} + \sum\limits_1^n \dfrac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z_\alpha} q_\alpha\right) = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \sum\limits_1^n \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial z_\alpha} q_\alpha \\ \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q_k} + \sum\limits_{\sigma+1}^\tau{}^\gamma \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q_\gamma} \dfrac{\partial \varphi_\gamma}{\partial p_k} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial p_k}; \\ \sum\limits_{\sigma+1}^\tau{}^\gamma \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q_\gamma} \dfrac{\partial \varphi_\gamma}{\partial q_l} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial q_l}; \end{cases}$$

$$(i = 1, 2 \,...\, \sigma;\; k = \tau + 1 \,..\, n;\; l = \sigma + 1 \,..\, n).$$

Diese Beziehungen werden von den Funktionen φ, ψ identisch erfüllt; in den Relationen der ersten Zeile sind die Grössen $p_1 \,..\, p_\tau\; q_1 \,..\, q_\sigma$ durch ihre Werte φ, ψ zu ersetzen.

Umgekehrt, sind diese Bedingungen erfüllt, so ist das Differentialsystem J offenbar ein Involutionssystem, d. h. der Rang der charakteristischen Matrix ist τ, und derjenige der Matrix B ist gleich $m + \tau$.

19. Das Differentialsystem N ist nicht canonisch; es besitzt aber vermöge der Bedingungen (27) die charakteristische Eigenschaft der passiven Systeme. Vermöge des Systems N und seiner Derivirten kann man nämlich alle (principalen) Ableitungen

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} z_i}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}, \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} z_k}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^\beta} \quad (i = 1, \,..\, \sigma;\; k = \sigma + 1 \,..\, \tau;\; \alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots)$$

durch x, y, $z_1 \,..\, z_n$ und die parametrischen Ableitungen:

$$\frac{\partial^\gamma z_k}{\partial y^\gamma}, \quad \frac{\partial^{\gamma+\delta} z_l}{\partial x^\gamma \partial y^\delta} \quad (\gamma, \delta = 0, 1 \ldots; \; k = \sigma + 1 \ldots \tau; \; l = \tau + 1 \ldots n)$$

ausdrücken, und es ergeben sich aus den Derivirten des Systems N keine Relationen zwischen den parametrischen Grössen allein.

Das System N gehört sonach dem von C. Bourlet (a. a. O.) studirten Typus „unbeschränkt integrabler" Differentialsysteme an, und es gilt daher hinsichtlich der Existenz der Integrale von N folgender Satz:

Es seien

$$\omega_{\tau+1}(x, y), \; \omega_{\tau+2}(x, y) \ldots \omega_n(x, y)$$

beliebige, an der Stelle x^0, y^0 reguläre Funktionen der Variabeln x, y, ferner:

$$\chi_{\sigma+1}(y), \; \chi_{\sigma+2}(y) \ldots \chi_\tau(y)$$

beliebige, an der Stelle y^0 reguläre Funktionen von y, und $z_1^0 \ldots z_\sigma^0$ beliebige Constante. Setzt man dann

$$z_\gamma^0 = \omega_\gamma^0; \; p_\gamma^0 = \frac{\partial \omega_\gamma^0}{\partial x^0}; \; q_\gamma^0 = \frac{\partial \omega_\gamma^0}{\partial y^0} \quad (\gamma = \tau + 1 \ldots n);$$

$$z_\beta^0 = \chi_\beta^0; \; q_\beta^0 = \frac{\partial \chi_\beta^0}{\partial y^0} \quad (\beta = \sigma + 1 \ldots \tau),$$

und sind sämtliche Funktionen φ, ψ an der Stelle

$$x^0 \, y^0 \, z_1^0 \ldots z_n^0, \; p_{\tau+1}^0 \ldots p_n^0, \; q_{\sigma+1}^0 \ldots q_n^0$$

regulär, so besitzt das Differentialsystem N ein und nur ein System von Integralfunktionen $z_1 \ldots z_n$ mit folgenden Eigenschaften:

1) alle z_i sind an der Stelle $x^0 \, y^0$ regulär;

2) die $z_{\tau+1} \ldots z_n$ sind mit den willkürlichen Funktionen $\omega_{\tau+1} \ldots \omega_n$ identisch.

3) die Funktionen $z_{\sigma+1} \ldots z_\tau$ reduciren sich vermöge $x = x^0$ auf die Funktionen $\chi_{\sigma+1} \ldots \chi_\tau$ resp.

4) die Funktionen $z_1 \ldots z_\sigma$ nehmen an der Stelle $x^0 \, y^0$ bez. die Werte $z_1^0 \ldots z_\sigma^0$ an.

20. Besonders einfach ist der Fall $\sigma = \tau$. Die Gleichungen (27) lehren dann, dass die Funktionen φ_i die Variabeln q nicht enthalten. Ferner hat man vermöge (27):

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \quad (k = \tau + 1, \ldots n).$$

Darnach sind die φ_i lineare Funktionen von $p_{\tau+1} \ldots p_n$, und die ψ_i lineare Funktionen von $q_{\tau+1} \ldots q_n$, d. h. das System N hat die Gestalt:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i = \pi_i (x\, y\, z_1 \ldots z_n) + \sum_{\tau+1}^{n} a_{ik}\, p_k \\ q_i = \varkappa_i (x\, y\, z_1 \ldots z_n) + \sum_{\tau+1}^{n} a_{ik}\, q_k \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (a_{ik} \text{ Funktionen von} \\ x\, y\, z_1 \ldots z_n;\ i = 1 \ldots \tau) \end{array}$$

und die Relationen (27) lehren, dass die totalen Differentialgleichungen

$$(29) \qquad d z_i = \pi_i\, dx + \varkappa_i\, dy + \sum_{\tau+1}^{n} a_{ik}\, d z_k \quad (i = 1, 2, \ldots \tau)$$

unbeschränkt integrabel sind. Man erhält also das allgemeinste System von Integralfunktionen $z_1 \ldots z_n$ des Differentialsystems (28), indem man $z_{\tau+1} \ldots z_n$ beliebig wählt, und sodann die $z_1 \ldots z_\tau$ aus den allgemeinen Integralgleichungen

$$\Omega_i (x\, y\, z_1 \ldots z_n) = \Omega_i (x^0\, y^0\, z_1^0 \ldots z_n^0) \quad (i = 1, 2, \ldots \tau)$$

des unbeschränkt integrabeln Systems (29) berechnet.

21. Ersetzt man in den Gleichungen N die Grössen $z_{\tau+1} \ldots z_n$ durch irgend welche Funktionen der Variabeln x, y, so bildet das so entstehende Differentialsystem N' mit den τ Unbekannten $z_1 \ldots z_\tau$ wieder ein Involutionssystem.

In der That, die zu N' gehörige charakteristische Matrix entsteht aus A durch Weglassung der letzten τ Colonnen. Ferner erhält man die Matrix B', die zu N' in derselben Beziehung steht wie B zu N, indem man in B die $\tau + 2^{\text{te}}$, $\tau + 3^{\text{te}} \ldots n + 1^{\text{te}}$ Colonne bez. mit $\frac{\partial z_{\tau+1}}{\partial x}, \ldots \frac{\partial z_n}{\partial x}$, ferner die

letzten $n - \tau$ Colonnen von B bezw. mit $\frac{\partial z_{\tau+1}}{\partial y} \cdots \frac{\partial z_n}{\partial y}$ multiplicirt und zu der ersten addirt, schliesslich die soeben erwähnten $2n - 2\tau$ Colonnen fortlässt. Also ist der Rang von B' höchstens gleich $m + \tau$. Er kann aber auch nicht kleiner sein, denn unter den $m + \tau$-reihigen Determinanten von B' befinden sich alle Produkte aus je einer m-reihigen Determinante von D (s. Nr. 16) in eine der beiden Determinanten (24).

§ IV. Die Elementarteiler der charakteristischen Matrix.

22. Nach der Schlussbemerkung des vorigen § können wir uns in der Theorie der Involutionssysteme erster Ordnung auf die Annahme beschränken, dass der Rang der charakteristischen Matrix der Anzahl n der unbekannten Funktionen gleich ist. In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich, allerdings unter specieller Annahme über die Beschaffenheit der Elementarteiler der charakteristischen Matrix, die Theorie dieser Art von Involutionssystemen ausführlich entwickelt. In diesem § soll nun dargelegt werden, welcher Zusammenhang zwischen den sogenannten Charakteristiken des betrachteten Involutionssystems und den Elementarteilern jener Matrix stattfindet, wenn die letzteren keinen beschränkenden Bedingungen unterliegen.

23. Unter der Voraussetzung $\tau = n$ hat man $m \geqq n$; wir können daher setzen

$$m = n + p \quad (p \geq 0).$$

Die Gleichung (18) des § II wird hier:

$$n - p = \Sigma \Sigma e_{\alpha\beta}$$

m. a. W. die n-reihigen Determinanten der charakteristischen Matrix:

(A') $$\| Q_{ik} - w P_{ik} \| \quad (i = 1, \ldots n + p;\ k = 1 \ldots n)$$

besitzen vermöge des gegebenen Involutionssystems

---

[1]) Grundzüge einer Integrationstheorie etc., Journal f. Mathem. Bd. 118, p. 123—157.

(J) $\quad f_i(x, y, z_1 \,.\,. z_n, p_1 \,.\,. q_n) = 0 \quad (i = 1, \,.\,. n + p)$

ein ganzrationales Polynom $n - p^{\text{ten}}$ Grads in w als grössten gemeinschaftlichen Divisor. Dieser Satz, den ich in der citirten Arbeit durch ziemlich weitläufige Determinantenrechnungen bewiesen habe, erweist sich sonach als eine einfache Consequenz der Theorie der Bilinearformen.

Es sei w_ν einer der $\varkappa$ verschiedenen Werte von w, für die alle n-reihigen Determinanten der Matrix A' verschwinden, ferner $e_{1\nu}, e_{2\nu}, \,.\,.$ die Exponenten der zugehörigen Elementarteiler; ϱ_ν derselben (und zwar natürlich die ϱ_ν ersten) seien von Null verschieden. Die Zahl

$$e_{1\nu} + e_{2\nu} + \,.\,. + e_{\varrho_\nu, \nu}$$

bezeichnet dann die Vielfachheit, mit der der Faktor $w - w_\nu$ in allen n-reihigen Determinanten von A' auftritt, und es verschwinden in A' vermöge des gegebenen Gleichungssystems J alle $n - \varrho_\nu + 1$-reihigen, nicht aber alle $n - \varrho_\nu$-reihigen Determinanten für $w = w_\nu$ identisch. Die w_ν sind Funktionen der Variabeln $x\, y\, z_1 \,.\,. z_n$ und von $n - p$ unter den Variabeln $p_i\, q_i$, die vermöge J willkürlich bleiben.

24. Dies vorausgeschickt, fragen wir nun nach den Bedingungen dafür, dass die Relationen:

(30) $\quad dp_i = r_i\, dx + s_i\, dy; \; dq_i = s_i\, dx + t_i\, dy$

zusammen mit den ersten Derivirten des Systems J:

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} A_i &\equiv M_i + \sum_1^n {}^k (P_{ik}\, r_k + Q_{ik}\, s_k) = 0 \\ B_i &\equiv N_i + \sum_1^n {}^k (P_{ik}\, s_k + Q_{ik}\, t_k) = 0 \end{aligned} \right. \qquad (i = 1 \,.\,. n + p)$$

die Grössen r_i, s_i, t_i nicht bestimmen.

Indem wir die $r_i\, s_i$ mittels (30) berechnen und in (31) einsetzen, erhalten wir die Relationen:

$$(32)\quad M_i + \sum_1^n{}_k P_{ik}\left(\frac{d p_k}{d x} - \frac{d q_k}{d x}\frac{d y}{d x}\right) + \sum_1^n{}_k Q_{ik}\frac{d q_k}{d x} - \\ - \frac{d y}{d x}\sum_1^n{}_k t_k\left(Q_{ik} - P_{ik}\frac{d y}{d x}\right) = 0$$

$$(33)\quad N_i + \sum_1^n{}_k P_{ik}\frac{d q_k}{d x} + \sum_1^n{}_k t_k\left(Q_{ik} - P_{ik}\frac{d y}{d x}\right) = 0\,(i = 1 \ldots n + p)$$

Damit diese Gleichungen die Grössen $t_1 \ldots t_n$ unbestimmt lassen, ist zunächst notwendig, dass

$$(34)\qquad d y = \varkappa_\nu\, d x,$$

wo $\varkappa_\nu$ eine der oben definirten $\varkappa$ Funktionen bedeutet.

Substituirt man diesen Wert von $d y$ in (32) (33), multiplicirt man ferner die Gleichung (33) mit $\varkappa_\nu$ und addirt sie zu (32), so entstehen Relationen, die unter Hinzunahme der Gleichungen

$$(35)\qquad d z_i = (p_i + \varkappa_\nu\, q_i)\, d x \qquad (i = 1 \ldots n)$$

folgende Form annehmen:

$$(36)\qquad d f_1 = 0,\ d f_2 = 0 \ldots \qquad d f_{n+p} = 0;$$

das Differentiationssymbol $d f_i$ bezieht sich dabei auf alle $3n + 2$ Variabeln $x, y, \ldots q_n$.

Die n linearen Gleichungen mit den Unbekannten $\mu_1 \ldots \mu_{n+p}$:

$$(37)\quad \mu_1(Q_{1k} - \varkappa_\nu P_{1k}) + \ldots + \mu_{n+p}(Q_{n+p,k} - \varkappa_\nu P_{n+p,k}) = 0\,(k = 1 \ldots n)$$

besitzen nach dem Obigen $\varrho_\nu + p$ linear unabhängige Lösungensysteme

$$(38)\qquad \mu_1^{(s)} \ldots \mu_{n+p}^{(s)} \qquad (s = 1, 2 \ldots \varrho_\nu + p).$$

Indem man die Gleichungen (33) bezw. mit $\mu_i^{(s)}$ multiplicirt und nach i summirt, erhält man die noch übrigen der Bedingungen, die ausdrücken, dass die Relationen (32) (33) die t_k unbestimmt lassen. Nun gibt es aber, da der Annahme nach $2n + p$ der Rang der Matrix B_2 (§ II) ist, genau p linear unabhhängige Funktionensysteme

$$\alpha_1^{(s)} \ldots \alpha_{n+p}^{(s)},\ \beta_1^{(s)} \ldots \beta_{n+p}^{(s)} \qquad (s = 1, 2 \ldots p)$$

die vermöge J den Gleichungen

$$(39)\qquad \left.\begin{array}{r} \sum_1^{n+p}{}_i\, \alpha_i^{(s)} P_{ik} = 0 \\ \sum_1^{n+p}{}_i\, (\alpha_i^{(s)} Q_{ik} + \beta_i^{(s)} P_{ik}) = 0 \\ \sum_1^{n+p}{}_i\, \beta_i^{(s)} Q_{ik} = 0 \end{array}\right\} (k=1,\ldots n)$$

genügen. Daraus folgt, dass die Funktionensysteme

$$(40)\qquad \beta_1^{(s)} - w_\nu\, \alpha_1^{(s)} \ldots \beta_{n+p}^{(s)} - w_\nu\, \alpha_{n+p}^{(s)}\ (s = 1, 2, \ldots p)$$

Lösungensysteme der linearen Gleichungen (37) darstellen. Diese p Lösungensysteme sind linear unabhängig; denn andernfalls beständen Beziehungen der Form

$$\sum_1^p \lambda_s\, \beta_i^{(s)} = w_\nu \sum_1^p \lambda_s\, \alpha_i^{(s)};$$

setzt man also

$$\sigma_i \equiv \sum \lambda_s\, \alpha_i^{(s)}$$

so erhielte man mit Rücksicht auf (39):

$$\sum_1^{n+p} \sigma_i P_{ik} = 0,\ \sum_1^{n+p} \sigma_i Q_{ik} = 0\ (k = 1 \ldots n)$$

was nicht möglich ist, da der Annahme nach $n + p$ der Rang der Matrix B_1 (§ II) ist, und die σ_i nicht alle identisch verschwinden können. Ausser den Systemen (40) besitzen also die linearen Gleichungen (37) noch ϱ_ν weitere Lösungensysteme, die wir mit den ϱ_ν ersten Funktionensystemen (38) identificieren. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (30) (31) die $r_i\ s_i\ t_i$ nicht bestimmen, schreiben sich daher schliesslich, unter Hinzunahme der Gleichungen (35), folgendermassen;

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{l} dy = w_\nu\, dx;\ dz_i = p_i\, dx + q_i\, dy\ (i = 1 \ldots n), \\ \qquad df_1 = 0,\ df_2 = 0, \ldots\ df_{n+p} = 0; \\ \sum_1^n{}_k \left(\sum_1^{n+p}{}_i\, \mu_i^{(s)} P_{ik}\right) dq_k + \sum_1^{n+p}{}_i\, \mu_i^{(s)} N_i\, dx = 0\ (s = 1, 2, \ldots \varrho_\nu). \end{array}\right.$$

und man erkennt leicht, dass diese Pfaff'schen Gleichungen hinsichtlich der Differentiale dx, dy, dz_i, dp_i, dq_i linear unabhängig sind. Die Funktionen $\mu_i^{(\nu)}$ sind natürlich von der Wahl der Wurzel w_ν abhängig.

Den Wurzeln $w_1 \ldots w_\varkappa$ entsprechend erhält man sonach $\varkappa$ verschiedene Systeme Pfaff'scher Gleichungen, die ich im Anschluss an meine oben citirte Abhandlung die dem gegebenen Involutionssystem J beigeordneten Pfaff'schen Systeme erster Stufe nennen will.

Bezeichnet man, in Verallgemeinerung einer bekannten von Lie herrührenden Ausdrucksweise, ein Wertsystem

$$x\, y\, z_1 \ldots z_n\, p_1\, q_1 \ldots p_n\, q_n$$

als ein Flächenelement erster Ordnung, ferner jede Schaar von ∞^1 Flächenelemente 1. O., die den totalen Differentialgleichungen

$$dz_i = p_i\, dx + q_i\, dy \qquad (i = 1 \ldots n) \tag{42}$$

genügt, als einen Streifen erster Ordnung, so kann man einen Streifen 1. O., der einem der Pfaff'schen Systeme (56) genügt, als einen charakteristischen Streifen oder eine Charakteristik 1. O. des gegebenen Involutionssystems bezeichnen. Es gibt also $\varkappa$ verschiedene Systeme charakteristischer Streifen, und man erkennt leicht, dass jedes Integral von J, d. h. jedes System von ∞^2 Flächenelementen 1. O., das dem System J und den totalen Differentialgleichungen (42) genügt, von je ∞^1 charakteristischen Streifen eines jeden der $\varkappa$ verschiedenen Systeme erzeugt wird.

25. In ganz analoger Weise lassen sich $\varkappa$ Charakteristikensysteme jeder beliebigen Ordnung h (> 1) definiren. Man hat zu diesem Zwecke auszudrücken, dass die Relationen:

$$dz_{\alpha\beta}^{(i)} = z_{\alpha+1,\beta}^{(i)}\, dx + z_{\alpha,\beta+1}^{(i)}\, dy \quad (\alpha + \beta = h,\ \alpha = 0, 1, \ldots h)$$

zusammen mit den Derivirten $h+1^{\text{ter}}$ Ordnung des gegebenen Involutionssystems die Ableitungen $h+1^{\text{ter}}$ Ordnung nicht bestimmen. Man erhält solcher Weise $\varkappa$ verschiedene „bei-

geordnete Pfaff'sche Systeme h^{ter} Stufe"; das einzelne dieser Systeme besteht aus den Relationen

$$dy = w_\nu\, dx;\; dz^i_{\alpha\beta} = z^i_{\alpha+1,\beta}\, dx + z^i_{\alpha,\beta+1}\, dy$$
$$(i = 1\,..\,n;\; \alpha + \beta \leqq h - 1)$$

ferner aus den Gleichungen, die durch totale Differentiation der Gleichungen J und ihrer Derivirten bis zur h^{ten} Ordnung einschliesslich entstehen, und aus ϱ_ν weiteren Pfaff'schen Gleichungen in den Variabeln

$$(43) \qquad x, y, z_1 \,..\, z_n, \,..\, z^i_{\alpha,\beta} \quad (\alpha + \beta < h).$$

Als „charakteristischen Streifen h^{ter} Ordnung" bezeichnet man dann jede Schar von ∞^1 Wertsysteme (43), die eines der beigeordneten Pfaff'schen Systeme h^{ter} Stufe, und alle Derivirten von J bis zur h^{ten} Ordnung befriedigt.

26. Wenn das vorgelegte Involutionssystem J hinsichtlich der $2n$ Variabeln p_i, q_i linear ist, lassen sich auch $\varkappa$ verschiedene beigeordnete Pfaff'sche Systeme „nullter Stufe" definiren, indem man ausdrückt, dass die Gleichungen (42) zusammen mit den Relationen J die $2n$ Variabeln $p_i\, q_i$ nicht bestimmen.[1])

27. Auf die Integrationstheorien, die mit dem Begriff der beigeordneten Pfaff'schen Systeme in Zusammenhang stehen und die ich a. a. O. unter der speciellen Voraussetzung $\varkappa = n - p$ ausführlich entwickelt habe, soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Wir wollen hier nur noch den Fall hervorheben, dass nur eine einzige Funktion w_1 vorhanden ist, und die Exponenten der zugehörigen Elementarteiler alle gleich 1 sind.[2]) Dann hat man $\varrho_1 = n - p$, und es gibt nur ein einziges beigeordnetes System erster Stufe, bestehend aus $3n + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen in den $3n + 2$ Variabeln

$$(44) \qquad x\, y\, z_1 \,..\, z_n\, p_1\, p_2 \,..\, p_n\, q_1 \,..\, q_n.$$

[1]) Vgl. den § 5 meiner oben citirten Arbeit.

[2]) Dieser Fall wird unter der speciellen Annahme $p = 0$ von M. Hamburger (Journ. f. Math. 93) gelegentlich betrachtet.

Die Schar der charakteristischen Streifen 1. O. hängt also jetzt nur von einer endlichen Parameterzahl ab, derart, dass jedes Flächenelement 1. Ord., dessen Coordinaten (44) den gegebenen Gleichungen J genügen, auf einer und nur einer Charakteristik 1. Ordn. enthalten ist.

Bestimmt man einen beliebigen Streifen 1. Ordnung, dessen Flächenelemente das System J befriedigen,[1]) so erzeugen die bezw. von diesen Flächenelementen ausgehenden ∞^1 Charakteristiken die allgemeinste Integralmannigfaltigkeit des gegebenen Involutionssystems.[2])

---

[1]) Diese Bestimmung erfordert im Allg. noch die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, vgl. den Schluss des § I meiner oben citirten Arbeit.

[2]) Es sei zum Schluss hervorgehoben, dass nach Riquier (Éc. Norm. 1893), wenn man den Begriff des „canonischen Systems" etwas erweitert, jedes beliebige Differentialsystem auf ein canonisches passives System erster Ordnung reducirt werden kann, dass also die Entwickelungen dieser Note auf beliebige Differentialsysteme mit 2 Independenten anwendbar sind. Insbesondere kann also jedes Differentialproblem in zwei Independenten auf die passive Normalform (N) des § III zurückgeführt werden.

Ueber ein Convergenz-Kriterium für Kettenbrüche mit positiven Gliedern.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 8. Juli.*)

Im folgenden sollen a_ν, b_ν, p_ν, q_ν, r_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) allemal unbegrenzte Folgen **positiver** Zahlen bedeuten.

Als **notwendige und hinreichende** Bedingung für die **Convergenz** des unendlichen Kettenbruches:

$$(1) \qquad \left[\frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty \equiv \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \ldots + \frac{1|}{|q_\nu} + \ldots\ldots$$

ergiebt sich alsdann:[1])

$$(A_1) \qquad \text{die Divergenz der Reihe } \sum q_\nu;$$

ebenso für die **Convergenz** des Kettenbruches:

$$(2) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots\ldots = \left[\frac{1}{r_\nu}\right]_1^\infty$$

$$(A_2) \qquad \text{die Divergenz der Reihe } \sum r_\nu,$$

wo: $r_1 = \dfrac{b_1}{a_1}$, im übrigen:

$$(3) \qquad r_{2\nu} = \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} \cdot b_{2\nu}, \quad r_{2\nu+1} = \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}}{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}} \cdot \frac{b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}}.$$

Da sodann die Divergenz der Reihe $\sum q_\nu q_{\nu+1}$ stets die-

---

[1]) Vgl. Bd. 28 (1898) dieser Berichte p. 311. — Encyklop. der Math. Wissensch. Bd. 1, p. 128. — Stolz, Vorl. über Allg. Arithm. Bd. 2, p. 282.

jenige der Reihe $\sum q_\nu$ nach sich zieht, aber nicht umgekehrt,[1]) so resultirt als eine hinreichende, aber nicht nothwendige Bedingung für die Convergenz des Kettenbruches (1):

(B₁) die Divergenz der Reihe $\sum q_\nu\, q_{\nu+1}$;

und daraus entsprechend für die Convergenz des Kettenbruches (2):

(B₂) die Divergenz der Reihe $\sum \frac{b_\nu\, b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$.

In zwei kürzlich publicirten Arbeiten[2]) über die Convergenz gewisser Kettenbrüche hat nun Herr Saalschütz zunächst ohne Beweis den Satz mitgetheilt, dass

(C) die Divergenz der Reihe $\sum \sqrt{\frac{b_\nu\, b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$

als nothwendige[3]) und hinreichende Bedingung für die Convergenz des Kettenbruches (1) zu gelten habe. und er erblickt gerade in der Auffindung dieses Kriteriums ein deutliches Kennzeichen für die grössere Tragweite seiner Untersuchungs-Methode[4]) gegenüber der bei früherer Gelegenheit[5])

---

[1]) Wenn nämlich $\sum q_\nu$ convergirt, so muss auch $\sum q_\nu\, q_{\nu+1}$ a fortiori convergiren; wenn dagegen $\sum q_\nu$ divergirt, so kann immerhin $\sum q_\nu\, q_{\nu+1}$ noch convergiren $\left(\text{Beispiel: } q_\nu = \frac{1}{\nu}\right)$.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 120 (1899), p. 138, Fussnote. — Mitth. d. Königsberger phys.-ökon. Ges. vom 9. Februar 1899, p. 6.

[3]) An der zuletzt citirten Stelle heisst es noch ausführlicher, dass der Kettenbruch allemal oscillirt, wenn jene Reihe convergirt. Dies ist indessen unrichtig, wie weiter unten gezeigt werden wird.

[4]) Der Kern der von Herrn Saalschütz befolgten Methode besteht darin, dass er der bekannten Recensionsformel für den n^{ten} Näherungsbruch-Nenner B_n des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, nämlich:

(a) $$B_n = b_n\, B_{n-1} + a_n\, B_{n-2}$$

die Form giebt:

(b) $$C_{n-1}\,(C_n - b_n) - a_n = 0, \text{ wo: } C_\nu = \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}},$$

und sodann diese Quotienten C_ν als Unbekannte betrachtet.

[5]) S. das erste Citat in Fussnote 1) p. 261.

von mir benützten. Da ich die ziemlich schwer zu übersehenden Resultate jener umfangreichen Arbeiten (74 Quartseiten) noch nicht genügend studirt habe, so bin ich weit entfernt, die Richtigkeit jener Bemerkung im allgemeinen bestreiten zu wollen.[1]) In Beziehung auf das eben erwähnte Convergenz-Kriterium möchte ich sie jedoch aus zwei Gründen als unzutreffend bezeichnen: erstens weil dasselbe nur zur Hälfte richtig ist, insofern die fragliche Bedingung zwar als hinreichend, keineswegs aber als nothwendig erscheint; zweitens aber, weil sich das so berichtigte Kriterium ohne die, wie ich glauben möchte, wohl etwas umständlichere Methode des Herrn Saalschütz unmittelbar aus dem Fundamental-Kriterium (A_1), (A_2) ableiten lässt, nämlich analog wie die ebenfalls lediglich hinreichenden Convergenz-Bedingungen (B_1), (B_2) durch eine ganz elementare Ueberlegung über die gegenseitigen Convergenz-Beziehungen der Reihen $\sum q_\nu$, $\sum \sqrt{q_\nu\, q_{\nu+1}}$.

---

1. Um die beiden zuletzt ausgesprochenen Behauptungen näher zu begründen, schicke ich zunächst den folgenden Hülfssatz voran:

Sind die beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ *convergent*, so *convergirt* auch die Reihe $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$: die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$ bildet also eine *hinreichende* Bedingung dafür, dass *mindestens eine* der beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ *divergirt.* Diese Bedingung ist aber *keine nothwendige*, und zwar können trotz der *Convergenz* von $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$ sogar *beide* Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ *divergiren.*

---

[1]) Immerhin will mir nicht einleuchten, warum gerade, wie Herr Saalschütz bemerkt (Journ. f. Math. a. a. O.), die in Fussnote 4), p. 262 mit (b) bezeichnete Gleichung die „wahre Quelle" eines von mir a. a. O. aufgestellten Convergenz-Kriteriums sein soll, da ich dasselbe doch direkt aus der eigentlichen Fundamentalgleichung (a) abgeleitet habe, ohne den Umweg über (b) zu nehmen.

Beweis. Aus der Beziehung:

$$(4) \qquad (\sqrt{q_\nu} - \sqrt{r_\nu})^2 = q_\nu + r_\nu - 2\sqrt{q_\nu r_\nu} \geqq 0$$

folgt unmittelbar (der bekannte Satz, dass das geometrische Mittel niemals das arithmetische übersteigt):

$$(5) \qquad \sqrt{q_\nu r_\nu} \leqq \tfrac{1}{2}(q_\nu + r_\nu).$$

Da nun gleichzeitig mit den beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ stets auch $\sum \frac{1}{2}(q_\nu + r_\nu)$ convergirt, so ergiebt sich in diesem Falle, dass auch $\sum \sqrt{q_\nu r_\nu}$ convergirt.

Zugleich lehrt die Ungleichung (5), dass es zunächst nicht erlaubt ist, umgekehrt aus der Convergenz von $\sum \sqrt{q_\nu r_\nu}$ auf diejenige von $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ zu schliessen. Dass aber dieser Schluss nicht nur logisch unzulässig, sondern sachlich falsch wäre, erkennt man leicht aus den folgenden Beispielen.

Es bezeichne zunächst d_ν, wo $0 < d_\nu < G$, das allgemeine Glied einer divergenten, $c_\nu > 0$ dasjenige einer convergenten Reihe. Setzt man sodann:

$$(6) \qquad q_\nu = d_\nu, \quad r_\nu = c_\nu^2$$

so wird:

$$(7) \qquad \sqrt{q_\nu r_\nu} = \sqrt{d_\nu} \cdot c_\nu < G \cdot c_\nu,$$

sodass $\sum \sqrt{q_\nu r_\nu}$ convergirt, obschon $\sum q_\nu \equiv \sum d_\nu$ divergirt.

Bezeichnet ferner $d_\nu > 0$ das allgemeine Glied einer divergenten Reihe von der Beschaffenheit, dass $\sum d_\nu^{1+p}$ für ein hinlänglich grosses $p > 0$ convergirt $\Big($z. B. $d_\nu = \frac{1}{\nu^\varrho}$, wo: $0 < \varrho < 1$, also: $\sum d_\nu^{1+p} = \sum \frac{1}{\nu^{\varrho(1+p)}}$ convergent, wenn: $\varrho(1+p) > 1$, d. h. wenn: $p > \frac{1-\varrho}{\varrho}\Big)$, so setze man:

$$(8) \qquad \begin{cases} q_\nu = d_\nu^{1+p(1+(-1)^\nu)}, \text{ d. h. } q_{2\nu} = d_\nu^{1+2p}, \ q_{2\nu+1} = d_\nu, \\ r_\nu = d_\nu^{1+p(1-(-1)^\nu)}, \text{ d. h. } r_{2\nu} = d_\nu \quad, \ r_{2\nu+1} = d_\nu^{1+2p}. \end{cases}$$

Alsdann wird:

$$\sqrt{q_\nu r_\nu} = d_\nu^{1+\rho}, \tag{9}$$

also $\sum \sqrt{q_\nu r_\nu}$ convergent, während die Reihen $\sum q_{2\nu+1}$, $\sum r_{2\nu}$ und somit auch die beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ divergiren.

3. Setzt man jetzt speciell $r_\nu = q_{\nu+1}$, so bleibt zunächst der erste Theil des vorigen Satzes unverändert bestehen, da die zum Beweise dienende Ungleichung (5) durch jene besondere Festsetzung nicht alterirt wird. Somit folgt:

> Ist die Reihe $\sum q_\nu$ *convergent*, so *convergirt* auch die Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$: die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ bildet also eine *hinreichende* Bedingung für diejenige der Reihe $\sum q_\nu$.

Dass aber auch hier diese Bedingung keine nothwendige ist, dass also $\sum q_\nu$ divergiren kann, auch wenn $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ convergirt, zeigt eine einfache Modification des zuletzt angegebenen Beispiels. Man setze (wieder unter der Voraussetzung, dass $\sum d_\nu$ divergirt, $\sum d_\nu^{1+\rho}$ convergirt):

$$\begin{cases} q_\nu = d_\nu^{1+(\rho+\frac{1}{2})(1+(-1)^\nu)} \\ \text{also: } q_{2\nu\pm 1} = d_{2\nu\pm 1}, \quad q_{2\nu} = d_{2\nu}^{2+2\rho}, \end{cases} \tag{10}$$

und daher:

$$\sqrt{q_{2\nu\pm 1}\, q_{2\nu}} = \sqrt{d_{2\nu\pm 1}} \cdot d_{2\nu}^{1+\rho}. \tag{11}$$

Daraus folgt, dass $\sum \sqrt{q_{2\nu\pm 1} \cdot q_{2\nu}} = \sum \sqrt{q_\nu \cdot q_{\nu+1}}$ wiederum convergirt, während $\sum q_{2\nu\pm 1}$, also auch $\sum q_\nu$ divergirt.

4. Wie ein Blick auf das vorige Beispiel lehrt, rührt die Convergenz der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ bei gleichzeitiger Divergenz von $\sum q_\nu$ wesentlich davon her, dass $\sum q_{2\nu}$ convergirt, dagegen $\sum q_{2\nu+1}$ divergirt. Daraus folgt, dass in dem vorliegenden Falle die q_ν sicherlich keine von irgend einem Index $\nu > n$ ab monoton bleibende Folge bilden können. Es gilt aber auch umgekehrt, dass die Monotonie der Folge q_ν (für

$\nu \geq n$) das Zusammentreffen der Convergenz von $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ und der Divergenz von $\sum q_\nu$ definitiv ausschliesst; d. h. es besteht der folgende Satz:

Sind die q_ν zum mindesten für $\nu \geq n$ *monoton*, so sind die Reihen $\sum q_\nu$ und $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ stets *gleichzeitig convergent* oder *gleichzeitig divergent*. Insbesondere bildet dann also die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ eine *nothwendige* und *hinreichende* Bedingung für diejenige der Reihe $\sum q_\nu$.

Beweis. Sind für $\nu \geq n$ die $q_\nu > 0$ und niemals abnehmend, so erkennt man ohne weiteres, dass die beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ stets divergiren müssen. Sind sie dagegen niemals zunehmend, so hat man:

$$(12) \qquad q_\nu \geq q_{\nu+1} \text{ für } \nu \geq n,$$

$$\left.\begin{array}{ll} (13) \text{ also:} & q_\nu^2 \geq q_\nu q_{\nu+1} \geq q_{\nu+1}^2 \\ (14) \text{ und:} & q_\nu \geq \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}} \geq q_{\nu+1} \end{array}\right\} (\nu \geq n)$$

schliesslich:

$$(15) \qquad \sum_n^\infty{}^\nu q_\nu \geq \sum_n^\infty{}^\nu \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}} \geq \sum_{n+1}^\infty q_\nu,$$

woraus die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes unmittelbar hervorgeht.

5. Wendet man diese Resultate zunächst auf das Kettenbruch-Kriterium (A_1) an, so ergiebt sich:

(C_1) Die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ bildet eine *hinreichende* Bedingung für die *Convergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty$; diese Bedingung ist zugleich eine *nothwendige*, wenn die q_ν zum mindesten von einem bestimmten Index $\nu = n$ ab *monoton* bleiben.

In dieser Form erscheint das gewonnene Kriterium zunächst ohne besonderen Werth (ebenso wie das Kriterium (B_1)), da generell, wenn der Kettenbruch von vornherein in

der Form $\left[\frac{1}{q_\nu}\right]$ vorgelegt ist, die Anwendung des Haupt-Kriteriums (A_1), d. h. die Untersuchung der Reihe $\sum q_\nu$ einfacher erscheint, als diejenige der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$. Seine Bedeutung tritt erst hervor, wenn die q_ν speciell so beschaffen sind, dass $q_\nu q_{\nu+1}$ merklich einfacher ausfällt als q_ν selbst,[1]) und dies ist namentlich dann der Fall, wenn $q_\nu = r_\nu$ und die r_ν durch Gl. (3) definirt sind. Man findet auf diese Weise:

(C_2) Die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$ bildet eine für die *Convergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *hinreichende* Bedingung, die aber im allgemeinen *keine nothwendige* ist. Das letztere ist jedoch der Fall, wenn die mit r_ν bezeichneten Ausdrücke (Gl. (3)) zum mindesten für $\nu > n$ *monoton* bleiben.[2])

Da die Feststellung des monotonen Verhaltens der r_ν im allgemeinen verhältnissmässig complicirt ausfällt, so kommt das obige Kriterium wesentlich nur als hinreichende Bedingung in Betracht und stellt in diesem Sinne thatsächlich eine merkliche Verbesserung der ebenfalls nur hinreichenden Convergenz-Bedingung (B_2) dar: die letztere versagt, wenn $\sum \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$ convergirt. Man hat in diesem Falle (zum mindesten für $\nu \geqq n$): $\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}} < 1$, und daher: $\sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}} > \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$, sodass $\sum \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$ eventuell divergiren kann und sodann auf Grund des Kriteriums (C_2) eine Entscheidung liefert.

[1]) Dieses Verhältniss ist ein ganz analoges, wie bei den Kriterien erster und zweiter Art für unendliche Reihen — vgl. meine Bemerkungen; Math. Ann. Bd. 35 (1890), p. 308–311.

[2]) Es genügt etwa nicht, dass die $\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$ monoton ausfallen (s. das Beispiel in Nr. 3).

Eine besonders einfache Gestalt nimmt die fragliche Convergenz-Bedingung für Kettenbrüche von der häufig vorkommenden Form $\left[\frac{p_\nu}{1}\right]_1^\infty$ an: sie reducirt sich in diesem Falle auf die Divergenz der Reihe $\sum \frac{1}{\sqrt{p_\nu}}$. Mit Hülfe dieses Kriteriums erkennt man z. B. ohne alle Rechnung, dass der Kettenbruch $\left[\frac{\nu^p}{1}\right]_1^\infty$ für $0 \leq p \leq 2$ convergirt, während das Kriterium (B_2) die Convergenz des Kettenbruches nur für $0 \leq p \leq 1$ erkennen lässt.

Bleiben ferner die $\frac{b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$ d. h. die $\frac{b_\nu}{a_\nu}$ über, also die $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ unter einer endlichen Schranke, so genügt auch die Divergenz der einfacheren Reihe $\sum \sqrt{b_\nu}$ für die Convergenz des Kettenbruches.

Nachtrag zu dem Aufsatze:

Zur Theorie des Doppel-Integrals etc.

(p. 39—62 dieses Bandes).

Bei der Abfassung dieses Aufsatzes war mir eine Arbeit über Doppel-Integrale entgangen, welche Herr C. Arzelà in den Abhandlungen der Bologneser Akademie vom Jahre 1892 veröffentlicht hat.[1]) Herr Arzelà untersucht daselbst[2]) zunächst, in wieweit die Existenz des eigentlichen Doppel-Integrals $\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y)\, dx\, dy$ diejenigen der beiden einfachen Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx$, $\int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$ nach sich zieht und gelangt hier-

---

[1]) „Sugli integrali doppi." Mem. Accad. Bologna, Serie V, T. II, p. 133—147.

[2]) A. a. O. Nr. 4—6.

bei zu ähnlichen Resultaten, wie sie in dem Satze meines § 1 zusammengefasst sind. Immerhin dürfte gerade die Vergleichung beider Darstellungen die grössere Prägnanz und Uebersichtlichkeit der von mir gewählten Bezeichnungsweise deutlich hervortreten lassen.

Sodann[1]) giebt Herr Arzelà eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Beziehung:

$$\text{(A)} \qquad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$$

ohne vorausgesetzte Existenz des entsprechenden Doppel-Integrals, die ich etwa in möglichster Kürze als „im allgemeinen gleichmässige, horizontale und vertikale Integrabilität von $f(x, y)$“ bezeichnen will. Im Anschlusse hieran möchte ich zur Vervollständigung der auf p. 60 meines Aufsatzes gemachten Bemerkung,

> „dass die Existenz des betreffenden Doppel-Integrals zur Zeit als die weitaus allgemeinste Form einer hinreichenden Bedingung für das Zustandekommen der Beziehung (A) gelten dürfe“

noch folgendes hinzufügen. Es wäre möglich, dass die Bedingung des Herrn Arzelà für allgemeiner zu gelten hat, als die oben genannte. Hierzu müsste aber zuvor zweierlei bewiesen werden, nämlich: erstens, dass es wirklich Functionen $f(x, y)$ giebt, für welche jene Bedingung erfüllt ist, während andererseits das entsprechende Doppel-Integral nicht existirt; zweitens, dass alle $f(x, y)$, für welche das Doppel-Integral existirt, auch eo ipso der fraglichen Bedingung genügen. Aber selbst wenn dieser Beweis geführt werden kann, so wäre die auf diese Weise erzielte Verallgemeinerung der Bedingungen für die Existenz der Beziehung (A) eine verhältnissmässig unerhebliche. Zu der ausserordentlich weit reichenden, durch präcise Umgrenzung der eventuell zulässigen Unstetigkeiten kurz und scharf zu charakteri-

---

[1]) A. a. O. Nr. 8.

sirenden Klasse von Functionen $f(x, y)$, für welche das Doppel-Integral existirt, würde dann auf Grund der Arzelà'schen Bedingung eine sehr specielle, allenfalls durch künstliche Constructionen mit Beispielen zu belegende Gattung von solchen $f(x, y)$ hinzutreten, denen lediglich die relativ complicirte Eigenschaft der gleichmässigen horizontalen und vertikalen Integrabilität ohne Existenz des Doppel-Integrals zukommt. Keinesfalls werden dann aber etwa alle möglichen $f(x, y)$ umfasst, für welche die Beziehung (A) besteht. Denn, wie auch Herr Arzelà selbst hervorhebt,[1]) die fragliche Bedingung ist zwar eine hinreichende, aber durchaus keine nothwendige. Als Illustration zu dieser Bemerkung können gerade diejenigen Functions-Beispiele dienen, welche ich in § 2 meines Aufsatzes angegeben habe: für diese besteht in der That die Beziehung (A), obschon dieselben, wie leicht zu sehen, der Arzelà'schen Bedingung nicht genügen. Ich möchte darnach sagen, dass man auch im günstigsten Falle den wahren Grundlagen der Beziehung (A) mit Hülfe jener letzteren Bedingung nicht wesentlich näher kommt. —

Schliesslich hätte ich im Interesse der historischen Gerechtigkeit noch folgende zwei Bemerkungen nachzutragen:

In der Fussnote 1) p. 42 ist hervorgehoben, dass Harnack in seinen Elementen der Diff.- und Integr.-Rechnung fälschlich behauptet, dass bei Existenz des Doppel-Integrals $\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$ die Nicht-Existenz der einfachen Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx$ bezw. $\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$ auf eine unausgedehnte Menge y bezw. x beschränkt sein müsse.

Dem ist hinzuzufügen, dass Harnack selbst späterhin[2]) den fraglichen Irrthum lediglich als Ausfluss einer incorrecten Ausdrucksweise erklärt und eine vollkommen

[1]) A. a. O. Nr. 7 am Schlusse.
[2]) Math. Ann. Bd. 26 (1886) p. 567.

richtige Fassung der betreffenden Behauptung angegeben hat.

Ferner ist der von mir benützte und auf p. 56, 57 kurz bewiesene Hülfs-Satz:

$$\underline{\int_{x_0}^{X}} f'(x) \cdot dx < f(X) - f(x_0) < \overline{\int_{x_0}^{X}} f'(x)\, dx,$$

wie ich nachträglich bemerkt habe, in einem von Herrn Pasch[1]) aufgestellten, etwas allgemeineren Satze als specieller Fall enthalten.

[1]) Math. Ann. Bd. 30 (1887) p. 153.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 140. Stiftungstages

am 11. März 1899.

Die Sitzung eröffnet der Präsident der Akademie Dr. von Pettenkofer Exc. mit folgender Ansprache:

Der heutige Tag, der 11. März 1899, ist ein Festtag für das Königreich Bayern. Es sind eben 100 Jahre verflossen, seit die bayerischen Lande wieder unter dem dermalen regierenden Zweige des Hauses Wittelsbach vereinigt worden sind. In allen öffentlichen Unterrichtsanstalten wird dieser Tag feierlich begangen und schliesst sich den zahlreichen Huldigungen im ganzen Königreich Bayern auch die Akademie der Wissenschaften geziemend an.

Die bayerische Akademie der Wissenschaften feiert heute auch ihren 140. Stiftungstag. Die Gründung derselben durch den Kurfürsten Maximilian Josef III. ist eine hervorragende Thatsache in der Geschichte Bayerns, auf welche schon eines der historischen Wandgemälde in den Arkaden des Hofgartens dahier Einheimische und Fremde hinweist. In dem neuen Nationalmuseum in der Prinzregenten-Strasse, welches nach den grossen und zweckmässigen Plänen von Gabriel Seidl gebaut und wahrscheinlich noch in diesem Jahre eröffnet wird, wird noch mehr daran erinnert werden: da werden einzelne Säle eingerichtet, in welchen Gegenstände gesammelt stehen, welche sich auf die Geschichte einzelner bayerischer Herrscher beziehen. In dem Saale Max Josef III. wird manches zu sehen sein, was sich auf die Gründung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften bezieht.

Wir blicken auf unseren Stifter und seine Nachfolger aus dem Hause Wittelsbach dankbar zurück: sie alle wollten unsere Protektoren nicht nur geheissen werden, sondern sind es auch wirklich gewesen. Unser derzeitiger Protektor Seine Königliche Hoheit Prinz-Regent Luitpold, dessen Geburtstag morgen gefeiert wird, hat auch im abgelaufenen Jahre uns wieder Beweise seiner Huld und Gnade gegeben.

Die durch Herrn Kommerzienrath Theodor Stützel dem paläontologischen Museum geschenkten Ausgrabungen aus Samos sind nun soweit präparirt, dass ein Urtheil über deren Werth und Bedeutung gewonnen werden konnte. Die Präparation des mit grosser Umsicht gesammelten Rohmaterials hat ein sehr günstiges Resultat ergeben, so dass nach Vollendung der Präparation und nach wissenschaftlicher Sichtung der gesammelten Ausbeute unser Museum wohl die beste, überhaupt existirende Sammlung von fossilen samiotischen Säugethieren besitzen wird. Herr Dr. Forsyth Major, welcher durch eine Bemerkung bei Plutarch angeregt im Jahre 1887 die Fundstellen auf Samos entdeckt und daselbst die ersten Ausgrabungen ausgeführt hat, besichtigte im Laufe des vorigen Sommers einen Theil der Stützel'schen Ausbeute und äusserte sich sehr günstig über deren Werth. Was Geheimrath von Zittel, Konservator der paläontologischen Sammlung, im Brittischen Museum in London und in der Stuttgarter Sammlung von Fossilen aus Samos gesehen hat, kann sich nach seinem Urtheil mit unserer Sammlung nicht messen.

Seine Königliche Hoheit Prinz-Regent Luitpold hatte die Gnade, am 12. Dezember vorigen Jahres diese Sammlung eingehend zu besichtigen und bei dieser Gelegenheit Herrn Theodor Stützel den Verdienstorden vom heiligen Michael IV. Klasse allergnädigst persönlich zu verleihen.

Bei diesen Ausgrabungen wurde Herr Kommerzienrath Stützel von den Herren Senator Dr. Fletoridis, Staatskanzler Dr. Stamatiades und Kaufmann Ruck auf Samos unterstützt. Den drei genannten Herren wurde von der Vorstandschaft der Akademie und des Generalkonservatoriums der wissenschaft-

lichen Sammlungen des Staates für ihre uneigennützigen und eifrigen Bemühungen die silberne Medaille Bene merenti verliehen.

Welch grosser Theilnahme unsere paläontologische Staatssammlung unter Herrn von Zittels Leitung auch in Münchener Bürgerkreisen sich erfreut, davon ist folgende Thatsache ein glänzender Beweis. Angeregt durch Herrn Kommerzienrath Stützel hat sich Herr Anton Sedlmayr, Grossbrauereibesitzer, bemüht, zur Ergänzung der paläontologischen Staatssammlung einen Fond zu stiften, welcher die Möglichkeit gewährt, gewisse von Herrn von Zittel schon seit längerer Zeit ins Auge gefasste Erwerbungen durchzuführen. Es ist Herrn Anton Sedlmayr gelungen, in kurzer Zeit die Summe von 30 000 Mark zusammenzubringen und haben sich folgende Herren und Firmen an dem Fond mit verschiedenen Beiträgen betheiligt:

Bullinger Max, Kommerzienrath und Handelsrichter,
Fink Wilhelm, Kommerzienrath und Bankier,
Kathreiners Malzkaffee-Fabriken,
Kustermanns Eisen- und Kohlenhandlung,
Oberhummer Hugo, Kommerzienrath und Handelsrichter,
Pschorr August, „ Georg, „ Josef, } Brauereibesitzer,
Pschorr Mathias, Rentner,
Rathgeber Josef, Kommerzienrath und Fabrikbesitzer,
Röckl Heinrich, Fabrikbesitzer,
Sedlmayr Johann, Kommerzienrath, „ Karl, Kommerzienrath, „ Anton, } Besitzer der Spatenbrauerei,
Sedlmayr Gabriel, Kommerzienrath und Besitzer der Brauerei zum Franziskanerkeller,
Weinmann Louis, Kommerzienrath und Handelsrichter.

Es wurde beantragt, diese hochherzige Schenkung als donatio sub modo annehmen, von dem Kassier der Akademie und des Generalkonservatoriums der wissenschaftlichen Sammlungen des

Staates separat verwalten lassen und über Verwendung der Mittel den Konservator der paläontologischen Staatssammlung unter Zustimmung des Präsidenten der Akademie der Wissenschaften verfügen lassen zu dürfen. Vom kgl. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten wurden diese Anträge gnädigst genehmiget und der Auftrag ertheilt, Herrn Anton Sedlmayr und den übrigen Donatoren sowohl von dem Präsidium der Akademie der Wissenschaften als auch vom kgl. Staatsministerium den Dank abzustatten.

Die Namen der Genannten werden auf der Marmortafel der Münchener Bürgerstiftung eingegraben werden.

Aus den Renten der Münchener Bürgerstiftung und der freiherrlichen Cramer-Klett-Stiftung wurden folgende Summen genehmiget: 1) 800 Mark auf Antrag des Herrn Konservators Groth dem Privatdozenten Dr. Ernst Weinschenk, um eine Forschungsreise in die französischen und piemontesischen Alpen zu machen. 2) 2000 Mark auf Antrag des Herrn Konservators Hertwig für den Privatdozenten der Zoologie Herrn Dr. Otto Maas, um in Cypern eine Untersuchung über die Entwicklungsgeschichte und die Organisation der Spongien zu unternehmen. 3) 500 Mark auf Antrag des Herrn Konservators von Baeyer für den Privatdozenten der Chemie Herrn Dr. Wilhelm Willstätter zur Förderung seiner Untersuchung über die wichtigen Arzneimittel Atropin und Cocain, und schliesslich 300 Mark an Herrn Kollegen Lindemann zur Fortführung seiner interessanten Erhebungen über die geographische Verbreitung altägyptischer Steingewichte.

Aus den Renten des Thereianos-Fonds konnten Preise verteilt und wissenschaftliche Unternehmungen gefördert werden. Einen Doppelpreis von [illegible] Mark erhielt Herr Dr. Papadopulos Kerameus, Privatdozent der mittel- und neugriechischen Philologie an der Universität zu St. Petersburg, für die zwei zusammengehörigen Werke: Katalog der Bibliothek des Patriarchats zu Jerusalem (St. Petersburg 1891—97) und Analekta aus [illegible] Bibliothek, 5 Bände (Petersburg 1891—1898).

Zur Unterstützung wissenschaftlicher Unternehmungen wurden genehmiget: 1500 Mark zur Herausgabe von Krumbachers byzantinischer Zeitschrift, 2900 Mark an Herrn Professor Furtwängler für ein von ihm und Herrn Reallehrer Reichhold herauszugebendes Werk über bemalte griechische Vasen, 1200 Mark an Herrn Gymnasialprofessor Dr. Helmreich in Augsburg für eine mit kritischem Apparat zu versehende Ausgabe von Galens Büchern über den Gebrauch der Körpertheile, 400 Mark an Herrn Gymnasiallehrer Dr. Fritz in Ansbach für Vergleichung von Handschriften behufs kritischer Ausgabe der Briefe des Synesios, 200 Mark an Herrn Lehramtskandidaten Bitterauf in München für Vergleichung des Codex Vaticanus 253 (L) und Ergänzung des kritischen Apparates der Parva Naturalia des Aristoteles, 700 Mark an Herrn Gymnasiallehrer Dr. Bürchner in München für topographische und historisch-sprachliche Untersuchung der Ortsnamen von Samos und der umliegenden Inseln. Nach § 10 der Statuten des Thereianos-Fonds haben diejenigen, welche Unterstützungen für wissenschaftliche Untersuchungen aus demselben erhalten haben, an die kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften über die Ausführung des Unternehmens Bericht zu erstatten.

Man ersieht, welch reiche Früchte das hochherzige Geschenk des edlen Thereianos zu bringen geeignet ist.

Ueber Mittel aus der Savigny-Stiftung verfügen statutengemäss jährlich abwechselnd die Akademien in Berlin, Wien und München. Im verflossenen Jahre war München an der Reihe. Die von der Akademie eingesetzte Kommission hat über die eingelaufenen Arbeiten folgendes Urtheil gefällt:

„Die von der k. Akademie am 28. März 1895 wiederholt gestellte Preisaufgabe der Savigny-Stiftung

„Revision der gemeinrechtlichen Lehre vom Gewohnheitsrechte“

hat vier Bearbeitungen gefunden.

Diejenige mit dem Motto:

„Von Ehe und Gewohnheit kommen alle Rechte“
(Deutsches Rechtssprüchwort).

ist, wie der Verfasser selbst anerkennt, eine rechts- und dogmengeschichtliche Vorarbeit und geht nicht über die Periode der deutschen Rechtsbücher hinaus. Dieselbe erfüllt daher die formellen Voraussetzungen einer Concurrenz-Arbeit nicht. Die k. Akademie will aber nicht unterlassen, dem vorliegenden Bruchstücke als einer durch Gelehrsamkeit, Gründlichkeit und Umsicht ausgezeichneten Leistung ihre volle Anerkennung auszusprechen.

Die drei anderen Arbeiten sind versehen mit den Mottos:

„Alles schon da gewesen.“

ferner

„Dies Recht hab ich nicht erdacht
Es habens von Alters auf uns gebracht
Unsere guten Vorfahren,“

endlich

„Durch die historische Schule hindurch,
Ueber die historische Schule hinaus.“

Keine dieser Arbeiten kann als eine gelungene und förderliche Untersuchung betrachtet werden. Sie leiden gemeinsam an dem Mangel einer genügenden geschichtlichen und psychologischen Grundlage; in der Hauptsache stellen sie sich dar als Deductionen aus unzureichenden und anfechtbaren Ausgangspunkten und sind nicht frei von manchen zum Theil auffallenden Widersprüchen. Die an letzter Stelle genannte Arbeit insbesondere ist bereits unter dem nämlichen Motto aus Veranlassung des erstmaligen Preisausschreibens von 1891 vorgelegt worden; aber auch in ihrer gegenwärtigen theilweise erweiterten und soviel sich noch ermitteln lässt, auch verbesserten Gestalt kann über sie in der Hauptsache kein günstigeres Urtheil ausgesprochen werden als früher.“

In der letzten Festsitzung im November des abgelaufenen Jahres erwähnte ich, dass unser Mitglied Herr Göbel, Kon-

servator des pflanzenphysiologischen Instituts, den kühnen Entschluss gefasst habe, auf eigene Kosten für wissenschaftliche Zwecke nach Australien und Ceylon zu reisen und dass er die Reise im August 1898 angetreten habe. Heute bin ich in der glücklichen Lage zu verkünden, dass Göbel vor wenigen Tagen wieder glücklich hier angekommen ist und reiche botanische Schätze mitgebracht hat, zu deren Erwerb das General-Konservatorium Mittel gewährt. Wir alle begrüssen herzlich seine Heimkehr.

Die Festsitzung zum Stiftungstage der Akademie dient jährlich auch dazu, verstorbener Mitglieder zu gedenken, was die Herren Klassensekretäre auch heute thun werden. Ich möchte nur ganz kurz meines Vorgängers im Präsidium, Ignaz von Döllinger, gedenken, dessen hundertsten Geburtstag man am jüngsten 28. Februar in allen gebildeten Kreisen des In- und Auslandes gefeiert hat. Der Magistrat der Stadt München hat das Grab Döllingers schmücken lassen und beschlossen, eine Strasse Münchens mit Döllingers Namen zu bezeichnen. Die vielen Huldigungen, welche dem Dahingeschiedenen dargebracht wurden, gereichen auch unserer Akademie zur Ehre, die seinen Werth schon viel früher erkannt hat. Döllinger war seit 1835 Mitglied, lange Zeit Sekretär der historischen Klasse und von 1873 bis 1890 Präsident der Akademie und Generalkonservator der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates. Seine grosse Bedeutung wurde bereits nach seinem Tode von Herrn von Cornelius in einer Gedächtnissrede hervorgehoben und der derzeitige Sekretär der historischen Klasse Herr Professor Friedrich veröffentlicht eben eine grosse Biographie Döllingers auf quellenreicher Unterlage. Es wäre überflüssig, hier weiter einzugehen, ich möchte in der heutigen Sitzung nur den 100. Geburtstag des Gefeierten nicht unerwähnt lassen und das Original eines alten Studienzeugnisses von Döllinger mittheilen, welches schenkungsweise durch Herrn Albert Nussbaum, Candidatus juris dahier, in meine Hände gelangt ist.

Es ist ein Akademisches Zeugniss der Universität Würzburg für den Kandidaten der Theologie Ignaz Döllinger aus Bamberg, von Professor Dr. Blümm, z. Z. Dekan der philosophischen Fakultät, am 7. April 1818 ausgestellt. Das Zeugniss führt 9 Fächer an, aus welchen Döllinger damals geprüft wurde, und die Befähigungsnoten, deren es damals 6 gab (Ausgezeichnet, Vorzüglich, Sehr gut, Gut, Hinlänglich, Gering). In der theoretischen Philosophie erhielt der junge Döllinger die Note Vorzüglich, in der praktischen Philosophie wurde er zweimal examinirt und erhielt beidemal Vorzüglich. In der Elementarmathematik bestand er auch zwei Examina und erhielt einmal Vorzüglich und das anderemal Ausgezeichnet, Philologie Ausgezeichnet und Vorzüglich, allgemeine Weltgeschichte Ausgezeichnet, Physik Ausgezeichnet, Mineralogie Ausgezeichnet, Botanik Ausgezeichnet, Zoologie Ausgezeichnet, mithin 4 mal Vorzüglich und 6 mal Ausgezeichnet, nicht ein einzigmal Hinlänglich oder gar Gering. Zum Zeichen, dass wir den Hundertjährigen auch nur mit Vorzüglich und Ausgezeichnet qualifiziren können, bitte ich sämmtliche Herren Kollegen sich von den Sitzen zu erheben.

Ich ersuche nun die Herren Klassensekretäre, die Nekrologe vorzutragen.

Der Classensekretär der math.-physikalischen Classe, Herr C. v. Voit theilte mit, dass die mathematisch-physikalische Classe im vergangenen Jahre fünf Mitglieder durch den Tod verloren hat: drei auswärtige und zwei einheimische.

Von auswärtigen Mitgliedern sind gestorben:

1) der Geologe Fridolin v. Sandberger in Würzburg,
2) der Physiker Wilhelm Hankel in Leipzig
3) und der Mathematiker Sophus Lie in Christiania.

Von einheimischen Mitgliedern:

1) der Geologe Wilhelm v. Gümbel
2) und der Chemiker Wilhelm v. Miller.

Der Letztere ist erst vor wenigen Tagen, mitten aus vollem Schaffen und in voller Kraft, als einer der jüngsten unseres Kreises, dahin gegangen; es wird ihm später eine seine Verdienste um die Wissenschaft würdigende Gedächtnissrede gehalten werden.

Wilhelm Gümbel.[1])

Die mathematisch-physikalische Classe hat am 18. Juni des vergangenen Jahres eines ihrer hervorragendsten und verdientesten Mitglieder, den Geologen Karl Wilhelm v. Gümbel, durch den Tod verloren. Ein wahrhaft köstliches Leben liegt in dem seinigen vor uns, ein Leben voller Mühe und rastloser Arbeit, aber auch voll fruchtbringenden glücklichen Erfolges. Ihm verdankt die Geologie in fast allen ihren Zweigen und in ihren schwierigsten Gebieten eine grosse Anzahl neuer Thatsachen, welche zu den wichtigsten Aufschlüssen über die Beschaffenheit und Entwicklung der Erdrinde geführt haben; namentlich hat er durch seine geognostische Beschreibung Bayerns für die Wissenschaft ein getreues Bild der durch Jahrtausende sich hinziehenden Urgeschichte des Landes entworfen, er hat sich aber auch durch seine Kenntnisse von der Beschaffenheit des Bodens, auf dem wir wohnen und leben, um das Gemeinwohl grosse Verdienste erworben.

Der Lebensgang dieses Mannes, obwohl es nur der einfache und stille eines Gelehrten war, erscheint von besonderem Interesse, weil man daraus deutlich zu erkennen vermag, wie

---

[1]) Mit Benützung der Nekrologe von K. v. Zittel (Münchener Neuest. Nachrichten, 1898 Nr. 316, Morgenblatt), L. v. Ammon (Bericht über die k. technische Hochschule zu München für das Studienjahr 1897—98); Edmund Naumann, zum 70. Geburtstage C. W. v. Gümbel's (Beilage zur Allgemeinen Zeitung 1893 Nr. 42, 11. Februar); Rede von Gümbel in d. öffentl. Sitzung der k. Akad. d. Wiss. am 28. März 1877; des Nekrologs von Dr. Otto Reis (in Vereins-Mittheilungen, Beilage zur Oesterreich. Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen, 1898 Nr. 7, 23. Juli); des Nekrologs von Leppla (Zeitschrift für praktische Geologie von Krahmann, 1898 Heft 10, S. 375) und der Lebensbeschreibung Gümbel's in dem Alpen-Freund von Amthor, Bd. II, Heft 3, S. 176.

ein angeborenes Talent durch günstige äussere Umstände zur herrlichsten Entfaltung gelangen kann.

Wilhelm Gümbel wurde am 11. Februar 1823 in dem am östlichen Abhange des Donnersberges in der Rheinpfalz gelegenen kleinen Pfarrdorfe Dannenfels als Sohn eines Revierförsters geboren. Seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts waren die Vorfahren daselbst als Förster ansässig, der Urgrossvater, der Grossvater und der Vater. Aus des letzteren Ehe mit der Tochter des Pfarrers Johannes Boos entsprossten 11 Knaben, von denen Wilhelm Gümbel der neunte war. Dass es den Eltern unter diesen Umständen öfters recht schwer fiel die Söhne zu ernähren und in dem abgelegenen Orte zu erziehen, lässt sich denken; die Kinder mussten sich mancherlei Entbehrungen auferlegen, aber daraus entsprang auch die Genügsamkeit und die Gabe sich am Einfachsten zu erfreuen sowie der auf die idealen Güter gerichtete Sinn. Es muss ein guter Geist, Zucht und Ordnung in der zahlreichen Familie geherrscht haben, denn aus allen den Söhnen wurden brauchbare und tüchtige Männer. Die Meisten folgten dem Berufe des Vaters, aber zwei der älteren Brüder unseres Gümbel hatten eine ausgesprochene Neigung zu der Naturwissenschaft: der eine, der Rentmeister Ludwig Christian Gümbel, war Doktor der Rechtswissenschaft und der Philosophie und beschäftigte sich gerne in seinen Mussestunden mit der Beobachtung von Naturobjekten; der Andere, Dr. Theodor Gümbel, später Rektor der Gewerbeschule in Landau, war ein ganz ausgezeichneter Botaniker und namentlich als Kenner der Moosflora bekannt; er war Mitglied vieler naturwissenschaftlicher Gesellschaften, lieferte in zahlreichen Abhandlungen werthvolle Beiträge zur systematischen Botanik und gab mit Wilhelm Philipp Schimper, dem Professor der Mineralogie und Geologie in Strassburg, die Bryologia europaea heraus; er hätte wohl noch Grösseres geleistet, wenn er sich von seiner Stellung als Schulmann hätte losmachen und frei entfalten können.

Auch unser Wilhelm Gümbel zeigte schon in früher Jugend die lebhafteste Wissbegierde für die umgebende Natur,

für die Gesteine wie für die Pflanzen- und Thierwelt, und eine seltene Begabung für die Beobachtung derselben. Diese Freude des besonders talentvollen Knaben an der Natur war durch das ungebundene Leben im Freien, sowie durch die landschaftliche Schönheit von Dannenfels, am Fusse des mit rothen Porphyr gekrönten Donnersberges, mit seinen dichten Buchen- und Kastanienwäldern und den mannigfaltigen bunten Gesteinen geweckt worden. Auch von den älteren Brüdern, welche Pflanzen, Insekten und Steine sammelten, bekam er früh vielerlei Anregungen; er fing ebenfalls an Sammlungen von Naturobjekten anzulegen; eine kleine Sammlung von Gebirgsarten aus dem Spessart, welche die Brüder aus der Forstschule in Aschaffenburg mit nach Hause gebracht hatten, erregte seine höchste Bewunderung.

Den ersten Unterricht erhielt er wie mehrere seiner Brüder in der Dorfschule in Dannenfels und dann von dem Pfarrer Hahn daselbst; auch der Bruder der Mutter, der Pfarrer Ludwig Christian Boos in Landau, nahm sich der Knaben liebevoll an.

Wilhelm kam wegen der beschränkten Vermögensverhältnisse der Eltern erst im 13. Lebensjahre an das Gymnasium zu Zweibrücken. Obwohl er durch seinen Fleiss, seine Intelligenz und sein hoch entwickeltes Pflichtgefühl in allen Classen den ersten Platz errang, gehörte die Gymnasialzeit für seinen an Freiheit gewöhnten Sinn nicht zu den liebsten Erinnerungen; er schrieb später darüber, dass der pedantisch quälende Zwang ihm immer wie ein Alp auf der Seele gelegen und das Botanisiren mit dem Bruder Theodor seine einzige Lust, sein einziges Vergnügen in Zweibrücken gewesen sei. Es fehlte ihm dorten bei seinen Anlagen das selbständige Erkennen durch die Beobachtung von Dingen und Erscheinungen. Von einer solchen einseitigen Ausbildung des Geistes rührt es auch her, dass wir an der studirenden Jugend so oft keinen Sinn für die Beobachtung, ja sogar eine förmliche Abneigung gegen dieselbe wahrnehmen. In der Volksschule wird jetzt, wie ich mit Freuden ersehe, dieser für das Leben so wichtige Sinn in sehr richtiger Weise zu wecken gesucht.

Es war ein günstiges Geschick, dass sein um 11 Jahre älterer Bruder Theodor nach Zweibrücken kam; derselbe, ein ganz vorzüglicher Lehrer, führte ihn in ein geregeltes Studium der Naturwissenschaften ein, indem er ihn selbst unterrichtete und ihm Bücher über Botanik, Physik und Chemie gab und Exkursionen mit ihm machte. Der in Zweibrücken lebende treffliche Bryologe Bruch lenkte die Aufmerksamkeit von Theodor auf die Mooswelt und dadurch auch die von Wilhelm. Auch war ihm damals eine geognostische Karte der Pfalz in die Hand gekommen, die er eifrig mit der Natur verglich. Da kam (1842) ein Gast in das Bruch'sche Haus nach Zweibrücken, der Naturforscher Karl Schimper, welcher einen bestimmenden Einfluss auf Gümbel ausübte. Schimper war von München, wo er seit der Mitte der dreissiger Jahre lebte, nach der Pfalz übergesiedelt. Der damalige Präsident der Akademie Schelling schätzte den geistvollen, von der Naturphilosophie angehauchten Gelehrten sehr hoch und verschaffte ihm einen kleinen Jahresgehalt von dem Kronprinzen Max. Schimper hatte zu dieser Zeit die mathematischen Grundverhältnisse des Pflanzenwuchses, das Gesetz der Blattstellung, der Verzweigung und der Blüthenordnung, entdeckt und dadurch auf die Morphologie der Pflanzen einen umgestaltenden Einfluss ausgeübt; es war ferner von ihm aus den in der Umgegend von München, besonders in Percha bei Starnberg, gefundenen erratischen Blöcken, von anderer Zusammensetzung als die Gesteine der Alpen und Voralpen, zum ersten Male auf eine Eiszeit und ausgedehnte Gletscher in früheren Perioden der Entwicklung der Erde geschlossen worden. Ein Kreis wissbegieriger Schüler war damals in München um ihn versammelt, zu denen auch der später mit Gümbel eng befreundete geistesfrische Botaniker Otto Sendtner gehörte. Schimper's Mittheilungen über geognostische Verhältnisse machten auf Gümbel einen solchen Eindruck, dass er beschloss, sich der Geognosie und dem Bergwesen zu widmen, während er früher unter dem Einfluss seines Bruders geneigt war sich der Botanik zuzuwenden, in der er schon die eingehendsten Kenntnisse besass.

Nachdem (1843) das Gymnasium mit der Note „vorzüglich würdig“ absolvirt worden war, bezog Gümbel zunächst die Universität München, um Naturwissenschaften und Bergbaukunde zu studiren. Ein Empfehlungsschreiben seines Bruders führte ihn bei Martius ein, der ihn weiter empfahl und ihm allzeit ein wohlwollender Gönner blieb. Er hörte Vorlesungen über Botanik (bei Martius und Zuccarini), über Chemie (bei Buchner und Kaiser), über Mineralogie (bei Fuchs und Kobell), über Zoologie (bei Wagner) und über Geognosie, Bergbaukunst und Hüttenwesen (bei Schafhäutl). Er war jedoch in diesen Wissenschaften schon so weit voraus, dass die herkömmlichen Vorlesungen nicht von sehr grossem Gewinn für ihn waren. Mehr lernte er durch das Studium der Natur; eine von Schimper geognostisch illustrirte Meyer'sche Alpenkarte, die er als Viaticum mit nach München erhalten, wies ihm bald den Weg in die Alpen, wo er werthvolles Material sammelte. Mit Sendtner machte er gemeinschaftliche Moosstudien und Exkursionen. Noch als Student (1845) stellte er eine noch jetzt werthvolle geognostische Karte von Bayern her, indem er in die hydrographische Karte des Generalquartiermeisterstabs von 1834 die geognostischen Formationen, so weit sie bis zu diesem Zeitraum bekannt waren, mit dem grössten Fleisse und mit Benützung aller nur aufzutreibenden Hilfsmittel, malte.

Das Wintersemester 1847—48 brachte er an der Universität Heidelberg zu, woselbst die drei berühmten Forscher, Leonhard, Blum und Bronn, seine Lehrer in der Mineralogie, Geologie und Paläontologie waren, zu denen er in nähere Beziehungen trat.

Die Ferien, welche er im elterlichen Hause verlebte, benützte er zu geognostischen Studien, wobei im Jahre 1846 die erste wissenschaftliche Abhandlung des 23 jährigen Studenten: „geognostische Bemerkungen über den Donnersberg“ entstand. Durch dieselbe erregte er die Aufmerksamkeit des Oberberghauptmanns von Dechen in Bonn, des damaligen besten Kenners der geologischen Verhältnisse des rheinischen Gebietes, der den jungen vielversprechenden Gelehrten, wo er nur konnte, in

seinen Bestrebungen unterstützte; in einem regen Briefwechsel berichtete der Jüngere stets über den Fortgang seiner Arbeiten.

Nachdem Gümbel (1848) das bergmännische Staatsexamen mit Auszeichnung bestanden hatte, trat er in die Praxis des Bergwesens als Berg- und Salinen-Praktikant in dem pfälzischen Steinkohlenbergwerke zu St. Ingbert ein, woselbst er manche neue Anregungen empfing und namentlich praktische Erfahrungen sammelte. Zwei Jahre darauf erhielt er die Funktion als Markscheider am k. Bergamt zu St. Ingbert.

An unserer Akademie war im Jahre 1849 auf Anregung des Königs Max II. eine grosse Kommission zur naturwissenschaftlichen Untersuchung Bayerns, in welcher den Herren Schafhäutl, Kobell und Wagner die geognostischen Arbeiten übertragen waren, eingesetzt worden. Zu diesen Arbeiten kam nun Gümbel in Beziehung. Die Regierung der Pfalz stellte, vermuthlich auf Dechen's Betreiben, bei dem Ministerium den Antrag, den Praktikanten Gümbel eine geognostische Untersuchung der Pfalz machen zu lassen, und das General-Conservatorium bezeichnete auf eine Anfrage des Ministeriums Gümbel als vorzüglich geeignet dazu. Die Empfehlung ging von Schafhäutl aus, der ihn auch noch später (1851) in der Vorrede zu seinen geognostischen Untersuchungen des südbayerischen Alpengebirges als sehr talentvoll bezeichnete. So genehmigte (1849) das Ministerium laut einem Schreiben des General-Conservatoriums an den Praktikanten Gümbel, dass er, im Anschlusse an die naturwissenschaftliche Untersuchung Bayerns, eine Reise durch die Pfalz zum Zweck geognostischer Untersuchungen unternehme; er habe ein Tagebuch vorzulegen sowie eine geognostische Suite der in der Pfalz vorkommenden Gebirgsarten zu sammeln und diese der Staatssammlung zu übergeben, auch sich mit Herrn Schafhäutl in brieflichen Verkehr zu setzen. Die Mittel (150 fl.) wurden auf den Etat der Akademie angewiesen. Es findet sich noch sein damaliger Bericht über die von ihm in den Jahren 1850—1851 unternommenen Reisen in den Akten der Akademie vor; derselbe verrieth so ungewöhnliche theoretische und praktische Kenntnisse,

dass das besondere Talent und der Werth des Praktikanten nicht verborgen bleiben konnte. Er hatte ausserdem im Jahre 1850 eine bemerkenswerthe Abhandlung über die Quecksilbererze in dem Steinkohlengebirge der Pfalz geschrieben; die damals noch in regem Betriebe befindlichen Gruben zu Mörsfeld, Wolfstein, Stahlberg und Moschellandsberg waren berühmte Fundstätten des rothen Zinnobers mit den glänzenden Kügelchen des regulinischen Quecksilbers sowie der zu den herrlichsten Bildungen des Mineralreichs gehörigen flächenreichen Krystalle des Silberamalgams.

Mittlerweile hatte sich die Unzulänglichkeit der akademischen geognostischen Kommission für die Lösung ihrer Aufgabe ergeben: es mangelte an einer einheitlichen Leitung und auch an Mitteln. Da stellte (1850) der Abgeordnete v. Hermann, unser Mitglied und späterer Staatsrath, der mit scharfem Blick die Bedeutung einer genauen Kenntniss der geognostischen Beschaffenheit des Landes für die Finanzen erkannt hatte, in der Kammer der Abgeordneten den Antrag, eine geognostische Durchforschung Bayerns in grösserem Stile und mit grösseren Mitteln durch eigens dafür bestellte Organe vorzunehmen; die Kammer bewilligte dafür die Summe von 10 000 fl. jährlich, welche aber die Kammer der Reichsräthe auf 5000 fl. reduzirte. In Folge davon erhielt (1851) die damalige General-Bergwerk- und Salinen-Administration den Auftrag, durch besondere Hilfsarbeiter die geognostische Detailaufnahme des Landes vornehmen zu lassen.

Zur Lösung der wichtigen Aufgabe konnte man keinen besseren finden als Gümbel, welcher alsbald als Praktikant an die Administration einberufen wurde, um als leitender Geognost mit 6 Gehilfen die Aufnahmen zu machen.

Die geognostische Untersuchung Bayerns bietet ungemein viel des Interessanten, aber auch grosse Schwierigkeiten, abgesehen von den zu den mühevollsten Leistungen gehörigen Detailaufnahmen, denn es finden sich in diesem Lande auf kleinem Flächenraum sämmtliche Formationen, welche am Aufbau der Erdrinde betheiligt sind.

Als erstes Feld der Untersuchung wurde die nördliche Oberpfalz und der Rand des bayerischen Waldes, das östliche Grenzgebirge gegen Böhmen, in Angriff genommen. In vier Sommern (1851—54) waren über 2500 Steuerkataster-Blätter dieses Gebietes aufgenommen. Die Resultate der Aufnahme wurden erst im Jahre 1868 veröffentlicht, worauf wir noch zurückkommen werden.

Der leitende Geognost blieb jedoch zunächst der einer Aufsichts-Kommission untergeordnete Praktikant, welche aus dem Vorstand der Administration, einem Oberbergrathe und den drei Akademikern, Schafhäutl, Kobell und Wagner, als Beirath und zur Mitwirkung, bestand. Die Leitung der Untersuchung, die Bearbeitung und Veröffentlichung der Resultate war dieser Kommission übertragen, deren Mitglieder die Arbeiten Gümbel's zwar revidiren sollten, sich aber wenig darum kümmerten. Die Organisation war wohl keine glückliche zu nennen, wenigstens wusste keines der Mitglieder der Kommission, wo es seine Kraft am wirksamsten anzuwenden habe, und Gümbel war in der freien Bewegung vielfach gehindert.

In dieser untergeordneten Stellung blieb Gümbel 5 Jahre lang, obwohl er das ganze Unternehmen in Gang hielt. Er hatte zwar mittlerweile (1853) die erste pragmatische Anstellung als k. Bergmeister erhalten, aber noch im Jahre 1855 belehrte ihn die Administration, dass er als besoldeter Beamter die auf ärarische Kosten gemachten Arbeiten nicht als die seinigen zur Geltung bringen, sondern von dem Material nur zu dienstlichen Zwecken Gebrauch machen dürfe; und noch im Jahre 1856 sandte die Administration die Zusammenstellung der von Gümbel im Allgäu gemachten Beobachtungen zur Einsicht und allenfallsigen Erinnerungsabgabe an Schafhäutl.

Erst mit dem Eintritt des Staatsraths v. Hermann als Vorstand der Administration (1855), der den Fortgang des grossen Unternehmens mit dem regsten Interesse verfolgte und Gümbel förderte, so viel er vermochte, änderte sich die Sache. Im Jahre 1856 wurde die Aufsichts-Kommission aufgehoben und Gümbel die ganze Aufnahme mit der Bearbeitung der Ver-

öffentlichungen, allerdings noch unter Respicienz seiner Behörde, selbständig übergeben und seine Sparte als geognostisches Bureau der obersten Bergbehörde angegliedert. Vorher (1855) war schon die geognostische Untersuchung an der Akademie dem Conservator Schafhäutl entzogen worden, um nicht das Gleiche durch zwei Stellen bearbeiten zu lassen.

Jetzt erst vermochte Gümbel seine ganze Kraft zu entfalten und es war ihm nun seine eigentliche Lebensaufgabe, die geognostische Untersuchung Bayerns, geworden, welche er von da an wie ein heiliges Vermächtniss durch 44 Jahre bis zu seinem letzten Athemzuge mit aller Kraft durchführte; er blieb stets die Seele der Untersuchung und gab ihr die Richtung und die Ideen. Es war ihm zwar nicht vergönnt, das gewaltige Werk zum völligen Abschluss zu bringen, jedoch ist der weitaus grösste und schwierigste Theil vollendet und für die noch fehlenden Gebiete, für Unterfranken, für die von Anderen schon vielfach untersuchte Rheinpfalz und für einen schmalen Streifen der südbayerischen Hochebene, sind die Vorarbeiten so weit vorgeschritten, dass die Aufnahmen und die Einzeichnungen in die Karten in einigen Jahren zum Abschluss gelangen werden.

Sobald Gümbel mit der Aufnahme in der Oberpfalz fertig war, erhielt er (1854) durch das Ministerium, offenbar auf sein Betreiben, den Auftrag, die geognostische Untersuchung der bayerischen Alpen in Angriff zu nehmen, welche unstreitig den schwierigsten Theil seiner Aufgabe bildete. Es ist charakteristisch für den jungen wissensdurstigen Forscher, dass er durch die entgegenstehenden Schwierigkeiten nicht abgeschreckt, sondern im Gefühle seines Könnens angelockt wurde, die höchst interessanten und verwickelten Verhältnisse der Alpen aufzuklären.

Die Geologie der Alpen war, als sie Gümbel Anfangs der fünfziger Jahre in Angriff nahm, nur wenig untersucht und nur wenig bekannt. Man bezeichnete alle kalkigen und dolomitischen Gesteine der Nordalpen als Alpenkalk und wusste

nichts von der Mannigfaltigkeit der Gliederung und Zusammensetzung derselben.

Es hatten zwar schon Leopold v. Buch und Schafhäutl Untersuchungen der bayerischen Kalkalpen angestellt und in denselben charakteristische Versteinerungen gefunden und auch daraus auf die Anwesenheit verschiedener Formationen in denselben geschlossen, aber sie waren nicht zu einer näheren Kenntniss der Verbreitung dieser Formationen und des Aufbaues des Alpengebirges gelangt.

Namentlich hatte sich der talentvolle und originelle Schafhäutl bemüht eine Einsicht zu erhalten; aber da er in der Geognosie Autodidakt war und das, was von Anderen gelehrt wurde, nicht genügend kannte und schätzte, so war die Deutung seiner Beobachtungen häufig verfehlt; unbekümmert um die harte Kritik von allen Seiten setzte er seine Untersuchungen fort und war nicht abzubringen von dem einseitigen theoretischen Standpunkt der damals hauptsächlich durch Fuchs vertretenen neptunistischen Theorie; er wollte die geognostischen Phänomene auf chemische Vorgänge zurückführen und die Geologie auf chemische Experimente stützen. Er hat sich jedoch durch seine an wichtigen Resultaten reichen Untersuchungen der bayerischen Alpen unbestreitbare Verdienste erworben, namentlich durch die Entdeckung der zahlreichen merkwürdigen Versteinerungen, der sogenannten Nummuliten, in denselben und durch die Auffindung besserer Hilfsmittel zur Unterscheidung der einzelnen Arten. Aber er war in der Unterscheidung der Arten wenig glücklich, da er sie nur nach oberflächlicher Formähnlichkeit beurtheilte; er kam so zu dem von den Wahrnehmungen Anderer abweichenden Ergebnisse, dass in den Schichten der Alpengesteine die sonst verschiedenen Formationen zugeschriebenen Spezies von Versteinerungen mit einander vermengt vorkämen und desshalb nicht zur genauen Gliederung und Altersbestimmung benützt werden dürften. In Folge dieser irrigen Artenbestimmung und zu weit gehender Berücksichtigung der physikalisch-chemischen Gesteinsbeschaffenheit wurde das Verschiedenartigste in e i n e Reihe zusammen-

geworfen und dann wieder unmittelbar Zusammengehöriges weit auseinander gerissen.

Man ersieht daraus, dass Gümbel in den bayerischen Alpen alles noch unaufgeklärt fand und zunächst beginnen musste, zur orientirenden Voruntersuchung für die spätere Detailaufnahme selbst zu beobachten; in den österreichischen Alpen waren vorher von F. v. Hauer und in den schweizerischen Alpen von Escher von der Linth Forschungen gemacht worden.

Dies geschah nun mit einem Fleisse, einer Energie, einer Feinheit der Beobachtung und einer Sachkenntniss, die wahrlich unübertroffen dastehen. Nur die Begeisterung für die Wissenschaft und der Drang nach Erkenntniss vermochten den Anforderungen an die körperliche und geistige Leistungsfähigkeit zu genügen und die Schwierigkeiten zu überwinden, welche der enorm verwickelte Aufbau der Alpen und die mannigfaltigen Versteinerungen der Sedimentärgesteine der Erklärung entgegenstellen. Die gewöhnlichen Wege der Touristen und Führer boten zumeist nicht das zur Beobachtung nöthige blossgelegte Gestein; er musste sich selbst die Pfade in den entlegensten Schluchten, den gefährlichsten Abhängen und Rinnsalen suchen. Von früh bis spät kletternd, unbekümmert um die Unbilden der Witterung und zufrieden mit der dürftigsten Unterkunft und Nahrung, häufig allein oder nur von einem halbwüchsigen Burschen als Träger begleitet, zeigte der nicht besonders kräftig gebaute, später häufig an Katarrhen und Verdauungsbeschwerden leidende Forscher eine Ausdauer in Ertragung von Strapazen und eine Kühnheit in Ueberwindung schwer zugänglicher Stellen, dass es öfter unmöglich war, Begleiter zu finden, welche solchen Anstrengungen auf die Dauer gewachsen waren. Dabei hat er tausende von Höhenmessungen selbst ausgeführt, später zur ersten Orientirung über die Lage der Gesteinsschichten sich der Photographie bedient und die in nächster Beziehung zu der geognostischen Unterlage stehenden Steinflechten beobachtet, von denen er neue Fundorte und neue Arten feststellte. Ich habe noch im Jahre 1893 den Siebenzig-

jährigen im Wettersteingebirge gesehen, wo er zur Revision seiner älteren Beobachtungen am frühesten Morgen aufbrach und Abends schwer bepackt mit Gesteinen von der Wanderung zurückkehrte. Es war keine Uebertreibung, wenn er behauptete, wo eine Gemse hin käme, da komme er auch hin. Trotz viel beschwerlicherer Besteigungen war er niemals auf dem Gipfel der Zugspitze, da es dorten für ihn geologisch nichts zu suchen gab und er mit seiner Zeit sparsam sein musste. Eine Wanderung in diesen Gegenden mit dem kenntnissreichen Manne bot einen hohen Genuss; diejenigen, welche die Berge nur ersteigen, um die Schönheit der Natur zu bewundern oder ihre Kräfte zu stählen, ahnen zumeist nicht, welche Fülle von Beobachtungen hier über die Entstehung der grotesken Formen der Alpen zu machen sind und was die Steine für den Kundigen von den vergangenen Jahrtausenden predigen, aber auch nicht, welche unsägliche Mühe und welcher Scharfblick dazu gehören, diese Entwicklungsgeschichte zu entwirren. Ich erinnere mich, wie er mir bei einem Spaziergange am Fusse des Kramerberges nächst Garmisch in einem Gerölle, das eine Seitenmoräne eines ehemaligen Gletschers bildete, Urgebirgsgesteine zeigte, welche nur aus dem entfernten Oberinnthal im Engadin stammen konnten und durch einen Seitenzweig aus dem mächtigen Innthalgletscher hergetragen worden waren.

Gümbel fing im Herbst 1854 im Westen mit dem Allgäu seine Beobachtungen der bayerischen Alpen an und durchforschte dieselben in den Sommermonaten in der Richtung nach Osten, unter Berücksichtigung der angrenzenden Gebiete von Vorarlberg, Tirol und Salzburg; im Winter wurde dann das grosse Material gesichtet, ausgearbeitet und in die Karten eingetragen.

Das Hochgebirge stellte sich als ein schwer entwirrbarer Knäuel durcheinander geworfener, ganz fremdartiger Gebilde, mit einer von den anderen Gebirgen sehr abweichenden Folge der Gesteine, dar. Die ursprünglich horizontal im Meere abgelagerten Sedimentgesteine sind durch enorme Kräfte, in Folge von inneren Spannungen bei der säkulären Abkühlung der

öffentlichungen, allerdings noch unter Respicienz seiner Behörde, selbständig übergeben und seine Sparte als geognostisches Bureau der obersten Bergbehörde angegliedert. Vorher (1855) war schon die geognostische Untersuchung an der Akademie dem Conservator Schafhäutl entzogen worden, um nicht das Gleiche durch zwei Stellen bearbeiten zu lassen.

Jetzt erst vermochte Gümbel seine ganze Kraft zu entfalten und es war ihm nun seine eigentliche Lebensaufgabe, die geognostische Untersuchung Bayerns, geworden, welche er von da an wie ein heiliges Vermächtniss durch 44 Jahre bis zu seinem letzten Athemzuge mit aller Kraft durchführte; er blieb stets die Seele der Untersuchung und gab ihr die Richtung und die Ideen. Es war ihm zwar nicht vergönnt, das gewaltige Werk zum völligen Abschluss zu bringen, jedoch ist der weitaus grösste und schwierigste Theil vollendet und für die noch fehlenden Gebiete, für Unterfranken, für die von Anderen schon vielfach untersuchte Rheinpfalz und für einen schmalen Streifen der südbayerischen Hochebene, sind die Vorarbeiten so weit vorgeschritten, dass die Aufnahmen und die Einzeichnungen in die Karten in einigen Jahren zum Abschluss gelangen werden.

Sobald Gümbel mit der Aufnahme in der Oberpfalz fertig war, erhielt er (1854) durch das Ministerium, offenbar auf sein Betreiben, den Auftrag, die geognostische Untersuchung der bayerischen Alpen in Angriff zu nehmen, welche unstreitig den schwierigsten Theil seiner Aufgabe bildete. Es ist charakteristisch für den jungen wissensdurstigen Forscher, dass er durch die entgegenstehenden Schwierigkeiten nicht abgeschreckt, sondern im Gefühle seines Könnens angelockt wurde, die höchst interessanten und verwickelten Verhältnisse der Alpen aufzuklären.

Die Geologie der Alpen war, als sie Gümbel Anfangs der fünfziger Jahre in Angriff nahm, nur wenig untersucht und nur wenig bekannt. Man bezeichnete alle kalkigen und dolomitischen Gesteine der Nordalpen als Alpenkalk und wusste

In einem Briefe an den berühmten Wiener Geologen Franz v. Hauer berichtete Gümbel damals im Gefühle seiner Leistung und in der Begeisterung über die erhaltenen neuen Erkenntnisse: es wäre ihm gelungen, die einzelnen geognostischen Gebirgsglieder durch den ganzen Zug der Alpen zwischen dem Bodensee und Salzburg Berg für Berg verfolgend nachzuweisen und zu zeigen, wie diese in ihrem Fortstreichen abändern; indem sich die an einem Punkte ganz schwachen Schichten an anderen Orten mächtig entwickeln oder ganz neue Zwischenschichten sich einschieben, anderntheils die in den Alpen höchst trügerische Gesteinsbeschaffenheit nach und nach sich umgestaltet, entständen jene schwierigen Verhältnisse, welche in den Alpen so oft Hindernisse waren, sich zu orientiren.

Schon nach der verhältnissmässig kurzen Zeit der Aufnahmen während sechs Sommern war er (1861) im Stande die erste Abtheilung der geognostischen Beschreibung des Königreichs seine „geognostische Beschreibung des bayerischen Alpengebirges und seines Vorlandes" (mit fünf grossen colorirten Kartenblättern) in einem starken Bande herauszugeben.

Dieses erste grössere und umfassende Werk über die nördlichen Kalkalpen, bis ins kleinste Detail geognostisch beschrieben, bildet die wichtigste Grundlage für die geologischen Verhältnisse derselben. Es enthält eine Fülle neuer Beobachtungen und Feststellungen und hat das Verständniss des Aufbaues dieses Gebirges gebracht. Es ist der grösste Fortschritt in der Auffassung des so verwickelten Gebirgsbaues der Alpen und wird für alle Zeiten eine Norm für die Art der Behandlung einer geognostischen Uebersichtsbeschreibung bilden.

Gümbel hatte die grosse Genugthuung, dass die im Jahre 1857 in dem Gebirge von Nordtirol Aufnahmsarbeiten vornehmende österreichische Kommission von Geologen, unter denen v. Hauer, Richthofen, Pichler, Escher von der Linth, Andriani, Bernhard Cotta waren, alle wesentlichen Ergebnisse seiner Forschungen bestätigen konnte. Dieselben machten zum Theil mit ihm gemeinschaftliche Begehungen behufs Feststellung der geognostischen Horizontale, und an der östlichen Grenze

Erde, bis zu den beträchtlichen Höhen der Alpen emporgehoben und dabei die Schichten vielfach zusammengebogen, gefaltet und geknickt worden. Es war die schwierigste und wichtigste Aufgabe diese gehobenen Gesteine der Kalkalpen in die ausserhalb derselben in der tiefen Lage jenseits der Donau im Jura und Kreideland unterscheidbaren Formationen von gleichem Alter zuzutheilen und einzureihen. Dies geschieht, indem man aus den Schichtenstellungen, aus der Aufeinanderfolge mannigfacher Gesteinslagen, aus dem gleichen oder ungleichen Verhalten innerhalb bestimmter Grenzen ihrer Ausbildung bei gleichem Alter der Entstehung und aus den darin eingeschlossenen successiven Generationen von Organismen die Geschichte dieser Erdrevolutionen abliest. In den Alpen sind nun die Schichten, wie sie im Frankenjura und an der Donau vorkommen, durch ganz abweichende Gesteinsbildungen ersetzt, als ob beide Gebiete von jeher von einander geschieden gewesen wären; es finden sich darin in den gleichaltrigen Bildungen wesentlich andere Thiere eingeschlossen als in den ausseralpinen Gebieten, so dass in den einstigen Meeren, aus welchen sich die Formationen der Kalkalpen ablagerten, eine andere Thierwelt gehaust haben muss als in den ausseralpinen Meeren. Eben durch diese durchgreifenden geognostischen Verschiedenheiten der alpinen und ausseralpinen Gebilde war es so schwierig ihre Beziehungen aufzuklären; die Differenz ist dadurch bedingt, dass zur Sekundärzeit ein trennender Urgebirgsrücken zwischen den Alpen und dem nördlichen Gebirge, da wo jetzt die bayerische Hochebene liegt, eingeschoben war, der sich von dem ostbayerischen Urgebirgsstocke bei Passau abzweigt und quer durch die Hochebene gegen den Tödi in der Schweiz ging, aber jetzt unter dem verdeckenden Alluvialschutt verstürzt liegt.

Der Hauptgewinn der Untersuchung der Alpen war also der, dass genauer und schärfer, als es bis dahin möglich war, die Parallele zwischen alpinen und ausseralpinen gleichzeitigen Bildungen gezogen wurde und auf der einen Seite die Analogien, auf der anderen die Differenzen erkannt wurden.

im Wesentlichen die Urgebirgsdistrikte der Oberpfalz und von Niederbayern, dazu westwärts Theile der hier dem Urgebirge in meist schmalen Streifen angelagerten jüngeren Sedimentärgesteine in erstaunlicher Mannigfaltigkeit. Hier lagen die Verhältnisse ganz anders wie in den Alpen; denn gegenüber den versteinerungsführenden Sedimentärgesteinen und der so ungemein verwickelten Tektonik der letzteren fand er im bayerischen und oberpfälzer Wald krystallinisches Urgebirge mit Gneiss, Granit, Glimmerschiefer und Urthonschiefer. Bis dahin war noch kein grösserer Urgebirgsdistrikt mit gleicher Ausführlichkeit und Gründlichkeit untersucht worden und es gehören die Ergebnisse ebenfalls zu den gewinnbringendsten für die Wissenschaft. Er musste sich hier zuerst über die schwierige Frage klar werden, in welcher Weise der Gneiss und die krystallinischen Schiefer entstehen, wie sie sich zu den alten Massengesteinen des Granits, Syenits, Diorits etc. verhalten, ehe er untersuchen konnte, in welcher Weise sich diese krystallinischen Gesteine aufgebaut haben. Er kam dabei zu der von dem französischen Geologen Daubrée zuerst ausgesprochenen Ansicht, dass alle diese Gesteine durch den mächtigen Einfluss überhitzten Wasserdampfes entstanden sind. Darnach soll sich aus der in breiartigem Zustande befindlichen und von überhitztem Wasser durchtränkten Rinde der Erde der Gneiss als erstes und ältestes Sedimentgestein krystallinisch ausgeschieden haben. Indem sich so im Laufe der Zeit die Lösung der Gesteinsmaterialien mannigfach verändert, kommt, ähnlich wie der Gneiss, der Wechsel und die Aufeinanderfolge der Schichten von Glimmerschiefer, Thonschiefer, Chloritschiefer etc. zu Stande. Darnach stellen sich die Urgebirgsmassen ebenso streng geordnet und reich gegliedert dar wie die später gebildeten Sedimentschichten; es gelang zum ersten Male eine genaue Gliederung der Schichtencomplexe eines ausgedehnten Urgebirgsterritoriums mit einer bestimmten Ordnung in der Reihenfolge und in der Zusammengehörigkeit darzuthun. Die granitischen Gesteine sind nach ihm nichts Anderes als Massen von Gneiss in Form von Stöcken, Lagern und Gängen, welche

in breiartigem Zustande emporgestiegen sind und sich zwischen und in die Schiefersedimente eingedrängt haben. Diese Theorie Gümbel's von der diagenetischen Entstehung der ältesten Schiefergesteine hat allgemeine Geltung erlangt. Er ist hier mit seiner Aufgabe gewachsen, und er steht unübertroffen da in der Genauigkeit der Untersuchung und der Nüchternheit und Bedeutung der Schlussfolgerungen. —

Der dritte im Jahre 1879 erschienene Band seines grossen Werkes enthält die Beschreibung des Fichtelgebirges (1860—64). Der Gebirgsstock des Fichtelgebirges ist ein Knotenpunkt der Gebirgsverschlingung im innersten Theile Europas: zwei mächtige Gebirgssysteme begegnen und durchkreuzen sich hier. Die Untersuchung gestaltete sich wiederum äusserst schwierig und mühevoll durch die verwickelten, vielfach gestörten Lagerungsverhältnisse, die Mannigfaltigkeit der im Urgebirge auftretenden Eruptivgesteine und den eigenartigen Charakter der älteren Sedimentbildungen mit ihren charakteristischen, wenn auch spärlichen, organischen Einschlüssen. Es finden sich darin zahlreiche Lagerstätten nutzbarer Mineralien sowie alte Erzlagerstätten als Erbschaft des benachbarten Erzgebirges. —

Daran schloss sich endlich als vierte Abtheilung die im Jahre 1891 veröffentlichte Beschreibung des Frankenjura an. Der Frankenjura und das fränkische Triasgebiet gehören grossen Theils einer Tiefseeablagerung an, die in ihrer Lagerung nur wenig gestört ist. Die mit den Alpengesteinen gleichaltrigen Bildungen breiten sich wie im Hochgebirge aus, aber wie schon vorher gesagt, in ganz anderer Gesteinsbeschaffenheit und zum Theil mit ganz anderen organischen Einschlüssen. Das Triasgebirge, namentlich das Keupergebiet, war ursprünglich am Beckenrande höher aufragend, aber durch die Auswaschungen und Zerstörungen der Jahrtausende hat sich das ältere Triasgebirge erniedriget, während der widerstandsfähige Jurakalk sich als festes Felsgerippe besser erhielt und jetzt hoch über den Keuper aufragt. Von besonderem Interesse ist auch der erloschene grosse Vulkan im Ries. Ferner die Steinbrüche in Solnhofen, welche nicht allein werthvolles Material

für bauliche Zwecke und für die Lithographie liefern, sondern auch für die Wissenschaft von grösster Bedeutung geworden sind durch die Fülle der in ihnen eingeschlossenen wundervollen Reste merkwürdiger Thiere und Pflanzen aus alter Zeit. Hierher gehört auch die Darstellung der fränkischen Schweiz mit ihren grotesken Höhlen und Dolomitfelsen. Auch dieser vierte Theil brachte für die Wissenschaft wichtiges Material und vielfache Aufklärung über das süddeutsche Jura- und Keuper-Gebiet.

Durch dieses sein Lebenswerk der geognostischen Beschreibung Bayerns, gleich ausgezeichnet durch die darin enthaltenen Thatsachen wie durch die Form und Klarheit der Darstellung, hat sich Gümbel ein unvergleichliches Denkmal errichtet. Dasselbe wird für alle Zeiten die Grundlage der geognostischen Darstellung Bayerns bleiben und überhaupt ein Quellenwerk ersten Ranges für die geologische Forschung bilden. Obwohl er dabei von tüchtigen und getreuen Hilfskräften unterstützt wurde, so gab er doch in seiner Gewissenhaftigkeit nichts hinaus, was er nicht selbst gesehen und geprüft hatte, so dass die geognostische Untersuchung von Bayern den Vorzug besitzt von einem Mann und aus einem Gusse geschaffen zu sein. Kein Land besitzt eine so consequent durchgeführte und einheitliche Darstellung seiner geognostischen Verhältnisse. Die Detail- und Original-Aufnahmen wurden in die Blätter der bayerischen Steuer-Kataster-Vermessung, welche im Maassstab von 1 : 5000 hergestellt sind und sich zu geognostischen Aufnahmen nirgends passender finden, eingetragen; hierin, in dem grossen Karten-Maassstab für die erste Aufnahme, liegt der Schwerpunkt der geognostischen Landesuntersuchung in Bayern; diese Blätter, von denen über 6600 ausgearbeitet vorliegen, stellen die eigentliche geognostische Grundkarte dar. Nach ihr wurden die Karten für die geognostische Beschreibung im Maassstabe von 1 : 100 000 angefertigt. Letzterer Maassstab ist für die heutigen Anforderungen allerdings zu klein und es fehlen auch in den Karten die Berg-Zeichnungen und Kurven, aber es können aus der Grundkarte

grössere, auch für praktische Zwecke, z. B. für die Landwirthschaft verwendbare Spezialkarten, im Maassstabe von 1 : 25 000 wie in den übrigen deutschen Staaten hergestellt werden.

Es ist von mehreren Seiten tadelnd geäussert worden, die Arbeiten Gümbel's hätten nach Methode und Inhalt sowie wegen ungenügendem Auseinanderhalten der thatsächlichen Beobachtung und der daran geknüpften Folgerungen in sehr vielen Einzelheiten Berichtigungen erfahren und würden sie noch weiter erfahren; auch bliebe der Einzelforschung noch ein reiches Feld zum Ausbau des Wissens im Sinne der fortschreitenden Wissenschaft. Aber ist dies nicht für Jeden, der den Gang und die Geschichte der Wissenschaft kennt, etwas Selbstverständliches: denn wo ist der Göttliche, der bei seinem hohen Streben niemals geirrt und das Wissen in irgend einem Gebiete zum völligen Abschluss gebracht hat? Niemand hat mehr seine menschliche Unzulänglichkeit gefühlt als Gümbel selbst. Gerade jenes Hervorheben der Irrung nur in Einzelheiten ist das grösste Lob für Gümbel's Verdienste und zeigt, wie weit er im Grossen bahnbrechend gewirkt hat.

Ehe ich auf die weiteren wissenschaftlichen Arbeiten Gümbel's eingehe, muss noch erwähnt werden, wie sich seine äussere Stellung in Folge seiner Wirksamkeit entwickelte. Von Anfang an trieb ihn seine Neigung zu wissenschaftlicher Thätigkeit, er wollte ein Gelehrter und ein Forscher in der Wissenschaft werden, und nicht nur als ein Praktiker, der die Lehren der Wissenschaft anwendet, gelten. Er hat sich diesen Ehrentitel mit Anstrengung aller seiner Kraft erobert und sich bald durch seine wissenschaftlichen Arbeiten zu einem der angesehensten Geologen emporgeschwungen.

Nach dem Erscheinen der geognostischen Beschreibung des bayerischen Alpengebirges wurde er im Jahre 1862 von der Universität Jena in Anerkennung seiner Verdienste um die Geologie honoris causa zum Doktor der Philosophie promovirt.

Gerne hätte er sich ausschliesslich der Wissenschaft, der Forschung und dem Lehramte, gewidmet, aber die Professur

für Geologie an der Universität war besetzt und in späteren Jahren wollte und konnte er seine Stellung im Staatsdienste nicht mehr aufgeben. Im Jahre 1862 wählte unsere Akademie den verdienten Mann zum ausserordentlichen Mitgliede; er fühlte sich dadurch hoch geehrt und thatsächlich als Mann der Wissenschaft anerkannt. Als er auf einer Forschungstour die Nachricht davon erhielt, bricht er in einen wahren Jubel aus und schreibt darüber an seine Frau: „unter dem überwältigenden Eindruck, welche Deine mir noch gestern Abend zugekommene Nachricht auf mich gemacht hat, ergreife ich heute freudigst die Feder, um Dir mitzutheilen, wie sehr mich dies Ereigniss bis ins Innerste meiner Seele ergriffen hat, und es fehlt mir nur Jemand, dem ich, an dieser Freude theilnehmend, aussprechen könnte, was ich empfinde. Ich gestehe, nicht ganz die Eitelkeit überwinden zu können, durch diese Wahl mich für manches Herbe entschädiget zu fühlen, was ich von anderer Seite in letzter Zeit hinnehmen musste. Es ist ein wahrer Anfang und Grundlage eines neuen Lebens, das für mich aufblüht, und ich bin der Zuversicht, dass es mir nicht misslingen wird, das Begonnene richtig weiter zu führen."

Im Jahre darauf wurde Gümbel zum Ehrenprofessor für Geologie und Markscheidekunst an der Universität ernannt, wodurch er das Recht erhielt Vorlesungen zu halten und als Lehrer seine Kenntnisse zu verwerthen; zugleich bekam er den Titel eines k. Bergrathes. Bei Errichtung der technischen Hochschule dahier (1868) wurde ihm der Lehrauftrag ertheilt, an dieser Anstalt Vorträge über Geologie und Geognosie zu halten sowie eine Lehrsammlung anzulegen. Er hat gerne die Lehrthätigkeit ausgeübt, da er erkannte, dass er durch die Vorlesung genöthiget werde sein Fach ganz zu übersehen und seinen Blick zu erweitern. Seine begeisterten Vorträge waren für solche, denen es ernst mit der Sache war, in höchstem Grade belehrend und anregend; seine Kenntnisse waren so gross, dass er in dem Bestreben sein Bestes zu geben, bei dem Unterricht für solche, welche nur einen Ueberblick über die

Geologie thun wollten, vielleicht zu viel brachte; aber er hat zahlreiche dankbare Schüler in die Wissenschaft eingeführt. 1869 wurde er bei der neuen Organisation der Bergbehörden Oberbergrath und Vorstand des Bureaus für die geologische Landesaufnahme, 1879 Oberbergdirektor und Vorstand der obersten Bergbehörde.

Gümbel entwickelte, neben seiner grossen Aufgabe der geognostischen Untersuchung Bayerns, fast auf allen Gebieten der Geologie und Paläontologie eine ungemein vielseitige, fruchtbare wissenschaftliche und schriftstellerische Thätigkeit.

Er war einer der Ersten, der das Mikroscop zur Untersuchung des Gefüges der Gesteine benützte. Mit diesem Hülfsmittel that er an gebogenen und gequetschten Schichten die Wirkungen des Gebirgsdruckes dar, indem er die Plasticität der Gesteine bei der Gebirgsbildung auf eine vollständige Zertrümmerung zurückführte, während man früher eine bruchlose Biegung und Umformung derselben angenommen hatte.

Er untersuchte ferner mit dem Mikroscope die in den Schichten der verschiedensten Zeitalter eingeschlossenen kleinsten versteinerten Skelette der einstigen thierischen Bewohner tiefer Meere und auch die darin befindlichen pflanzlichen Ueberreste. Vor Allem beschäftigte er sich mit den in den Ablagerungen früherer Erdperioden, besonders in dem südbayerischen Nummulitenkalk abgedrückten Wurzelfüssern oder Foraminiferen, diesen einfachsten Thieren mit ihrem nicht selten complizirten Kalkgehäuse, deren lebende Arten den Tiefseeschlamm und den Grund der Meere bewohnen, sowie mit der damit zusammenhängenden Frage nach dem sogenannten Eozoon, welches man als den ältesten bis jetzt bekannten Rest von Organisation betrachtete. Erst in einer der letzten Sitzungen der math.-physikal. Classe der Akademie wurde eine von Gümbel veranlasste, äusserst sorgfältige und werthvolle Untersuchung seines Freundes, des Obermedizinalrathes Dr. Egger über diese niederen Thiere vorgelegt. Zum Vergleiche prüfte er auch eifrig den Tiefseeschlamm, welcher entsprechend ähnliche kleinste Organismen enthält wie die älteren geognostischen Ablagerungen.

Er studirte ferner die von der Challenger-Expedition auf dem Grunde des Meeres gesammelten Manganknollen und verglich damit die Mangan-Ausscheidungen aus Wasser abgesetzter Gesteine. Auch beschäftigte er sich mit den tertiären Diatomeenlagern in der Oberpfalz, den Muschelkrebsen oder Ostracoden, und den sogenannten Milleporen, von denen er nachwies, dass viele derselben nicht Thiere, sondern kalkabsondernde Algen sind.

Indem er durch Einwirkung chemischer Reagentien die durch die Verkohlung undeutlich gewordene feinere Struktur der Pflanzen wieder sichtbar machte, gelang es ihm mit dem Mikroscope die Texturverhältnisse der Steinkohlen zu erkennen und darzuthun, dass die ältesten Steinkohlenflötze aus kryptogamischen Land- und Süsswasserpflanzen bestehen und nicht, wie man geglaubt hatte, aus Meeresalgen.

Ausserdem finden wir von ihm viele wichtige Mittheilungen über nutzbare Mineralien und Gesteine und deren Vorkommen, über Meteoriten, Vulkane, Erdbeben, die warmen Quellen von Bormio, Gastein und Brennerbad.

Seine Freundschaft mit dem leider zu früh verstorbenen Botaniker Sendtner, welcher mit dem gleichen Eifer wie Gümbel die Vegetations-Verhältnisse Bayerns, die Standorte und die geographische Verbreitung der Pflanzen untersuchte, zeitigte manche werthvolle Bereicherungen unseres Wissens; es wurde die Abhängigkeit der Pflanze vom Boden erkannt und so der Botanik und Geognosie genützt, z. B. wurde gezeigt, dass die rostfarbene Alpenrose nur auf Urgestein, die rauhhaarige jedoch auf Kalk vorkömmt.

Auf die Bitten seiner Freunde gab er (1888) seine Vorlesungen, stark erweitert, in einem Lehrbuch der Geologie heraus, worin allgemein die Grundzüge der Geologie dargelegt sind; später (1894) hat er in einem zweiten ungemein werthvollen speziellen Theil seine Erfahrungen über die geologischen Verhältnisse Bayerns zusammengefasst.

Gerne suchte er sein Wissen weiteren Kreisen nutzbar zu machen und allgemeineres Verständniss für die Bedeutung der Geologie zu erwecken. Er lieferte zu diesem Zweck eine An-

leitung zu geologischen Beobachtungen in den Alpen für die Alpenvereine, und ausserordentlich klar geschriebene Aufsätze in die Allgemeine Zeitung, das Ausland und in Westermann's Monatshefte; sehr beachtenswerth sind seine Beiträge zu dem von König Max II. veranlassten Werke „Bavaria", worin er eine instruktive übersichtliche Schilderung der geognostischen Verhältnisse Bayerns in sechs Abhandlungen gab.

Bei seinen Studien widmete er seine Aufmerksamkeit nicht nur dem Aufbau und der Entwicklungsgeschichte der Erdrinde; er knüpfte auch daran Betrachtungen an über den Zusammenhang des geologischen Baues des Landes mit seiner Oberflächengestaltung sowie mit der Pflanzendecke, der Thierwelt und den darauf lebenden Menschen, ihrer ökonomischen und industriellen Entwicklung und ihren psychischen Eigenthümlichkeiten. Recht scharf konnte er sich äussern über solche, welche ohne eingehende Kenntniss der Natur auf ihren Wanderungen sich Gedanken über Land und Leute machen, die der Wirklichkeit häufig nicht entsprächen.

Durch seine Ausbildung in der Technik und seine praktischen Kenntnisse war er wie Wenige befähigt, die Praxis mit der Wissenschaft zu verbinden und auf die Anwendung im Leben aufmerksam zu machen; so finden sich in seinen Werken wichtige Rathschläge und Belehrungen für den Bergmann, den Land- und Forstwirth, den Industriellen, den Ingenieur, Gewerbetreibenden und Hygieniker. Dieses sein technisches Geschick machte sich auch geltend bei der Leitung des Bergwesens, wobei er viele erspriessliche Gutachten über bergmännische Unternehmungen oder über Wasserversorgung abgab. Hierher gehören seine beiden Gutachten über die Kohlenbesitze des Fürsten Thurn und Taxis in der Pilsener Mulde und über die k. württembergischen Salzwerke und Schachtanlagen. Ein besonderes Verdienst erwarb er sich durch seine Betheiligung an den Arbeiten über die verschiedenen Erd- und Gesteinsschichten sowie über die Grundwasserbewegung und die Wasserversorgung Münchens; er war es, der auf die ausgiebigen Mangfallquellen hinwies und dadurch unserer Stadt das beste

und reichlichste Wasser unter allen europäischen Grossstädten zuführte. In dankbarer Anerkennung für diese seine Verdienste verlieh ihm die Stadt im Jahre 1889 das Ehrenbürgerrecht. Der Bürgermeister v. Borscht widmete in einer Magistratssitzung Gümbel einen tief empfundenen, ehrenden Nachruf, in welchem er sagte: Sein Tod bedeutet einen schweren Verlust insbesondere für unsere liebe Stadt München, die ihn zu ihren treuesten Freunden, zu den thatkräftigsten Förderern ihrer socialen Wohlfahrt rechnen durfte. Fast 25 Jahre hindurch hat der Verlebte seine Kraft und sein reiches Wissen unserem Gemeinwesen unermüdlich zur Durchführung einer ihrer wichtigsten Unternehmungen, der städtischen Wasserversorgung, zur Verfügung gestellt. Er war es insbesondere, der unserem unvergesslichen Herrn Bürgermeister Dr. v. Ehrhardt in den schwierigen Vorbereitungen zu diesem gewaltigen Werke nachdrücklichst unterstützte, und durch seine, auf genauesten Messungen und Prüfungen beruhenden Gutachten die mannigfaltigen gegen die Verwendung der Quellen des Mangfallthales geltend gemachten Bedenken entkräftete. Wenn heute die Wasserversorgung Münchens als eine der besten der Welt anerkannt ist, so verdankt die Stadt diesen Ruhm nicht zum Wenigsten der Mitwirkung des Verlebten, der bis zuletzt darauf bedacht war, dieses so unendlich bedeutungsvolle Werk in gedeihlichem Sinne zu fördern und auszubauen. Die Verleihung des Ehrenbürgerrechtes an Herrn v. Gümbel, die im Jahre 1889 anlässlich der Vollendung der städtischen Wasserversorgung auf Grund einstimmiger Beschlüsse der beiden Gemeindekollegien erfolgte, war daher nur der selbstverständliche Ausdruck all des Dankes, den ihm die Stadt für seine unvergänglichen Verdienste um ihr Blühen und Gedeihen für alle Zeiten schuldet. Denn was er für München gethan, das ist mit goldenen Lettern in dessen Geschichte eingetragen. Sein Name wird daher fortleben für immer, auf das Innigste verbunden mit der grossartigen Schöpfung, die er begründen half. Um indessen die Bedeutung dieses durch seinen aufopfernden Bürgersinn, wie durch seine segensreiche Thätigkeit als Ge-

lehrter gleich ausgezeichneten Mannes der Bürgerschaft stets lebendig zu erhalten, beantrage ich, eine hervorragende Strasse nach ihm zu benennen und sein Oelbild in dem Ehrenkabinet des städtischen Museums zur Aufstellung zu bringen."

Das, was Gümbel vor Allem auszeichnete, war eine wunderbar scharfe Beobachtungsgabe, welche ihn im Grossen nur selten irren liess; er sah das Kleinste, verlor aber über dem Einzelnen nicht den Ueberblick über das Ganze und den Zusammenhang der Erscheinungen. Ferner war für ihn charakteristisch seine ungewöhnliche Energie in der Arbeit und sein unermüdlicher Fleiss, der ihn nie unthätig sein liess; selbst die Zeit der Erholung auf dem Lande benützte er zu geognostischen Studien. Er erwarb sich dadurch ein enormes Wissen und durch eigene Beobachtung gewonnenes Können in allen Gebieten der Geologie und ihren Hilfswissenschaften, in der Physik, Chemie, Botanik, Zoologie, Mineralogie etc., welche Jeder bewunderte, der mit ihm umging; er verfolgte mit dem regsten Interesse die Fortschritte in allen Zweigen der Naturwissenschaft. Durch diese Eigenschaften ist er zu dem vielseitigsten, kenntnissreichsten, und verdientesten deutschen Geologen unserer Zeit geworden.

Die Begeisterung für die Wissenschaft und der Drang nach Erkenntniss traten an ihm besonders hervor; er suchte und fand darum in der Arbeit seinen Genuss und sein Glück; für die Vergnügungen und Zerstreuungen der grossen Welt hatte er keine Zeit und keine Lust. Er blieb stets der einfache und genügsame, nur seiner Wissenschaft lebende Gelehrte; allerdings war er sich seines Werthes sehr wohl bewusst.

Solche, die seinen edlen Sinn nicht erkannten, haben ihm einen unersättlichen Gelehrtenehrgeiz vorgeworfen, gegenüber welchem alle anderen menschlichen Regungen und Eigenschaften zurückgetreten seien; sie haben die hinter einer manchmal etwas rauhen Aussenseite verborgene Lauterkeit des Charakters nicht gesehen. Wer so viele Freunde besass und denselben mit so treuer Liebe anhing, wer Jeden, der es mit der Wissenschaft ehrlich meinte, so neidlos anerkannte, wer es so unver-

brüchlich mit der Wahrheit hielt und jeden falschen Schein hasste, wer bei einer seltenen allgemeinen Bildung in der Kunst Genuss fand und wer wie er seiner Familie ein sorgsamer Vater war, der hat wahrlich noch andere menschliche Regungen gehabt, nur hat er sie nicht Jedem preisgegeben. Es ist richtig, er stellte, sowie an sich selbst, so auch an Andere die höchsten Anforderungen und äusserte offen und ohne Rückhalt lebhaft seine Meinung; man hätte aber fühlen können, dass der so hoch stehende Mann allezeit die redlichsten Absichten hatte.

Diese seine Gesinnungen gehen deutlich aus Briefen hervor, in denen er sich offener äussert und welche die Tiefe seines Gemüthes und sein reiches inneres Leben erkennen lassen. So berichtete er z. B. seiner Braut in freudiger Aufregung über seine Arbeiten in den Alpen, wie sich nach und nach das Gebirge in seiner innersten Gestaltung klar vor seinen Sinnen auseinanderlegte, als könnte er in seine tiefsten Tiefen hineinblicken; das sind freilich, so schreibt er, glückliche Genüsse, die jede unsägliche Mühe und Beschwerde als Kleinigkeiten erscheinen lassen. Und in seiner akademischen Festrede resümirt er das Resultat seines Lebens mit den Worten: „Niemand kann es tiefer als ich selbst empfinden, wie Vieles noch fehlt, wie Vieles jetzt noch mangelhaft, wie Manches noch in Zukunft besser zu machen sein wird. Aber das ist ja das Menschliche und zugleich auch Tröstliche in unserem Wirken, dessen Schwäche wir bescheiden zugestehen, ohne dabei jedoch den Muth zu verlieren in unseren Versuchen und Bestrebungen, trotz unserer geringen Kräfte und lückenhaften Leistungen fortzuarbeiten und das Gewonnene zeitweilig zu einem gewissen Abschlusse zu bringen, dass die ewig sich verjüngende Wissenschaft unaufhaltsam über die Leistungen des Einzelnen hinweg zu immer höheren Zielen fortschreitet.“

Am Ende des Jahres 1896 verchlimmerte sich ein schon seit längerer Zeit bestandenes Magenleiden, dem er nach 1½ Jahren erlag. Der todtkranke, auf das Aeusserste geschwächte Mann suchte sich jedoch mit einer geistigen That-

kraft ohne Gleichen aufrecht zu erhalten; er führte die Geschäfte des Oberbergamts fort und beschäftigte sich mit wissenschaftlichen Arbeiten; in der Januarsitzung des Jahres 1898 unserer Classe sandte er noch eine Abhandlung: „Ueber die in den letzten Jahren in Bayern wahrgenommenen Erdbeben" ein, und arbeitete ferner eine Spezialkarte des Wettersteingebirges, welches er in den letzten Jahren während der Herbstmonate aufgenommen hatte, aus. So starb er mit wahrem Heldenmuth in dem Bewusstsein, seine Kraft zum Wohle der Wissenschaft und der Menschheit angewendet zu haben. Mehrmals ersuchte er mich, in der Meinung mich zum letzten Male gesehen zu haben, die Freunde zu grüssen mit der Bitte ihn in gutem Andenken zu behalten. Aber wenn wir schon längst dahingegangen sind, wird sein Name als eines mächtigen Förderers der Geologie fortleben.

Fridolin v. Sandberger.[1])

Nach einer ausserordentlich erfolgreichen Wirksamkeit ist am 11. April 1898, wenige Monate vor seinem besten Freunde und Fachgenossen Wilhelm v. Gümbel, der emeritirte Professor der Mineralogie und Geologie an der Universität Würzburg Fridolin v. Sandberger nach längerem Leiden im 72. Lebensjahre gestorben. Er gehörte seit dem Jahre 1870 als auswärtiges Mitglied unserer Akademie an.

Derjenige Zweig der Naturwissenschaft, den man in früherer Zeit unter der allgemeinen Bezeichnung „Mineralogie" zusammenzufassen pflegte, hat sich in neuerer Zeit in drei selbstständige Glieder vertheilt. Man bezeichnet diese jetzt nur mehr lose mit einander verknüpften Wissenszweige bekanntlich als Mineralogie im engeren Sinne, als Geologie und als Paläontologie. Je mehr sich diese Wissenschaften ausdehnten und vertieften, um so mehr waren ihre Vertreter gezwungen, sich

---

[1]) Mit Benützung der Gedächtnissrede von Prof. Dr. J. Beckenkamp in Würzburg in der Festsitzung der physikal.-mediz. Gesellschaft am 24. November 1898.

bei ihren Forschungen auf eines dieser Fächer zu beschränken; sie haben aber dabei nothwendiger Weise das Allgemeine und das Gemeinsame mehr aus dem Gesichte verloren.

Es gehört daher zu den Seltenheiten noch älteren Gelehrten zu begegnen, welche die bezeichnete Trias der mineralogischen Wissenschaft in ihrer früheren Vereinigung mit ihrem Wissen und Arbeiten ganz umfassten. Zu diesen wenigen Gelehrten der alten Schule im besten Sinne des Wortes, welche, ohne in etwas an Tiefe, Schärfe und Gründlichkeit in ihren Forschungen den jüngeren Spezialisten nachzustehen, die drei Zweige der Mineralogie, Geologie und Paläontologie noch vereinigt auf ihrem Arbeitsfelde bebaut und ganz Hervorragendes geleistet haben, gehört Sandberger. Er war unter seinen Fachgenossen wohl der einzige, welcher auf allen den drei Gebieten fast gleichmässig Bedeutendes und Grundlegendes geschaffen hat.

Sandberger wurde am 22. November 1826 zu Dillenburg in Nassau geboren, woselbst sein Vater Johann Philipp Sandberger Rektor des Pädagogiums war. Bald darauf wurde der letztere als Professor an das Landesgymnasium zu Weilburg an der Lahn berufen; dorten erhielt Fridolin Sandberger seine Ausbildung bis zur Universität. Frühzeitig zeigte der Knabe Neigung und Talent zu der Naturwissenschaft. Diese Neigung wurde geweckt durch den Vater, der sich eingehende Kenntnisse hierin erworben und eine beachtenswerthe naturhistorische Sammlung, namentlich an Mineralien und Versteinerungen, angelegt hatte; diese Sammlung benützte im Jahre 1837 der Geologe Beyrich zu seinen Untersuchungen der nassauischen Schichten. Auch der ältere Bruder Guido Sandberger, welcher Lehrer an der Realschule in Wiesbaden war und sich besonders für die Geologie interessirte, brachte ihm vielfache Anregung; er machte mit ihm Studien und Exkursionen, so dass er bei seinem Uebertritt an die Universität schon gediegene naturwissenschaftliche Kenntnisse besass. An den Universitäten Bonn, Heidelberg, Giessen und Marburg bildete er sich noch weiter in der Mineralogie, Geologie und Paläontologie, sowie in der Botanik und der Zoologie, aus, so dass er bald beginnen

konnte, selbständig in der Natur zu beobachten und wissenschaftlich thätig zu sein.

Schon in seinem 17. Lebensjahre gab er mit seinem Bruder Guido eine Abhandlung über das Vorkommen von Versteinerungen im Rotheisenstein von Weilburg an der Lahn heraus. Es folgten noch während seiner Studienjahre Abhandlungen über das Vorkommen von Mineralien und Versteinerungen sowie über geologische Verhältnisse, wofür sein Heimathland Nassau mit seinen reichen Erzlagern und die Gegend um Bonn so viel Gelegenheit darbot. Als daher der junge Sandberger im Jahre 1846 in Giessen, wo damals Liebig in vollster Thätigkeit war, den Doktorgrad erwarb, hatte er bereits eine Anzahl von wissenschaftlichen Arbeiten veröffentlicht und Zeugniss von seinem ungewöhnlichen Wissen in jenen Disciplinen gegeben.

Dies veranlasste die herzoglich nassauische Regierung, den 23jährigen Jüngling zum Inspektor des naturhistorischen Museums zu ernennen, welches Amt derselbe während 6 Jahren in emsiger und fürsorglicher Thätigkeit verwaltete. Im Jahre 1855 erhielt er einen Ruf als Professor der Mineralogie und Geologie an das unter tüchtigen Männern aufblühende Polytechnikum in Karlsruhe, woselbst er als Lehrer eine bedeutende Wirksamkeit entfaltete; auch leitete er die erste geologische Aufnahme Badens und lieferte vortreffliche geologische Beschreibungen sowie geologische Karten des badischen Schwarzwaldes und des Breisgaus. Als nach dem im Jahre 1863 erfolgten Tode von Rumpf die Professur für Mineralogie und Geologie an der Universität Würzburg zu besetzen war, konnte wohl keinem Besseren die Stelle übertragen werden als Sandberger. Er blieb dieser Hochschule getreu; er übte daselbst eine fruchtbare Thätigkeit als Lehrer und Forscher aus und stellte eine mustergiltige Sammlung, namentlich von unterfränkischen Mineralien, Gesteinen und Versteinerungen, her. Nach der von dankbaren Schülern und Collegen festlich begangenen Feier seines 50jährigen Doktorjubiläums zwang ihn zunehmende Kränklichkeit sein Amt aufzugeben. Er zog in die hiesige Stadt und trat damit in unsere Akademie als

ordentliches Mitglied ein, war aber, an das Zimmer gefesselt, nicht im Stande einer Sitzung der Classe beizuwohnen. Er hat jedoch stets unsere Sitzungsberichte durch bedeutsame Arbeiten bereichert und rege Antheilnahme an den Zwecken unserer Akademie bewiesen. Nach einem Jahre verliess er München wegen Verschlimmerung seines Leidens wieder, um in Würzburg seine letzten Tage zu verbringen.

Sandberger hat eine ungemein fruchtbare wissenschaftliche Thätigkeit entwickelt und eine ausserordentlich grosse Anzahl von Schriften veröffentlicht. Mir obliegt es in einem Ueberblick über seine Werke zu schildern, was er für die Entwicklung seiner Wissenschaft gethan hat und welche Stellung er in derselben einnahm.

Seine erste grössere Publikation war die mit seinem Bruder (1847) verfasste Uebersicht der geologischen Verhältnisse des Herzogthums Nassau. Die Eintheilung der Nassauischen Schichten oder des rheinischen Schiefergebirges konnte früher, bevor man genügende Kenntnisse in der Paläontologie besass, nur petrographisch und nach den Lagerungsverhältnissen gemacht werden. Man bezeichnete diese mächtigen Schichten im paläozoischen Gebiet zwischen dem Urgebirge und der Kohleformation als Uebergangs- oder Grauwackengebirge; man erkannte bald eine Gliederung desselben und schied, auf dem Continent und namentlich auch in England einzelne Stufen aus, aber man war noch nicht ins Klare darüber gekommen, welche Schichten in Nassau den in England aufgestellten Stufen des Cambrium, des Silur und des Devon entsprechen. Die beiden Sandberger untersuchten nun die durch Faltung und Verwerfung sehr gestörten und schwierig zu bestimmenden Schichten der Grauwacke in Nassau genau und mit der grössten Sachkenntniss und bezeichneten die untere sandige Stufe als Spiriferensandstein, die mittlere kalkige als Stringocephalenkalk mit dem Cypridinenschiefer und die obere kohlige als Posidonomyenschiefer. Diese ausserordentlich verdienstvolle Untersuchung, welche durch spätere neue Aufschlüsse nur geringe Veränderungen erfahren hat, erregte in Fachkreisen

grosses Aufsehen und wurde allgemein anerkannt; die geologische Gesellschaft in London stellte 1856 den beiden deutschen Forschern die Wollaston-Medaille und den Ertrag der Wollaston-Stiftung zur Unterstützung ihrer Arbeit zur Verfügung.

Am hervorragendsten sind die Leistungen Sandberger's auf dem Gebiete der Paläontologie, auf welchem drei grosse Veröffentlichungen in den Vordergrund treten.

Bei der geologischen Untersuchung des rheinischen Schiefergebirges stellte sich die Wichtigkeit der darin eingeschlossenen Thierreste für die sichere Bestimmung der einzelnen Schichten besonders dringend heraus, wesshalb die beiden Sandberger zugleich das Studium dieser Thierreste begannen; die erhaltenen Resultate sind in einem Werke: „Systematische Beschreibung und Abbildung der Versteinerungen des rheinischen Schichtensystems in Nassau" niedergelegt. Dieses mit seltener Gründlichkeit durchgeführte Werk, welches eine der ersten Stellen in der paläontologischen Wissenschaft einnimmt und die Grundlage zur Vergleichung der genannten Schichten für ganz Centraleuropa bildet, widmeten sie dem damaligen Nestor der deutschen Naturforscher, Alexander v. Humboldt.

An die grosse Monographie über die rheinischen Schiefergebirge oder die Devon'schen Schichten schloss sich alsbald eine Untersuchung im kainozoischen Gebiete über die tertiären und diluvialen Ablagerungen Nassau's an, zu deren Erkenntniss er die geologischen Verhältnisse in den anstossenden mittelrheinischen Ländern, von der Haardt und den Vogesen bis zu dem Spessart, Odenwald und Schwarzwald, nöthig hatte. Diese als Schichten des Mainzer Beckens bezeichneten ausgedehnten und mächtigen Ablagerungen enthalten eine beträchtliche Anzahl der merkwürdigsten Fossilien: Einschlüsse von Conchylien, aber auch grosse Wirbelthiere. In seinen „Untersuchungen über das Mainzer Tertiärbecken und dessen Stellung im geologischen Systeme" giebt er neben einer geologischen Beschreibung der einzelnen Schichten des Mainzer Beckens die genaue Beschreibung der Thierreste in denselben, so dass man dadurch eine Vorstellung über die klimatischen und anderen Verhält-

nisse des Mainzer Beckens zur Tertiärzeit erhielt. Auch diese Arbeit war eine mustergiltige und in Vollständigkeit der Untersuchung dieser Schichte bis dahin unerreicht; sie bildete die Basis für die späteren geologischen Forschungen in dem oberrheinischen Gebiete.

Durch seine Uebersiedelung nach Würzburg kam er in eine mesozoische Formation. Er richtete sogleich seine Thätigkeit auf die Erforschung der als fränkische Trias bezeichneten drei Gruppen des Keuper, Muschelkalkes und Buntsandsteins, welche damals noch nicht näher untersucht worden waren. Er hat diese Triasgebilde Unterfrankens in scharfsinniger Weise gegliedert und nach ihren organischen Einschlüssen charakterisirt; insbesondere ist seine Darstellung des Muschelkalkes und der Lettenkohlenstufe durch ihre Gründlichkeit und kritische Behandlung besonders hervorragend. Durch letztere Arbeit hat er auch höchst wichtige Vergleichspunkte für die Alpengeognosie festgestellt.

Auch die geognostischen Verhältnisse der vulkanischen Rhön zog er in den Kreis seiner Untersuchungen und gab über den geologischen Aufbau derselben einen nicht im Buchhandel erschienenen ausgezeichneten Bericht an die k. Regierung von Unterfranken.

Sandberger hatte schon 1863 eine Beschreibung der Conchylien des Mainzer Tertiärbeckens herausgegeben. Es ist dies ein umfangreiches Werk, welches für das rheinische Tertiärgebiet dieselbe Bedeutung beanspruchen darf, wie Deshayes berühmtes Werk über die Tertiärversteinerungen des Pariser Beckens. Gleichmässig ausgezeichnet durch gründliche Kritik, sorgfältige Vergleiche mit noch lebenden Thierformen und genaue Beachtung der jeder Art zukommenden geognostischen Lage in den Gesteinsschichten ist es ein Muster für alle ähnlichen Arbeiten.

Daraus erwuchs nun seine dritte umfassendste Monographie: „Die Land- und Süsswasser-Conchylien der Vorwelt“, die Frucht zwanzigjährigen eisernen Fleisses. Er wollte dadurch die Entwicklung dieser Thiere durch alle geologischen Perioden in Europa verfolgen und die Beziehungen der einzelnen Faunen

zu einander und zu den lebenden der verschiedenen Erdtheile klarstellen. Durch sorgfältige Studien der jetzt lebenden Land- und Süsswasser-Conchylien hat er die grossen Schwierigkeiten zu überwinden verstanden, und ein Meisterwerk geschaffen, durch welches wir eine genaue Kenntniss von dem in einem wesentlichen Theile der Thierwelt ausgedrückten jeweiligen Charakter der verschiedenen Zeitabschnitte in der Entwicklungsgeschichte der Erdoberfläche erhalten haben. Er gab durch dasselbe den Beweis, dass er über die schwierigsten Aufgaben der Paläontologie Herr geworden ist. Der grossartigen Arbeit wurde überall volle Anerkennung und Bewunderung zu Theil; die grosse goldene Cothenius-Medaille der Leopoldino-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher vom Jahre 1876 war ihr äusserlicher Lohn.

Als Mineraloge hat sich Sandberger durch genaue Untersuchung zahlreicher Mineralien, durch Feststellung ihrer chemischen und physikalischen Eigenschaften sowie durch die Bestimmung ihrer Charakteristik bedeutende Verdienste erworben. Dies gilt namentlich in Bezug auf die Schwefelverbindungen der Metalle, so dass er allgemein als einer der besten Kenner dieser Mineralgruppe galt. Ausserdem hat er durch Erforschung der Entstehung, Bildung und Vergesellschaftung vieler Mineralien tief gehende Studien angestellt, durch welche er auch zu der Annahme der Lateralsekretion geführt wurde.

Die Untersuchung der Frage nach der Entstehung der eigenthümlichen Erzgänge führten Sandberger auch auf das geognostisch-mineralogische Gebiet. Man hat sich zur Erklärung der von Erzen ausgefüllten Gänge und Spalten mancherlei Vorstellungen gemacht. Nach der neptunistischen Ansicht Werner's oder der Descensionstheorie geschieht die Ausfüllung durch von oben herabströmende Flüssigkeit, welche in den Gängen die Erze absetzt. Die plutonische Anschauung oder die Ascensionstheorie lässt die Erze aus der Tiefe stammen und durch aufsteigende Mineralquellen oder durch Sublimation von Metalldämpfen in die Spalten gelangen. Eine dritte Theorie, die von der sogenannten Lateralsecretion, nimmt an,

die Erze kämen von dem die Gänge direkt umgebenden Gestein her. Als Sandberger in den Mineralien der umgebenden krystallinen Massen- und Schiefergesteine kleine Mengen von Kupfer, Blei, Nickel, Kobalt, Wismuth, Zinn, Silber und andere Metalle als Silikate nachgewiesen hatte, griff er die Theorie von der Lateralsecretion lebhaft auf und vertrat sie hartnäckig in sehr geschickter Weise. Es erwuchsen ihm aber hierin manche gewichtige Gegner, namentlich Stelzner; man kann wohl sagen, dass die meisten Geologen jetzt der Meinung zuneigen, die Erze der Mehrzahl der Gänge mit grossem Erzreichthum auf engem Gebiete wären durch Mineralquellen aus grösserer Tiefe und Entfernung hergebracht worden. Wie die Sache aber auch schliesslich entschieden werden mag, so hat Sandberger durch seine genauen Beobachtungen und Untersuchungen der Erzgänge eine grosse Anregung gegeben und die Erkenntniss sehr gefördert; man wird stets seiner Lagerstättenlehre alle Beachtung schenken müssen.

Sandberger war auch ein vortrefflicher Lehrer, der seine ganze Kraft seinen Schülern widmete und höchst anregend auf sie wirkte.

Ein so völlig in die Wissenschaft aufgehender Mann war für die Vergnügungen der grossen Welt nur wenig geeignet; aber doch nahm er an dem wahrhaft Schönen Theil und hatte sich treue Freunde erworben. Es mag hier zu seiner Charakteristik bemerkt werden, dass in seiner Junggesellenbehausung der erste Theil des Ekkehard von Victor Scheffel zuerst vorgelesen und Scheffel's Ichthyosaurus „es rauscht in den Schachtelhalmen“ für ihn gedichtet wurde.

So stellt sich uns Sandberger als ein Gelehrter von eminenter Vielseitigkeit des Wissens und einem seltenen Reichthum der Kenntnisse sowie als ein Forscher von grösster Gründlichkeit und Gewissenhaftigkeit dar. Von strenger Redlichkeit und unbeugsamer Prinzipientreue war es ihm nur um die Wahrheit zu thun.

Möchten der Wissenschaft auch fernerhin solche reine und selbstlose Vertreter erstehen.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1899.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Band XX. 1898. 8⁰.

Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:

Argovia. Band 27. 1898. 8⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XXII, part 2. 1898. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Zbornik. Band III, 2. 1898. 8⁰.
Rad. Band 136. 137. 1898. 8⁰.
Monumenta historico-juridica Slav. merid. Vol. VI. 1898. 8⁰.
Starine. Band XXIX. 1898. 8⁰.

Kgl. kroat.-slavon.-dalmatin.-landwirthschaftliches Archiv in Agram:

Vjestnik. Band I, Heft 1, 2. 1899. gr. 8⁰.

Kroatische archäologische Gesellschaft in Agram:

Vjestnik. N. Serie, Band III. 1898/99. 4⁰.

Académie des sciences in Aix:

Mémoires. Tom. 17. 1898. 8⁰.
Séance publique de l'Académie 1898. 8⁰.

Geschichts- und Alterthumsforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen. Band XI, Heft 2. 1899. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen aus dem Osterlande. N. F. Band VIII. 1898. 8⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Album archéologique. Fasc. 13. 1898. Fol.

Observatoire national d'Athènes:

Annales. Tom. I. 1898. 4⁰.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Zeitschrift. Jahrgang 25. 1898. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:

33. Bericht. 1898. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Memoirs from the Biological Laboratory. Vol. IV, 1, 2. 1898. 4⁰.
Circulars. Vol. XVIII, No. 139, 140. 1899. 4⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. IX, No. 92. 1898. 4⁰.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Maryland geological Survey. Vol. II. 1898. 8⁰.

R. Academia de ciencias in Barcelona:

Nómina del personal academico. Año 1898—99. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. N. F. Band V, Heft 2. 1899. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 40, afl. 3—6. 1898. 8⁰.
Notulen. Deel 35, afl. 3, 4; Deel 36, afl. 1, 2. 1897—98. 8⁰.
Verhandelingen. Deel 51, stuk 1. 1898. 4⁰.
Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia. Anno 1670—1671. 1898. 4⁰.

Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XX, 1897. 1898. Fol.
Regenwaarnemingen. 19. Jahrg. 1897. 1898. 4⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv. Band XX, 3. 1898. 8⁰.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Glas. LV, LVI. 1898. 8⁰.
Spomenik. No. XXXIII. 1898. 4⁰.
Godischnijak. XI, 1897. 1899. 8⁰.
Autobiographie des Protosyncellus Kirilo Cvjetković und sein Kampf für die Orthodoxie, herausg. von Demetrius Ruvarac. 1898. 8⁰.

Museum in Bergen (Norwegen):

Aarbog für 1898. 1899. 8⁰.

University of California in Berkeley:

Schriften aus dem Jahre 1898.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Inscriptiones graecae insularum maris Aegaei. Fasc. II. 1899. Fol.
Corpus inscriptionum latinarum. Vol. XIII, pars 1, fasc. 1; Vol. XV, pars posterior, fasc. 1. 1899. Fol.
Abhandlungen aus dem Jahre 1898. 4⁰.
Sitzungsberichte. 1898, No. XL—LIV; 1899, No. I—XXII. gr. 8⁰.

Central-Bureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Resultate aus den Polhöhenbestimmungen in Berlin von H. Battermann. 1899. 4⁰.
Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariationen von Th. Albrecht. 1899. 4⁰.

Commission für die wissenschaftl. Sendungen aus den deutschen Schutzgebieten in Berlin:

Viertes Verzeichniss der abgegebenen Doubletten. 1899. Fol.

Commission für die Beobachtung des Venusdurchgangs in Berlin:

Die Venusdurchgänge 1874 und 1882, herausg. v. A. Auwers. Bd. I. 1898. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 31. Jahrg., No. 18—19; 32. Jahrg., 1—10. 1899. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 50, Heft 3, 4. 1899. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. 17. Jahrg., No. 12, 13; 1. Jahrg., No. 1—8. 1898—99. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Band XII, No. 20—26; Band XIII, No. 1—7. 1898—99. 8⁰.

Verhandlungen. Band XIII, No. 1—7. 1899/1900. 8⁰.

K. technische Hochschule in Berlin:

A. Goering, Ueber die verschiedenen Formen und Zwecke des Eisenbahnwesens. Rede. 1899. 4⁰.

Otto N. Witt, Rede bei der Gedenkfeier für den Fürsten von Bismarck 9. März 1899.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band XIII, Heft 4; Band XIV. 1899. 4⁰.

Mittheilungen. Band XIII, 4. Rom 1898. 8⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Regenkarte der Provinz Schlesien von G. Hellmann. Berlin 1899. 8⁰.

Veröffentlichungen 1894 Heft 3, 1897 Heft 2, 1898 Heft 1. Berlin 1898. 4⁰.

Bericht über die internationale meteorolog. Conferenz in Paris 1896. 1899. 4⁰.

Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1897. 1899. 4⁰.

Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1898. 1899. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Band 27 (1896), Heft 3. 1899. 8⁰.

K. Sternwarte in Berlin:

Beobachtungsergebnisse. Heft No. 8. 1899. 4⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 48, Heft 1—13; 1899, Heft 8—11. 1899. 8⁰.

Programm der grossen deutschen Winterblumen-Ausstellung. 1899. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Band 12, 1. Hälfte. Leipzig 1899. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band XIV, Heft 1—6. 1899. Fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 19. Jahrg. 1899, No. 1—6, Januar—Juni. 4⁰.

Société d'Émulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. VII. Série, Vol. 2, 1897. 1898. 8⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1898, 1. und 2. Hälfte. 1898. 8⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 55. Jahrg., 1. und 2. Hälfte. 1898. 8⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Procès-verbaux des séances. Année 1897—98. Paris 1898. 8⁰.
Mémoires. Vᵉ Série, tome 4. Paris 1898. 8⁰.
Observations pluviométriques 1897—98. 1898. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1898, No. 23 und 24; 1899, No. 1—12. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. XXXIV, No. 6—14. 1898. 8⁰.

American Philological Association in Boston:

Transactions and Proceedings. Vol. 29. 1898. 8⁰.

Ortsverein für Geschichte und Alterthumskunde zu Braunschweig und Wolfenbüttel in Braunschweig:

Braunschweigisches Magazin, Band 4. 1898. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Band XVI, 1. 1898. 8⁰.

Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. 3. Jahrg., Heft 1, 2. 1899. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. 36. Band 1897. 1898. 8⁰.
XVI. Bericht der meteorol. Commission 1896. 1898. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série, Tome 12, No. 10, 11, 1898; Tome 13, No. 1—5, 1899. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Bulletin. 3. Série, Tome 36, No. 11, 12, 1898; Tome 37, partie 1, No. 1, 1899. 8⁰.
Annuaire 1899. 8⁰.
Tables générales du Recueil des Bulletins. 3. Série, Tome 1—30 (1881 bis 1895). 1898. 8⁰.
Bulletin. a) Classe des Lettres 1899, No. 1—5; b) Classe des Sciences 1899, No. 1—5. 8⁰.

Bibliothèque Royale in Brüssel:

Rapport sur l'année 1896—97. 1898. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome 18, 1, 2. 1899. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 42. 1898. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Annales. Tome 24, 3; 25, 2; 26, 1. Liége. 1897—99. 8⁰.
Bulletin. Tome 12, Fasc. 1. 1899. 8⁰.

Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:

Bulletins. Tome 34, p. 1—32. 1899. 8⁰.
Mémoires. Tome 34, p. 1—16 und 2 Tafeln. 1899. 8⁰.
Procès-verbaux, 1898, p. 73—100. 8⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Jahresbericht für 1897. 1899. 4⁰.
Földtani Közlöny. Vol. 28, füzet 7—12. 1898. 4⁰.
Geologische Karte von Ungarn. Blatt Umgebung von Nagy-Bánya. 1898. Fol. Desgl. von J. Böckh und S. Gesell. 2 Blatt. 1898.

Die im Betrieb stehenden Lagerstätten von Edelmetallen, Erzen etc. von Joh. Böckh und Alex. Gesell. 1898. 4⁰.
A Magyar Kir. Földtani Intézet Évkönyve. Band XII, 4. 5.
Erläuterungen zur geologischen Specialkarte. Blatt Zone 15, Col. 29. 1899. 4⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Comunicaciones. Tomo I, No. 2. 1898. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Catalogus plantarum phanerogam. etc., Fasc. 1. Batavia 1899. 8⁰.
Conspectus Hepaticarum Archipelagi Indici. Von Victor Schiffner. Batavia 1898. 8⁰.
Mededeelingen, No. 27, 30 und 32. Batavia 1898—99. 4⁰.
Mededeelingen van de Laboratoria der Governements Kinaonderneming I mit Atlas von 20 Tafeln. Batavia. 1898. 4⁰.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele. Tome XIII, 1897. 1899. 4⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1898. August—Dezember 1898, Januar 1899. 1899. Fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. VI, part 4; Vol. X, part 2. Simla 1899. Fol.
Rainfall Data of India. 1896 und 1897. Fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser., No. 922—930. 1898. 8⁰.
Journal. No. 275, 276. 1898—99. 8⁰.
Proceedings. 1898, No. 9—11; 1899, No. 1—3. 1898—99. 8⁰.
Içvara-Kaula, A Kāçmīrī Gramar, ed. by G. A. Grierson. Part II. 1898. 4⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

A Manual of the Geology of India. Economic Geology by V. Ball. Part I. 1898. 4⁰.
Paläontologica Indica. Ser. XV, Vol. I, part 3. 1897. Fol.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

53th Report for the year ending Sept. 30. 1898. 8⁰.
Annals. Vol. 39, part I. 1899. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. 10, 1, 2. 1899. 8⁰.
Transactions. Vol. 17, part 2, 3. 1899. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 32, No. 9. 1899. 8⁰.
Annual Report for 1897—98. 1898. 8⁰.

Departement of Agriculture in Cape Town:

Annual Report 1897. 1898. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bullettino mensile. Nuova Ser., Fasc. 55—58 (Nov. 1898—Febr. 1899). 8⁰.

Redaktion des „Astrophysikalischen Journals" in Chicago:

Astrophysikalisches Journal. Vol. 9, No. 4. 1899. 8⁰.

John Crerar Library in Chicago:

4th annual Report for the year 1898. 1899. 8⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 29. 1898. 8°.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. 9, No. 3, 4. 1899. 8°.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. Vol. 13, No. 1—6. 1899. 4°.

Norsk Folkemuseum in Christiania:

Foreningen. Aarsberetning IV, 1898. 1899. 4°.

Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Forhandlinger 1898, No. 1—5. 8°.
Skrifter. I. Mathem.-naturwiss. Klasse 1898, No. 1—10. II. Histor.-filos. Klasse 1898, No. 2—5. 4°.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:

27. Jahresbericht. Jahrg. 1897. 1898. 8°.

Archaeological Institute of America in Cleveland, Ohio.

American Journal of Archaeology. II. Séries, Vol. 2, No. 1—4, 6; Vol. 3, No. 1. Norwood, Mass. 1898. 8°.

Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:

Mittheilungen. N. F., Band 4, 1897 und 1898. 1898. 8°.

Franz-Josephs-Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1899. 8°.
Die feierliche Inauguration des Rektors für das Jahr 1898/99. 1898. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F., Band IX, 3 und 4. 1898. 4°.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Zeitschrift. Heft 39 und 40. 1899. 8°.
Hans Maercker, Geschichte der ländlichen Ortschaften des Kreises Thorn. Liefg. 1. 1899. 8°.

Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:

Quartalblätter. N. F., Jahrg. 1898, Vierteljahrsheft 1—4. 8°.

Historischer Verein in Dillingen:

Jahrbuch. 9. Jahrg. 1898. 8°.

Académie des Sciences in Dijon:

Mémoires. IV. Série. Tome 6. Années 1897—98. 1898. 8°.

Verein für Geschichte und Naturgeschichte in Donaueschingen:

Karl Aloys Fürst zu Fürstenberg 1760—1799. Von Georg Tumbült. Tübingen 1899. 8°.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. XIX. 4. 1898; Tom. XX. 1. 1899. 8°.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Ser. III. Vol. 5. No. 2. 1899. 8°.
Transactions. Vol. 31. part 7. 1899. 4°.

Observatory at Trinity College in Dublin:

Astronomical Observations. VIII. Part. 1899. 4°.

Royal Dublin Society in Dublin:

Proceedings. Vol. 8, part 6. 1898. 8°.
Transactions. Vol. 6. part 14—15; Vol. 7. part 1. 1898. 8°.

American Chemical Society in Easton, Pa.:
The Journal. Vol. 20, No. 12, 1898; Vol. 21, No. 1–6. 1899. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:
Proceedings. Vol. 22, No. 3–4, p. 249–400. 1898/99. 8⁰.
Transactions. Vol. 39, 3. 1899. 4⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:
Proceedings. Vol. 2, No. 3. 1898. 8⁰.

Royal Physical Society in Edinburgh:
Proceedings. Session 1897–98. 1899. 8⁰.

Stiftsbibliothek in Einsiedeln:
Catalogus codicum manu scriptorum bibliothecae monasterii Einsidlensis, descripsit Gabriel Meier. Tome 1. 1899. gr. 8⁰.

Karl Friedrichs-Gymnasium zu Eisenach:
Otto Apelt, Ueber Ranke's Geschichtsphilosophie. Beigabe zum Jahresbericht für 1898–99. 1899. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:
Kleine Schriften. XIX. 1899. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:
Atti. IV. Serie, Vol. 21, disp. 3, 4. 1899. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:
Abhandlungen. Band 21, 3; 24, 4. 1898. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a/M.:
Archiv für Frankfurts Geschichte. III. Folge, 6. Band. 1899. gr. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:
Berichte. Band 11, 1. 1899. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:
Satzungen und Bücherverzeichniss des Vereins. 1898. 8⁰.
„Schau-ins-Land". Jahrgang 25. 1898. Fol.

Universität Freiburg in der Schweiz:
Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1899. 8⁰.
Rede beim Antritt des Rektorats von J. P. Kirsch. 1898. 8⁰.
Behörden, Lehrer und Studirende. Sommer-Semester 1899. 8⁰.
Programm des Cours 1899–1900. 1899. 8⁰.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:
Bulletin. Tome II, livr. 2. 1899. 8⁰.

Kruidkundig Genootschap Dodonaea in Gent:
Botanisch Jaarboek. 9. und 10. Jahrg. 1897 und 1898. 8⁰.

Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Giessen:
Mittheilungen. N. Folge, Band 8. 1899. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:
Neues Lausitzisches Magazin. 74. Band, 2. Heft, 1898; 75. Band, 1. Heft. 1899. 8⁰.
Codex diplomaticus Lusatiae superioris II, Heft 4. 1899. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:
Göttingische gelehrte Anzeigen. 1898, No. 11, 12; 1899, 1–5. Berlin 1898–99. 4⁰.

Nachrichten. a) Philol.-hist. Classe. 1898, No. 4; 1899, No. 1. 4⁰.
b) Mathem.-phys. Classe. 1898, No. 4; 1899, No. 1. 4⁰.
Geschäftliche Mittheilungen 1898, Heft 2. 1899. 4⁰.
Abhandlungen. N. F., Band I, No. 8. Berlin 1899. 4⁰.

Universität in Gothenburg:

Göteborgs Högskolas Arsskrift. Tome 4. 1898. 8⁰

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. 8, No. 4, 1898; Vol. 9, No. 1. 1899. 8⁰.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. 11, 12, 1—3. 1897—98. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Heft 34, 1897. 1898. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mittheilungen. 30. Jahrg. 1898. Berlin 1899. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:

Jahresbericht von 1898—99. 1899. 4⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks, Deel 6, aflev. 1, 2. 1899. 8⁰.
Naamlyst der leden op 1. April 1899. 8⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises. Sér. II, Tom. 2, livr. 2—5. La Haye 1899. 8⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. Vol. 9, 4. 1898. 4⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 34, No. 12; Heft 35, No. 1—5. 1899. 4⁰.
Nova Acta. Band 70. 71. 1898. 4⁰.
Katalog der Bibliothek. Lief. IX. 1899. 8⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 52, Heft 4; Band 53, Heft 1. Leipzig 1898/99. 8⁰.

Universität in Halle:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1899. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 71, Heft 4—6. Stuttgart 1899. 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Zeitschrift. Band 10, 3. 1899. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Mittheilungen der mathemat. Gesellschaft in Hamburg. Band 3, Heft 9. Leipzig 1899. 8⁰.
Verhandlungen 1898. 3. Folge, VI. 1899. 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. 8, Heft 2. 1898. 8⁰.

Naturhistorisch-medicinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F., Band 6, Heft 1. 1898. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F., Band 28, Heft 3. 1898. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 2, No. 9, 1898; Vol. 3, No. 1—4. 1899. gr. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Band 32, Heft 3, 4, 1898; Band 33, Heft 1, 2. 1899. 8⁰.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):

Archäologische Karte von Liv-, Est- und Kurland. Nebst Text von J. Sitzka. 1896. 8⁰.

Verhandlungen. Band 9. 1898. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte. Band 12, 1. 1899. 8⁰.

Pfälzisches Museum in Kaiserslautern:

Pfälzisches Museum. 16. Jahrg., No. 1—3. 1899. 8⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. IIe Série, Tom. VIII, 2—4; Tom. IX, 1, 2. 1898/99. 8⁰.

Universität Kasan:

Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 8⁰.

Utschenia Sapiski. Band 65, No. 12, 1898; Band 66, No. 1—4. 1899. 8⁰.

Société de médecine in Kharkow:

25e Anniversaire. 8 février 1898. 1899. 8⁰.

Travaux 1897. 1899. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:

Grundlagen der Erdkunde. Band 4, Heft 1. 1899. 8⁰.

Eine medicin. Dissertation von Abraham Nožnikov. 1899. 8⁰.

Annales 1898, Heft 1. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Band 28. 1899. 8.

Universität in Kiew:

Iswestija. Band 38, No. 11, 12, 1898; Band 39, No. 1—2. 1899. 8⁰.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Jahrbuch. 25. Heft. 1899. 8⁰.

Diagramme der magnet. und meteorologischen Beobachtung von Ferd. Seeland Dez. 1897 bis Nov. 1898. 1899. Fol.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 39. Jahrg. 1898. 4⁰.

Universität in Königsberg:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Halbjahr 1899. 4⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1898, No. 6; 1899, No. 1. 8⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger. II. Raekke, 13. Band, 4. Heft, 1898; 14. Band, 1. Heft 1899. 4⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Sofus Elvius, Bryllupper og dödsfeld i Danmark 1897. 1898. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Sprawozdania komisyi histor. Tom. 4, 2—3, 1898, fol.; fizyograf tom. 33. 1898. 8⁰.

Anzeiger. Dez. 1898 — Mai 1899. 8⁰.

Rozprawy mathem. Tom. 34. 1899. 8⁰.
Rocznik. Rok 1897/98. 1898. 8⁰.
Atlas geologiczny. Zeszyt 9 (mit Text); Z. 10, 1. 1898. Fol.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série, Vol. 34, No. 130, 131. 1898/99. 8⁰.

Société d'histoire de la Suisse romande in Lausanne:

Mémoires et Documents. Tom. 39. 1899. 8⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

The Kansas University Quarterly. Vol. 7, 4; 8, 1. 1898/99. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie, Deel 18, aflev. 1. 1899. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Band 18, No. 4. 1899. 4⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Classe. Band 24, No. 6; Band 25, No. 1, 2. 1899. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Classe. Band 50, No. 5, 1898; Band 51, No. 1. 1899. 8⁰.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Band 50, 1898, naturwiss. Theil; Band 51, 1899, math. Teil I—III. 8⁰.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Jahresbericht. März 1899. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F., Band 58, Heft 11, 12, 1898; Band 59, Heft 1—12. 1899. 8⁰.

Geschichts- und Alterthumsverein in Leisnig:

Mittheilungen. Heft 1898. 1899. 8⁰.
Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Band 3, Heft 3. 1899. 8⁰.

Faculté in Lille:

Travaux et Mémoires. No. 15—21 in 8⁰ und Atlas No. 1, 2 in Fol. 1894—98.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletin. 16. Serie, No. 10. 1897. 8⁰.

Université Catholique in Loewen:

Paulin Ladeuze, Étude sur le cénobitisme Pakhomien 1898. 8⁰.
Programme des cours 1898—99. 1898. 8⁰.
63ᵉ année 1899. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XV, 2; XVI, 1. 1898/99. 4⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. 14, No. 53, 54. 1899. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 64, No. 406—412; Vol. 65, No. 413—415. 1899. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 59, No. 2—8. 1899. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal No. 434—440 (January—July) Supplementary Number. 1899. 8⁰.
Proceedings. No. 201, 203—212. 1899. 8⁰.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 54, No. 1—4. 1898. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1899, part I—III. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1898, part IV; 1899, part I. 1899. 8⁰.

Zeitschrift „Nature“ in London:

Nature. No. 1523—1548. 4⁰.

Museums-Verein für das Fürstenthum Lüneburg in Lüneburg:

Jahresberichte 1896/98. 1899. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 26, livr. 2. 1899. 8⁰.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Tom. 34, 1, 2. 1898. 4⁰.

Académie des sciences in Lyon:

Mémoires, Sciences et lettres. 3ᵉ Série, Tom. 5. Paris 1898. 4⁰.

Société d'agriculture, science et industrie in Lyon:

Annales. VII. Sér., Tom. 5, 1897. 1898. 4⁰.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Année 1898, Tome 45. 1899. 4⁰.

Université in Lyon:

Annales. No. 33, 37—40. 1897—98. 8⁰.

Wisconsin Geological and Natural History Society in Madison:

Bulletin. No. 1 und 2. 1898. 8⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. 2, No. 3. 1899. 8⁰.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Memorias. Anuario 1899. 8⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 34, cuad. 1—7 und Reg. 1899. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Ser. II, Vol. 31. 1898. 8⁰.
Memorie. a) Classe di lettere. Vol. 20, 7, 8.
b) Classe di scienze. Vol. 18, 6. 1898. 4⁰.
Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. 15, 16. 1898. 8⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 37, Fasc. 4; Vol. 38, Fasc. 1 und 2. 1899. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie III, Fasc. 19—21. 1898. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 43, part 1, 2. 1899. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tomo IX, Fasc. 1—5. 1899. 4⁰.
Annales de l'Institut colonial de Marseille 6ᵉ année. Vol. 5, Fasc. 1. Paris 1898. 8⁰.

Hennebergischer alterthumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge. 14. Lieferung. 1899. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:

Jahresbericht für das Jahr 1898—99. 1899. 4⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. New. Ser., Vol. 11, part 1. 1898. 8⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:

Rivista. Anno 4, Fasc. 1, 2. Gonnaio—Aprile 1899. 4⁰.

Instituto geológico in Mexico:

Las aguas del desierto por José G. Aguilera y Ezequiel Ordoñez. 1895. 8⁰.
Expedición científica al Popocatepetl por José G. Aguilera y Ezequiel Ordoñez. 1895. 8⁰.
Boletin. No. 1—11. 1895—98. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:

Boletin mensual. Septiembre—Diciembre 1898, Enero 1899. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional de Tacubaya in Mexico:

Observaciones meteorológicas. 1897. 4⁰.
Anuario para 1899. Año XIX. 1898. 8⁰.

Sociedad científica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias y Revista. Tomo 12, No. 1—3. 1898. 8⁰.

Observatoire meteorologique du Mont Blanc:

Annales. Tom. 3. Paris 1898. 4⁰.

Museo nacional in Montevideo:

Annales. Tom. 2, Fasc. 11. 1899. 4⁰.

Numismatic and Antiquarian Society of Montreal:

The Canadian Antiquarian Journal. III. Serie, Vol. I, No. 4. 1898. 8⁰.

Oeffentliches Rumiantzoff'sches Museum in Moskau:

Ottschet, Jahrg. 1898. 1899. 8⁰.

Observatoire météorologique et magnétique de l'Université Imp. in Moskau:

Observations, Juillet 1896—Novembre 1898. 4⁰.
Ernst Leyst, Ueber den Einfluss der Planeten auf die beobachteten Erscheinungen des Erdmagnetismus (in russ. Sprache). 1897. 8⁰.
Ueber die geographische Vertheilung des normalen und anormalen Erdmagnetismus (in russ. Sprache). 1899.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1898, No. 2—4. 8⁰.
Nouveaux Mémoires. Tom. 15, 7; 16, 1. 1898. 4⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:

Gewerbezählung vom 14. Juni 1895. 1898. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 1898, No. 11, 12; 1899, No. 1—6. 4⁰.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Nachträge zu den Zeitungspreisverzeichnissen. 4⁰.

Görres-Gesellschaft in München:

Nuntiaturberichte aus Deutschland, I. Abtheilung, 1. und 2. Hälfte. Paderborn 1895/99. 8⁰.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Sommer-Semester 1899. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1899. 8⁰.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1899, No. 1—16. 8⁰.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1898 in 4⁰ und 8⁰.
Amtliches Verzeichniss des Personals. Sommer-Semester 1899. 8⁰.
Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1899. 4⁰.

Historischer Verein in München:

Monatsschrift. 1898, No. 9—12. 8⁰.
Altbayerische Monatsschrift. 1899, Heft 1, 2. 4⁰.
Oberbayerisches Archiv. Band 50 (Ergänzungsheft).
Altbayerische Forschungen, I. 1899. 8⁰.

K. Oberbergamt in München:

Geognostische Jahreshefte. 10. Jahrg. 1897. 1898. 4⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. 1898/99, No. 98—105. 4⁰.

K. Versicherungskammer in München:

Die bayerischen öffentlichen Landesanstalten für Brand-, Hagel- und Viehversicherung. 1899. 4⁰.

K. bayer. meteorologische Zentralstation in München:

Beobachtungen der meteorologischen Stationen des Königreichs Bayern. 19. Jahrg., Heft 4, 1897; 20. Jahrg., Heft 1. 1898. 4⁰.
Uebersicht über die Witterungsverhältnisse. Nov. 1898 bis April 1899. Fol.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens in Münster:

Zeitschrift. Band 56. 1898. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Serie 3, Vol. 4, Fasc. 12, 1898; Vol. 5, Fasc. 1—5. 1899. 4⁰.
Atti. Serie II, Vol. 9. 1899. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Band 13, 4. Berlin 1899. 8⁰.

Gesellschaft Philomathie in Neisse:

29. Bericht 1896—98. 1898. 8⁰.

Société des sciences naturelles in Neuchatel:

Bulletin. Tom. 21—25. 1893—97. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 48, part 2—4. 1899. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Serie, Vol. 7, No. 37—42. 1899. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. 20, part I. 1899. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. 10. 1898. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 30, No. 5, 1898; Vol. 31, 1, 2. 1899. 8⁰.

State Museum in New-York:

Bulletin. Vol. 4, No. 16—18. Albany 1897. 8⁰.

University of the State of New-York in New-York:

State Library Report 78—80 (1895—97). 1897—99. 8°.
„ „ Bulletin. Bibliography No. 2—8; 12—14. Albany 1897 bis 1898. 8°.
„ „ „ Library School No. 2. Albany 1897. 8°.
State Museum Report 49, Vol. 1; 50, Vol. 1 (1895—96). Albany 1897—98.

Archaeological Institute of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. Vol. 2, No. 5. 1898. 8°.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. 1898. 8°.
Mittheilungen. Jahrg. 1898. 8°.
Katalog der im germanischen Museum befindlichen Glasgemälde. II. Aufl. 1898. 8°.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mittheilungen. Band 23, 1898. 1899. 8°.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie, Vol. 14. 1898. 8°.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Atti. Serie 2, Vol. 3, Fasc. 2. 1899. 8°.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tomo 13, Fasc. 1—4. 1899. 4°.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1899, No. 1—26. 8°.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 128, No. 1—20, 22—26. 1899. 4°.
Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. 1899. 4°.

École polytechnique in Paris:

Journal. IIe Série, 4e cahier. 1898. 4°.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 685 (Janvier 1899) bis 691 (Juillet 1899). 4°.

Musée Guimet in Paris:

Annales. Tom. 28, 29. 1896. 4°.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 37, No. 2, 3; Tome 38, No. 1—3. 1898. 8°.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1898, No. 6—8; 1899, No. 1, 2. 8°.
Nouvelles Archives. Tome 10, Fasc. 1, 2. 1898. 4°.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. Tome 9, Fasc. 2—5. 1898. 8°.
Mémoires. III. Série, Tom. 2, Fasc. 2. 1898. 8°.

Société des études historiques in Paris:

Revue. Nouv. Sér., Tom. 1, No. 1—4. 1899. 8°.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus. 1898, No. 9; 1899, No. 1—4. 8°.
Bulletin. VII. Série, Tom. 19, 3e trimestre, 4e trimestre, 1898; Tom. 20, 1e trimestre. 1899. 8°.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 26, No. 10, 1898; Tome 27, No. 1. 1899. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tome 28. 1898. 8⁰.
Mémoires. Tome 11. 1898. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Annuaire du Musée zoologique 1898, No. 2—4. 8⁰.
Byzantina Chronika. Tom. 5, Heft 3, 4. 1898. 4⁰.
Mémoires. VIII. Série. a) Classe historico-philol. Vol. 3, No. 2. b) Classe physico-mathèmatique. Vol. 6, No. 11—13; Vol. 7, No. 1—3. 1898. 4⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. 17, No. 6—10; 18, 1—2. 1898—99. 8⁰. Vol. 8, No. 4; 10, 3. 1898—99. 4⁰.

Commission Impériale Archéologique in St. Petersburg:

Materialy No. 21. 1897. Fol.
Ottschet 1895. 1897. Fol.

Russische astronomische Gesellschaft in St. Petersburg:

Éphémerides des étoiles (W. Döllen) pour 1899. 1898. 8⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie, Band 36, Lfg. 1. 1899. 8⁰.

Physikalisch-chemische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 30, 8, 9. 1898. 31, 1—4. 1899. 8⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Publications. Sér. II, Vol. V et XI. 1898. 4⁰.
Ascensions droites moyennes des ètoiles principales pour l'époque 1885, déduites par A. Sokolow. 1898. 4⁰.
Annalen. Année 1897, partie I, II. 1898. 4⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Goditschny Akt 8. Febr. 1899. 8⁰.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings 1898. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 34, No. 12; Vol. 35, No. 1—6. 1898/99. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 37, No. 158. 1898. 8⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Vol. 20. 1899. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Memorie. Vol. 16. 1898. 8⁰.
Atti. Processi verbali. Vol. 11, p. 57—158. 1898/99. 4⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il Nuovo Cimento. Serie IV, Tom. 8, Settembre—Dicembre 1898; Tom. 9, Gennajo—Maggio 1899. 8⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht für 1898/99. 1899. 4⁰.

Hydrographisches Amt der k. und k. Kriegsmarine in Pola:

Veröffentlichungen, Gruppe III. Relative Schwerbestimmungen, II. Heft. 1898. Fol.

K. geodätisches Institut in Potsdam:

Bestimmung der Intensität der Schwerkraft auf 55 Stationen von Hadersleben bis Koburg, von L. Haasemann. Berlin 1899. 4⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. 13. Band. 1899. 4⁰.
Photographische Himmelskarte. Band I. 1899. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz-Joseph-Akademie in Prag:

Starožitnosti země České. Díl I. 1899. 4⁰.
Památky. Díl 18, Heft 3—5. 1898—99. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Rechenschaftsbericht für 1898. 1899. 8⁰.
Mittheilung No. 9. 1899. 8⁰.
Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Band 8, 9. 1898. 8⁰.
Julius Lippert, Socialgeschichte Böhmens. Band II. 1898. 8⁰.
Forschungen zur Kunstgeschichte Böhmens. III. Die Wandgemälde im Kreuzgange des Emausklosters in Prag, v. Jos. Neuwirth. 1898. Fol.
Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Band II, Heft 2. 1899. 8⁰.
Geologische Karte des böhmischen Mittelgebirges. Blatt II. 1898.
Beiträge zur paläontologischen Kenntniss des böhmischen Mittelgebirges. 1898. 4⁰.
A. Nestler, Die Blasenzellen v. Antithamnion Plumula (Ellis). Kiel 1898. 4⁰.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Norbert Heermanns Rosenberg'sche Chronik, herausg. v. M. Klimesch. 1898. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1898. 1899. 8⁰.
Sitzungsberichte 1898. a) Classe für Philosophie 1898. b) Mathem.-naturw. Classe 1898. 1899. 8⁰.
Spisův poctěných jubilejné Král C. Společnosti Náuk. Číslo X. 1898. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Band 28, Heft 2—5. 1898—99. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht über das Jahr 1898. 1899. 8⁰.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Zprawa jednatelská společnosti Musea Království Českého. 1899. 8⁰.
Časopis. Band 62, Heft 1—6; Band 63, Heft 1. 1898—99. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und meteorologische Beobachtungen. 59. Jahrgang 1898. 1899. 4⁰.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rektors für das Jahr 1898/99. 1899. 4⁰.
Ordnung der Vorlesungen. Sommer-Semester 1899. 8⁰.

Zeitschrift „Krok“ in Prag:

Krok. Band 13, Heft 1—5. 1899. 8⁰.

K. botanische Gesellschaft in Regensburg:

Denkschriften. 7. Band. Neue Folge, 1. Band. 1898. 8⁰.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. 50. Band. 1898. 8⁰.

Naturforscher-Verein in Riga:

G. Schweder, Die Bodentemperaturen bei Riga. 1899. 4⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. 9. 1898. 8⁰.

Augustana Library in Rock Island:

Publications No. 1. 1898. 4⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. VI, Parte 1. Memorie. 1899. 4⁰.

Atti. Serie V. Classe di scienze fisiche, Rendiconti. Vol. 7, Fasc. 12; Vol. 8, Fasc. 1—11. 1898/99. 4⁰.

Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. VI, Parte 2. Notizie degli scavi. Agosto 1898 — Genuaio 1899. 1898/99. 4⁰.

Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. VII, Fasc. 7—12; Vol. VIII, Fasc. 1—4. 1898/99. 8⁰.

Annuario 1899. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 52, Sessione 1—4. 1899. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1898, No. 3. 1898. 8⁰.

Società Italiana delle scienze in Rom:

Memorie di matematica e di fisica. Serie III, Tomo 10. 1896. 4⁰.

Ufficio centrale meteorologico italiano in Rom:

Annali. Serie II, Vol. 16, parte 2. 1894. Vol. 17, parte 1. 1895. Vol. 18, parte 2. 1897—98. Fol.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. 21, Fasc. 3, 4. 1898. 8⁰.

R. Accademia degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 4, Fasc. 3, 4. 1898. Vol. 5, Fasc. 1. 1899. Serie IV, Vol. 22, disp. 1. Firenze 1899. 8⁰.

The American Association for the advancement of science in Salem:

Proceedings for the 47th Meeting at Boston. August 1898. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht über die Thätigkeit der Gesellschaft 1896—97. 1898. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Anales. Seccion 2ª. Año 1897. 1898. Fol.

Californio Academy of Sciences in San Francisco:

Proceedings. a) Zoology. Vol. 1, No. 6—10. b) Botany. Vol. 1, No. 3—5. c) Geology. Vol. 1, No. 4. d) Math.-Pyis. Vol. 1, No. 1—4. 1898. 4⁰.

Commissão geographica e geologica in São Paulo:

Secção meteorologica. Dados climatologicos do anno de 1893—97. 1895—98. 8⁰.

Museu Paulista in S. Paulo:

Revista. Vol. III. 1898. 8⁰.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresberichte. 63. Jahrg. 1898. 8⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno XXI, No. 12. 1898. Anno XXII, No. 1—4. 1899. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speyer:

Mittheilungen. XXIII. 1899. 8⁰.
Jahresbericht des historischen Museums der Pfalz für 1897 und 1898. 1899. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Öfversigt. Årgång 55 (1898). 1899. 8⁰.

K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:

Månadsblad. 24. Årgång 1895. 1898. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Band 20, Heft 1; Band 21, Heft 1—4. 1899. 8⁰.

Nordiska Museet in Stockholm:

Meddelanden 1897. 1898. 8⁰.
Samfund 1897. 1898. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. 1898, No. 9, 10; 1899, No. 1—5. 8⁰.

K. öffentliche Bibliothek in Stuttgart:

Otto v. Alberti, Württembergisches Adels- und Wappenbuch, Liefg. 1—8. 1889—98. 4⁰.
Württembergische Geschichtsquellen. Band IV. 1899. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture of N.-South-Wales in Sydney:

Records of the geological Survey of New-South-Wales. Vol. VI, part 1. Records. Vol. VII, part 2. 1898. 4⁰.
Memoirs of the geological Survey of N.-S.-Wales. Ethnological Series, No. 1. 1899. 4⁰.
Mineral Resources, No. 5. 1899. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mittheilungen. Band VII, Th. 1 und Supplement (die Sprichwörter Th. V). 1898. 8⁰.

Kaiserliche Universität Tokyo (Japan):

The Journal of the College of Science. Vol. IX, 3; X, 3; XI, 1—3; XII, 1—3. 1898/99. 4⁰.
Mittheilungen aus der medicinischen Facultät. Bd. IV, No. 3—5. 1898. 4⁰.
Calendar 1897—98. 1898. 8⁰.

Alterthumsverein in Torgau:

Veröffentlichungen. XII. 1898. 8⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Proceedings. New. Series, No. 2, 3. 1897. gr. 8⁰. Vol. II, part 1. 1899. 8⁰.
The Canadian Journal 1856—1878 (einzelne Hefte fehlen). 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 34, disp. 1—10. 1898—99. 8⁰.
Memorie. Serie II, Tom. 48. 1899. 4⁰.

Meteorologisches Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique. Vol. 30. Année 1898. 1898—99. Fol.

K. Universität in Upsala:

Schriften der Universität aus den Jahren 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Werken. III. Serie, No. 12. Diarium. 's Gravenhage 1898. 8⁰.
Bijdragen en Mededeelingen. Deel XIX. 's Gravenhage 1898. 8⁰.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Aanteekeningen 1898. 8⁰.
Verslag 1898. 8⁰.
Stratz, Der Säugethier-Eierstock. Haag 1898. 4⁰.
L. M. Rollin Couquerque, Het Aasdoms- en Schependomsrecht. 's Gravenhage 1898. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks, Deel I, afl. 1. 1899. 8⁰.

Accademia in Verona:

Memorie. Vol. 72—74 (1896—98). 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Washington:

Proceedings. Vol. 34, No. 2—5. 1898. 8⁰.

National Academy of Sciences in Washington:

Memoirs. Vol VIII. 1898. 4⁰. Vol. VIII, 3d. Memoir. 1899. 4⁰.

Bureau of Education in Washington:

Annual Report of the Commissioner of Education for 1896—97. Vol. 2. 1898. 8⁰.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

North American Fauna, No. 14. 1899. 8⁰.
Yearbook 1898. 1899. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report of the U. S. National-Museum 1896. 1898. 8⁰.
Annual Report 1895—96. July 1897. 1898. 8⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections, No. 1170. 1899. 8⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report for the year ending June 30, 1898. 8⁰.

Surgeon General's Office, U. S. Army in Washington:

Index-Catalogue. II. Series, Vol. 3. 1898. 4⁰.

United States Geological Survey in Washington:

18th. annual Report. Part II, Va, b. 1897. 4⁰.

Grossherzogliche Bibliothek in Weimar:

Zuwachs in den Jahren 1896—98. 1899. 8⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Register über die Jahrgänge 13—24 (1880—91) der Zeitschrift. 1898. 4⁰.

Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:

Anzeiger. Philos.-histor. Classe, 35. Jahrg. 1898, No. 1—27.
Mathem.-naturw. Classe, 35. Jahrg. 1898, No. 1—27. 1898. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1898, Band 48. 1898. 4°.
Verhandlungen. 1898, No. 1—18; 1899, No. 1—8. 4°.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 41. 1898. 8°.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1898, No. 52; 1899, No. 1—27. 4°.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 28, Heft 5, 6; Band 29, Heft 1, 2. 1898/99. 4°

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 48, Heft 10; Band 49, Heft 1—5. 1899. 8°.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band 13, No. 2—3. 1898. 4°.

Oriental Nobility Institute in Woking:

Vidyodaya. Band 27, No. 11, 12, 1898; Band 28, No. 1, 2. 1899. 8°.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F., 32. Band, No. 4—6; 33. Band, No. 1. 1899 8°.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1898, No. 4—8; 1899, No. 1—5. 8°.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. 40. Jahrg. 1898. 8°.

Schweizerische meteorologiscse Centralanstalt in Zürich:

Annalen. Jahrg. 1896. 1898. 4°.

Schweizerische geodätische Kommission in Zürich:

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Liefg. 28 und neue Folge, Liefg. 8. Bern 1898. 4°.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mittheilungen. Band 24, 6. 1899. 4°.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Neujahrsblatt. 101 Stück. 1899. 4°.
Vierteljahrsschrift. 43. Jahrg. 1898. Heft 4; 44. Jahrg. 1899, Heft 1, 2. 1899. 8°.

Von folgenden Privatpersonen:

Prinz Albert I. von Monaco:

Exploration océanographique aux régions polaires. Paris 1899. 8⁰.
Première Campagne scientifique de la „Princesse Alice IIe." Paris 1899. 4⁰.

M. Berthelot in Paris:

Chaleur animale. 2 Vols. Paris 1899. 8⁰.
Chimie végétale et agricole. 4 Vols. Paris 1899. 8⁰.

Renward Brandstetter in Luzern:

Malaio-Polynesische Forschungen, II. Reihe, I. Luzern 1898. 8⁰.

Ferdinando Colonna dei Principi di Stigliano in Neapel:

Scoperte di Antichità in Napoli 1876—1897. 1898. 4⁰.

Arthur Mac Donald in Washington:

Experimental Study of Children. 1899. 8⁰.
Colored Children: A Psychophysical Study. Chicago 1899. 8⁰.

H. Fresenius in Wiesbaden:

Geschichte des chemischen Laboratoriums in Wiesbaden. 1898. 4⁰.

H. Fritsche in St. Petersburg:

Die Elemente des Erdmagnetismus und ihre säcularen Aenderungen. 1899. 8⁰.

Antonio de Gordon y de Acosta in Habana:

Indicaciones terapeuticas de la musica. Habana 1899. 8⁰.

Ernst Häckel in Jena:

Kunstformen der Natur, Liefg. I, II. Leipzig 1899. Fol.

Joseph Hartmann in Ingolstadt:

Der erste bayerische Geschichtschreiber Johannes Turmair, genannt Aventinus, und seine Beziehungen zur Geographie. Dissertation. 1898. 8⁰.

Emil Hensen in Frankenthal:

Frankenthaler Gruppen und Figuren der Porzellanfabrik Frankenthal. Speier 1899. 8⁰.

J. Hirschberg in Berlin:

Geschichte der Augenheilkunde im Alterthum. Leipzig 1899. 8⁰.

F. Jousseaume in Paris:

La philosophie aux prises avec la mer rouge, le Darwinisme et les 3 règnes des corps organisés. 1899. 8⁰.

Wilhelm Klinckert in St. Petersburg:

Das Licht, sein Ursprung und seine Funktion. Leipzig 1899. 8⁰.

Joseph Kriechbaumer in München:

Beitrag zu einer Monographie der Joppinen. Berlin 1899. 8⁰.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Band 8, Heft 1—3. Leipzig 1899. 8⁰.

J. Lair in Paris:

Conjectures sur les chapitres XVIII et XIX du livre II de l'historia ecclesiastica de Grégoire de Tours. 1899. 8⁰.

Joseph Levy in Lorensen (Unter-Elsass):

Geschichte der Stadt Saarunion. Vorbruck-Schirmeck 1898. 8⁰.

G. van der Mensbrugghe in Gent:

7 kleine Schriften physikalischen Inhalts (Sep.-Abdrücke). 1898. 8⁰.

Lady Meux in Theobaldspark (England):

The Lives of Mabâ' Sĕyōn and Gabra Krĕstôs, the ethiopic Texts edited by E. E. Wallis Budge. With 92 colowred plates. London 1898. 4⁰.

Oskar Emil Meyer in Breslau:

Die kinetische Theorie der Gase. 1899. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tom. 69, No. 1, 2; Tom. 70, No. 1, 2. 1899. 8⁰.

G. J. Petersen in Gleiwitz:

Ueber die Harmonie im Weltenraum. Band I. 1899. 8⁰.

E. Piette in Rumigny (Ardennes):

Études d'éthnographie préhistorique V. Paris 1899. 8⁰.

W. Radloff in St. Petersburg:

Die alttürkischen Inschriften der Mongolei. II. Folge. 1899. 4⁰.

Dietrich Reimers Verlagshandlung in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. Jahrg. IV, Heft 3. 1898. 4⁰.

Adolf Römer in Erlangen:

Aristotelis ars rhetorica. Lipsiae 1899. 8⁰.

Ferdinand Rüss in München:

Geschichte des Gabelsberger Stenographen-Centralvereins in München von 1849—1898. 1899. 8⁰.

Verlag von Seitz und Schauer in München:

Medizinische Neuigkeiten. 1898, No. 52. 4⁰.
Deutsche Praxis. 1898, No. 18; 1899, No. 1—11. 8⁰.

Emil Selenka in München:

Menschenaffen. Liefg. I. Wiesbaden 1898. 4⁰.

M. B. Suyder in Philadelphia:

Report on the Harvard Astrophysikal Conference August 1898. Lancaster 1898. 8⁰.

Serge Socolow in Moskau:

Corrélations régulières du système planétaire. 1899. 8⁰.

Michele Stossich in Triest:

Filarie e spiroptere. 1897. 8⁰.
Note parassitologiche. 1897. 8⁰.
Saggio di una Fauna elmintologica di Trieste. 1898. 8⁰.

Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig:

Encyklopädie der mathem. Wissenschaften. Band 1, Heft 2. 1899. 8⁰.

A. Thieullen in Paris:

Lettre à M. Chauvet sur les veritables instruments usuels de l'âge de la pierre. 1898. 4⁰.

H. Ulmann in Greifswald:

Russisch-preussische Politik. Leipzig 1899. 8⁰.

Verlagshandlung Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig:

Roscoe-Schorlemmers ausführliches Lehrbuch der Chemie. Von J. W. Brühl. Band V, VI. Organische Chemie, Theil 3, 4. 1896—98. 8⁰.

M. E. Wadsworth in Houghton, Mich.:

Ein Fascikel kleine Schriften physikalischen Inhalts (in engl. Sprache). 1896—98.

Nicolaus Wecklein in München:

Euripidis fabulae. Vol. II, pars 4—6. Lipsiae 1899. 8⁰.

Giuseppe Wilpert in Rom:

Un Capitolo di storia del vestiario. Parte II. 1899. Fol.



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 4. November 1899.

1. Herr C. v. Voit macht eine Mittheilung: „Ueber eine Beobachtung an einem Hunde, welcher vorher längere Zeit gehungert hatte."

2. Herr K. A. v. Zittel hält einen Vortrag: „Ueber Wengener-, St. Cassianer- und Raibler-Schichten auf der Seiser Alp.

Ueber Wengener, St. Cassianer- und Raibler-Schichten auf der Seiser Alp in Tirol.

Von **Karl A. von Zittel.**

(Eingelaufen 18. Dezember.)

Der Schlern mit der angrenzenden Seiser Alp und dem Fassa-Thal gehören seit nahezu einem Jahrhundert zu den geologisch berühmtesten Gebieten der Alpen. Nachdem Brocchi (1811) und Marzari Pencati (1819) die Aufmerksamkeit der Geologen auf die Umgebung von Predazzo und das Fassathal gelenkt und Leop. v. Buch seine anregenden Abhandlungen über die Dolomitberge und die Entstehung des Dolomites nebst einer geognostischen Uebersichtskarte von Süd-Tirol veröffentlicht hatte, galt das Fassathal geradezu als ein classischer Boden, den jeder Geologe kennen zu lernen wünschte. Waren es anfänglich die vulkanischen Eruptivgesteine und deren Beziehungen zu den benachbarten Sedimentärgebilden, welche das Interesse fast ausschliesslich fesselten, so bildete später die Entdeckung der reichen Fundstätte von trefflich erhaltenen Versteinerungen bei St. Cassian einen Wendepunkt in den geologischen Forschungszielen von Süd-Tirol. Der Schlüssel zur Altersbestimmung der mesozoischen Schichtgesteine war jetzt gefunden und man konnte nunmehr an die schwierige Frage der Gliederung des „Alpenkalks“ und des Dolomits mit den darin befindlichen Einlagerungen anderer Gesteine denken. Obwohl die paläontologischen Monographien von Graf Münster, Wissmann und Klipstein schon frühzeitig ein ziemlich vollständiges Bild der reichen St. Cassianer Fauna gewährten, so

herrschten doch über deren Alter lange Zeit sehr abweichende Meinungen.

Im Jahre 1844 wurde die Reihenfolge der Triasablagerungen zwischen St. Ulrich im Grödner Thal und der Seiser Alp durch H. Emmrich[1]) in musterhafter Weise klar gelegt. Emmrich hatte während einer 14 tägigen Ferienreise nach Südtirol Gelegenheit bei dem Beneficiaten Clara in St. Michael eine Sammlung von Versteinerungen zu sehen, welche von der Seiser Alp herrührten und worin der scharfsinnige deutsche Geologe sofort eine erhebliche Anzahl typischer St. Cassianer Formen erkannte. Die charakteristischen Cidaris-Arten (Cid. baculifera, Buchi, decorata, flexuosa), ferner Encrinus liliiformis, varians und granuliferus, zahlreiche Brachiopoden und Muscheln (Cardita crenata, Nucula striata) und Schnecken liessen keinen Zweifel über die Deutung der sie enthaltenden Ablagerungen zu. Nur die Seltenheit von Cephalopoden war auffällig. Emmrich besuchte mit Clara die Fundstätten der Versteinerungen, welche theils von den südöstlichen Abhängen des Puflatsch aus mergeligem Gestein, theils aus schwarzem sandigem vulkanischem Tuff des Cipit- oder Tschapitbachs unter der Saldern Hütte stammten. Auch am Frombach hatte Beneficiat Clara in schwarzem Sandstein und Melaphyr-Tuff „riesig grosse Neriten“, Nucula, Austern, Echinidenstacheln und einige Ammoniten gefunden.

Nach Emmrich beschäftigte sich Ferd. von Richthofen eingehend mit den Ablagerungen der Seiser Alp. Seine berühmte Monographie[2]) bildet noch heute die beste Grundlage für die Geologie Süd-Tirols und enthält namentlich für die Seiser Alp die eingehendsten und genauesten Beobachtungen. Richthofen schlägt für die unter dem Melaphyr (Augitporphyr) des Puflatsch vorkommenden Halobienschichten, welche Em-

[1]) Emmrich H. Ueber die Schichtenfolge der Flötzgebirge des Gaderthals, der Seiser Alp und St. Cassians. Neues Jahrb. für Mineralogie etc. 1844, S. 791—803.

[2]) Richthofen Ferd. von, Geognostische Beschreibung der Umgegend von Predazzo, Sanct Cassian und der Seiser Alp. Gotha 1860.

mrich als untere Wengener Schichten bezeichnet hatte, den Namen Buchensteiner Schichten vor und beschränkt die eigentlichen Wengener Schichten auf die sandigen und tuffigen, zuweilen auch kalkigen, dunkelgefärbten Schiefer mit Halobia Lommeli, welche am Südgehänge des Puflatsch, am Frombach, Pitzbach, Frötschenbach und Tschapitbach überall den Melaphyr bedecken.

Ueber den Wengener Schichten folgen nach Richthofen vulkanische Tuffe, mit denen fast das ganze Plateau der Seiser Alp überschüttet ist. Sie erreichen eine Mächtigkeit von mehreren hundert Fuss und enthalten in ihrer unteren Abtheilung Einlagerungen von Korallenkalk (Cipitkalk) und mergelig kalkigen Schichten. Geologisch und paläontologisch bilden die Wengener Schichten und die Tuffe mit den eingelagerten kalkigen und mergeligen Bildungen nach v. Richthofen ein zusammengehöriges Ganzes von verschiedenartiger Facies. Enthalten die Cipitkalke fast nur Korallen und Encriniten, so finden sich in den mergelig-kalkigen Einlagerungen, welche namentlich in der tieferen Abtheilung der Tuffe am Südabhang des Puflatsch (Pflegerleite), am Pitzberg und bei der Tschapit-Alpe entwickelt sind, eine Anzahl charakteristischer Versteinerungen aus den St. Cassianer Schichten. Richthofen betont die Armuth an Gastropoden, Bivalven, Brachiopoden und Ammoniten und erwähnt hauptsächlich Crinoideen, Cidariten, Korallen und Spongien. In den Tuffen selbst finden sich nach v. Richthofen nur ganz vereinzelte mit St. Cassian übereinstimmende Versteinerungen.

Als „regenerirte Tuffe“ bezeichnet v. Richthofen gewisse am Frombach vorkommende Ablagerungen, die bereits von Emmrich beschrieben wurden und durch das ungemein häufige Vorkommen von Pachycardia rugosa ausgezeichnet sind. Ausser diesen Pachycardien erwähnt v. Richthofen nur noch eine grosse Natica[1]) und eine kleine thurmförmige Schnecke. Diese „regenerirten Tuffe“ werden mit den Pachycardien führenden

[1]) Ist Naticopsis neritea gemeint.

rothen sandig mergeligen Ablagerungen des Schlernplateau's verglichen und als Raibler-Schichten bestimmt. Dass v. Richthofen in dem Schlerndolomit nur eine abweichende Facies der St. Cassianer- und Raibler-Schichten erblickte und das mehrfache Eingreifen und Wechsellagern des Tuffs mit dem Dolomit nachwies, gehört zu den fruchtbarsten Anregungen für die Entwickelung der südtiroler Geologie.

Das genaueste Profil der Pufler Schlucht verdankt man W. v. Gümbel.[1] Seine Beobachtungen decken sich im Wesentlichen mit denen seiner beiden Vorgänger; doch weicht er in der Auffassung der Wengener Schichten sowohl von Emmrich als auch v. Richthofen ab. Während ersterer unter dieser Bezeichnung sowohl die unter als über dem Augitporphyr vorkommenden Halobien-Schichten zusammenfasst, v. Richthofen dagegen die unteren Halobien-Bänke zu den Buchensteiner Schichten rechnet und die Wengener Schichten erst über dem Augitporphyr beginnen lässt, beschränkt v. Gümbel den Namen Wengener-Schichten auf die Buchensteiner Schichten und die damit wechsellagernden Halobien-Schiefer und vereinigt die oberen Halobien-Schichten auf dem Plateau der Seiser Alp mit den darüber liegenden mergeligen, oolithischen und tuffigen Ablagerungen unter der gemeinsamen Bezeichnung St. Cassianer Schichten. Gümbel glaubte die ächte Halobia Lommeli liege in dem unteren Horizont und hielt die grossen feingestreiften Exemplare aus den oberen tuffigen und sandigen Schiefern für eine abweichende Species. Ueber die Entwickelung der als St. Cassianer Schichten zusammengefassten Mergel, Oolithe, Tuffe und Cipitkalke gibt v. Gümbel werthvolle Aufschlüsse. Er kannte auch die Fundstellen von Versteinerungen in den vulkanischen Tuffen des Tschapitbaches. Dagegen gelang es ihm nicht, die Pachycardien am Frombach wieder zu finden. Den Schlerndolomit erklärt Gümbel für eine abweichende Facies der St. Cassianer Schichten, bestreitet mit Schärfe dessen Ent-

[1] Sitzgsber. der k. bayer. Akad. d. Wissenschaften. Mathem.-physik. Classe 1873. S. 14—88.

stehung als Korallenriff und erklärt schliesslich die rothen, sandig-thonigen, versteinerungsreichen Ablagerungen mit Myophoria Kefersteini auf dem Schlernplateau als typische Raibler-Schichten.

Im Gegensatz zu v. Gümbel vereinigt Edm. v. Mojsisovics[1]) in seinem schönen Werk über die Dolomitriffe von Süd-Tirol (1879) die von dem bayerischen Geologen als Wengener-Schichten bezeichneten Ablagerungen (Knollenkalke, Pietraverde, Schiefer mit Daonella Taramellii, tyrolensis etc.) mit den Buchensteiner Schichten und lässt die eigentlichen Wengener Schichten mit Halobia (Daonella) Lommeli erst über dem Augitporphyr beginnen.

Die Halobien-Schiefer auf dem Plateau der Seiser Alp werden mit den Pachycardientuffen und Cipitkalken zusammengefasst und so scharf von den St. Cassianer Schichten geschieden, dass sogar die Grenze der zwei obertriasischen Hauptgruppen (norische und karnische Stufe) zwischen beide verlegt ist. v. Mojsisovics hält die St. Cassianer Schichten für eine ganz locale Bildung, deren zeitliche Aequivalente in fossilarmen Dolomiten und Kalken zu suchen seien. Das ganze Plateau der Seiser Alp ist nach v. Mojsisovics mit Wengener Schichten und vereinzelten Dolomithügeln bedeckt, ohne eine Spur von St. Cassianer- oder Raibler-Schichten.

Seit dem Erscheinen der „Dolomitriffe“ ist die Fauna der Raibler-Schichten (1889) in den Nord-Alpen durch v. Wöhrmann[2]) und jene des Schlernplateau's durch v. Wöhrmann und Koken[3]) eingehend bearbeitet worden. v. Wöhrmann betont die ausserordentlich grosse paläontologische Uebereinstimmung der unteren Abtheilung der nordalpinen Raibler- mit den St. Cassian-Schichten, während sich in der oberen

---

[1]) Mojsisovics v. Mojsvar Edm. Die Dolomit-Riffe von Süd-Tirol und Venetien. Wien 1879.

[2]) Jahrbuch d. k. k. geolog. Reichsanstalt in Wien. 1889. Bd. XXXIX. Heft 1.

[3]) Zeitschrift der deutschen geolog. Gesellschaft 1892. Bd. XLIV. S. 167—223.

Abtheilung der Cardita-Schichten allmählich die Fauna der Torer Schichten einstellt. Aus den Eruptivtuffen der Seiser Alp kannte v. Wöhrmann keine Versteinerungen.

So hatte man also bis in die neueste Zeit über die Tuff- und Mergelschichten der Seiser Alp dreierlei abweichende Meinungen. Emmrich und v. Richthofen erklärten sie für Repräsentanten der St. Cassianer Schichten, v. Gümbel fügt ihnen noch die oberen Halobienschichten bei, v. Mojsisovics vereinigt sie wie Gümbel mit dem oberen Halobien-Horizont, stellt sie aber in das Niveau der Wengener Schichten. v. Richthofen betrachtet ausserdem die „regenerirten Pachycardien Tuffe" des Frombach als isolirtes Vorkommen von Raibler Schichten.

Im Sommer 1888 besuchte ich mit einer grösseren Anzahl von Studirenden die Seiser Alp. Wir wählten den Aufstieg von Ratzes durch das Frötschen-Thal nach der Prosliner Alp, verfolgten sodann eine Strecke weit den Lauf des Tschapit- (Cipit-) Baches, um von da die Mahlknechthütte zu erreichen. Wenige Minuten vom Proslinerhaus führt eine Brücke über den Tschapitbach nach dem Touristensteig auf den Schlern. Im Bach stehen harte schwärzlich-grüne, sehr kieselreiche Kalkbänke an, die unmittelbar auf dem Augitporphyr liegen und das Niveau der Wengener Schiefer einnehmen. Unmittelbar darüber folgen graue Mergel mit Cipitkalkeinlagerungen und dunkelgrüne Eruptivtuffe. In letzteren fand Dr. Plieninger in der Nähe der Saldernhütte am Tschapitbach einen Block mit schön erhaltenen Versteinerungen, worin ich Pachycardia rugosa und einige andere Formen erkannte, die mehr Raibler- als St. Cassianer Arten ähnelten. Da wir uns aber unzweifelhaft an der Stelle befanden, von wo ein Theil der von Emmrich und v. Richthofen erwähnten St. Cassianer Versteinerungen herrührten, so schien mir eine genauere Untersuchung dieser Ablagerungen und namentlich eine systematische Ausbeutung der Versteinerungen wünschenswerth. Dies geschah zunächst durch den geschickten Sammler Jos. Schmuck und da seine erste Sendung eine unerwartet reiche Anzahl

wohl erhaltener Versteinerungen aus den bis dahin für äusserst arm gehaltenen Tuffen lieferte, so begaben sich Dr. Plieninger und Dr. Broili für 14 Tage und etwas später die Herrn Fred. Loomis und Alston Read für 9 Wochen nach der Seiser Alp.

Das Ergebniss dieser Untersuchungen war einerseits die Entdeckung einer Anzahl neuer Fundplätze von Versteinerungen, sowie die Herstellung einer detailirten geologischen Karte der Seiser Alp, des Schlerns und der angrenzenden Gebiete durch die Herrn Loomis und Alston Read.

Die Wengener Schichten mit Halobia (Daonella) Lommeli lassen sich als ein schmales Band von der oben genannten Brücke am Tschapitbach nach dem Südrand des Puflatsch verfolgen; sie stehen am oberen Ende der Puflerschlucht in ansehnlicher Mächtigkeit an und ziehen von da, stets den Augitporphyr bedeckend, nach dem Pitzbach, verlaufen darauf in nach Norden convexem Bogen zum Saltrie-Bach und folgen diesem in geringer Entfernung wieder als schmales Band bis in die Nähe der Mahlknecht-Senne. Das Gestein ist fast überall schieferig, bald thonig sandig, bald aus zerriebenem vulkanischem Material zusammengesetzt. Die Halobien (Daonellen nach Mojsisovics) sind in den Schiefern theilweise sehr gross und schön erhalten, die Ammoniten dagegen (Monophyllites Wengensis Klipst. sp., Nannites sp.) vollkommen platt gedrückt. Eine überraschend reiche Sammlung von prächtig erhaltenen, vielfach mit einem feinen Ueberzug von Seladonit versehenen Versteinerungen lieferte der harte dunkle Kieselkalk des Tschapitbachs, in welchem einzelne Bänke vollständig erfüllt sind mit Halobia (Daonella) Lommeli Wissm. und Posidonomya Wengensis Wissm. Neben diesen charakteristischen Leitmuscheln der Wengener Schichten konnte Herr Dr. Pompeckj folgende Cephalopoden bestimmen:

Aulacoceras sp.
Atractites subundatus Laube.
[1]) * Orthoceras campanile E. v. Mojs.
Nautilus cf. granuloso-striatus v. Klipst. sp.
* Nannites fugax E. v. Mojs.
" callogyrus n. sp.
* " Bittneri E. v. Mojs.
" planus n. sp.
* " aberrans E. v. Mojs. sp.
* Monophyllites Wengensis v. Klipst. sp.
* Megaphyllites obolus E. v. Mojs.
Gymnites (cf. Buddhaites Dien.) n. sp.
? Lecanites sp. sp.
Lobites n. sp.
* Joannites tridentinus E. v. Mojs.
" cf. diffissus v. Hau. sp.
* Trachyceras (Protrachyceras) Archelaus Laube.
* " (") Steinmanni E. v. Mojs.
* " (Anolcites) julium E. v. Mojs.
" (") cf. doleriticum E. v. Mojs.
* " (Sirenites) rutoranum E. v. Mojs.
* " (") regoledanum E. v. Mojs.
? Arpadites cf. Stracheyi E. v. Mojs.

Ferner verschiedene neue Formen z. Th. von alterthümlichem Gepräge.

Ueber den Wengener Schichten folgen, paläontologisch und petrographisch scharf geschieden, thonig-mergelige, von unreinen Kalkbänken unterbrochene und zuweilen oolithische Ablagerungen, die namentlich am Südrand des Puflatsch (an der Pflegerleite) und des Pitzberges entblösst sind und auch im Tschapitbach und am Schlernfuss beim Touristensteig anstehen. Sie enthalten ausschliesslich St. Cassianer Versteine-

---

[1]) Die mit * bezeichneten Arten giebt E. v. Mojsisovics aus seiner Zone des Trachyceras Archelaus an.

rungen, namentlich Stielglieder von Encrinus, Cidaritenstacheln, Brachiopoden und vereinzelte Lamellibranchiaten, Gastropoden, Korallen und Spongien. Der Erhaltungszustand stimmt in überraschender Weise mit den Fossilien von Stuores und Prelongei bei St. Cassian überein. Nach oben gehen diese Schichten ganz allmählich in die meist dunkelgrünen, zuweilen aber auch rostfarbigen und braunen Tuffe über, in welchen Bänke und isolirte Blöcke von Cipitkalk eingebettet liegen. Die namentlich im Tschapit- und Frombach aufgeschlossenen Tuffe enthalten an mehreren Stellen eine erstaunliche Fülle von prächtig erhaltenen, durchwegs beschalten, zuweilen noch mit Farben versehenen Versteinerungen, unter denen Gastropoden und Muscheln weitaus vorherrschen. In ausserordentlicher Häufigkeit findet sich überall Pachycardia rugosa. Obwohl die Fossilien in einem zuweilen ziemlich grobkörnigen Tuff liegen, der offenbar submarinen Eruptionen seinen Ursprung verdankt, so zeigen die Schalen der Mollusken doch selten Spuren von Abrollung. Die Lamellibranchiatenschalen sind allerdings meist getrennt, aber in der Regel unverletzt und die Schlösser tadellos erhalten. Bei den Gastropoden findet man weit mehr vollständige, mit Spitze und Mundsaum versehene Exemplare, als sogar an den berühmten Fundstätten bei St. Cassian. Im Ganzen dürfte sich die bis jetzt aus den Pachycardientuffen stammende Fauna auf circa 300 Arten belaufen, von denen durch die Herrn Dr. Plieninger, Dr. Broili, Dr. Loomis und Dr. Pompeckj folgende Species bestimmt wurden:[1])

Encrinus granulosus Mstr.
„ **Cassianus** Laube
„ varians Mstr.
Cidaris subcoronata Mstr.
„ **alata** Ag.

---

[1]) Die mit Fettschrift gedruckten Arten sind aus Raibler-, fast alle übrigen aus St. Cassianer Schichten bekannt. Eine monographische Beschreibung der Fauna aus den Pachycardien-Tuffen ist in Vorbereitung.

Cidaris **Buchi** Mstr.
" trigona Mstr.
Terebratula tenella Bittner.
Waldheimia carinthiaca Rothpletz.
" bipartita Mstr.
" porrecta Bittn.
" subangusta Mstr.
Rhynchonella cynodon Laube.
" Cornaliana Bittn.
" laurinea Bittn.
" sellaris Laube.
" semiplecta Mstr.
" semicostata Mstr.
" semicostata var. discrepans Bittn.
" subacuta Mstr.
" trinodosi Bittn.
Cyrtina Zitteli, Bittn.
Spiriferina Klipsteini Bittn.
" badiotica Bittn.
Spirigera **indistincta** Beyr.
" quadriplecta Mstr.
" quinquecostata Mstr.
" **Wissmanni** Bittn.
" trigonella Schloth.
Ostrea sp.
Avicula Kokeni v. Wöhrm.
" cfr. caudata Stopp.
" **arcuata** var. bifrons Bittn.
" Tofanae Bittn.
Cassianella planidorsata Mstr.
" **decussata** Mstr.
" Beyrichi Bittn.
Hoernesia bipartata Merian.
Gervillia cfr. **Bouéi** v. Hauer.
Hoferia duplicata Mstr. sp.
Pecten **Zitteli** v. Wöhrm.

Pecten tubulifer Mstr.
„ **subalternans** d'Orb.
Mysidioptera cfr. intertexta Bittn.
„ **incurvostriata** v. Wöhrm.
Myoconcha **parvula** v. Wöhrm.
Mytilus (mehrere Arten).
„ Maximiliani-Leuchtenbergensis Klipst.
Pinna **Tommasii** v. Wöhrm.
Macrodon cfr. strigillatum Mstr.
Nucula strigillata Goldf.
Trigonodus costatus v. Wöhrm.
„ **Rablensis** Gredler.
Pachycardia rugosa v. Hauer.
„ **Haueri** v. Mojs.
Myophoria Kefersteini Mstr.
„ **fissidentata** v. Wöhrm.
„ **Whatleyae** v. Buch.
„ Wöhrmanni Bittner.
„ aff. ornata Mstr.
„ Kokeni Bittn.
Myophoriopsis Richthofeni Stur.
Cardita crenata Goldf.
Gonodon **astartiformis** Mstr.
„ rostratus Mstr.
Dentalium **undulatum** Mstr.
Patella Joh. Boehmi v. Wöhrm.
Patella sp. nov. (grosse, radial gefaltete Form).
Acmaea campanaeformis v. Klipst.
Worthenia **canalifera** v. Klipst.
„ coronata Mstr.
„ Münsteri Klipst.
„ subgranulata Mstr.
„ turriculata Kittl.
Kokenella Laubei Kittl.
Clanculus Cassianus Wissm. sp.
Pachypoma insolitum Klipst. sp.

Pachypoma cfr. Haueri Kittl.
Delphinulopsis binodosa Mstr. sp.
Platychilina Wöhrmanni Koken.
Neritopsis ornata Mstr.
Naticella striatocostata Mstr.
Amauropsis Tirolensis Laube sp.
Naticopsis neritacea Mstr. var. (mit Farben, häufig im Frombach und Tschapitbach).
Naticopsis cfr. ladina Bittn.
" sp. div.
Hologyra alpina Koken.
Neritaria similis Koken.
Palaeonarica concentrica Mstr. sp.
Telleria umbilicata Kittl.
Macrochilina aff. Sandbergeri Laube.
Chemnitzia solida Koken.
" div. sp.
Coelostylina Stotteri v. Klipst. sp.
Eustylus Konincki Mstr. sp.
Euchrysalis fusiformis Mstr. sp.
Katosira fragilis Koken.
Loxonema Lommeli Mstr. sp.
" **obliquecostata** Bronn sp.
" supraplecta Mstr. sp.
Undularia subpunctata Mstr. sp.
Pustularia Alpina Eichw. sp.
Scalaria triadica Kittl.
Tretospira multispirata v. Wöhrm.
Joannites Klipsteini E. v. Mojs.
Trachyceras cfr. Hofmanni Boeckh.
Arpadites cfr. segmentatus E. v. Mojs.
Celtites laevidorsatus v. Hau. sp.
Pleuronautilus sp. (aus der Verwandtschaft des N. Pichleri v. Hau.).
Orthoceras sp.

Aus dieser Liste geht hervor, dass die Pachycardien-Tuffe der Seiser Alp eine höchst bemerkenswerthe Mischfauna enthalten, zusammengesetzt aus typischen St. Cassianer- und Raibler-Arten. Wenn die Zahl der ersteren auch bedeutend überwiegt, so erklärt sich dies leicht aus dem Umstand, dass eben die St. Cassianer Fauna unendlich viel reicher als die Raibler ist und darum auch weit mehr Vergleichspunkte bietet. Enthält die Liste auch nur 39 Raibler-Arten, so bilden diese reichlich die Hälfte aller bis jetzt aus den rothen Schichten des Schlernplateaus bekannten Formen und voraussichtlich dürfte sich ihre Zahl bei genauerer Untersuchung unseres reichen Materials noch etwas vermehren. Bedenkt man ferner, dass sich gerade einzelne bis jetzt nur aus Raibler-Schichten bekannte Formen, wie Myophoria Kefersteini, M. fissidentata, M. Whatleyae, Pachycardia Haueri, Trigonodus Rablensis und costatus, Tretospira multispirata, Platychilina Wöhrmanni, Katosira fragilis u. a. durch Häufigkeit auszeichnen, so macht sich der Charakter unserer Fauna als eine Mischung aus St. Cassianer- und Raibler-Elementen ganz besonders bemerkbar.

Schon v. Wöhrmann hatte in seiner Monographie der nordalpinen Raibler-Fauna (1889) die grosse Uebereinstimmung mit St. Cassian betont und aus dem paläontologischen Befund gefolgert, dass die nordalpinen Cardita-Schichten zum grössten Theil den St. Cassianer, die Schichten mit Ostrea montis caprilis aber den Torer Schichten bei Raibl entsprechen.

Nach Bearbeitung der Versteinerungen aus den rothen Schichten des Schlernplateau's (1892) kamen v. Wöhrmann und Koken zum Resultat, dass dieselben nicht, wie bis dahin angenommen wurde, den Torer-Schichten gleichzustellen seien, sondern einen tieferen Horizont einnehmen, welcher dem oberen Theil der Cardita-Schichten in den Nord-Alpen und den Lagern mit Myophoria Kefersteini bei Raibl äquivalent seien.

Die Zusammensetzung der Pachycardientuff-Fauna beweist, dass eine scharfe paläontologische Trennung zwischen St. Cassianer- und Raibler-Schichten nicht möglich ist. Wir haben es hier mit der Fauna einer einzigen geologischen Stufe zu thun, in

welcher allerdings die rein St. Cassianer Typen zuerst erscheinen, sich aber bald mit solchen aus dem Myophorien-Horizont der Raibler-Schichten vermischen, die alte schon von Merian und Stur vertretene Meinung, dass St. Cassianer- und Raibler-Schichten identisch seien, gewinnt wieder festen Boden.

An den wenigen Stellen, namentlich im Enneberger- und Gaderthal, wo die St. Cassianer Fauna typisch entwickelt erscheint, ist sie allerdings von den Myophorien-Schichten fast überall durch zwischengelagerte Dolomite oder Kalkmassen getrennt. Die zahlreichen genauen Profile von Miss Ogilvie bestätigen diese Thatsache an vielen Stellen. In der Lombardei und Venetien folgen auf die Wengener- (Halobien)-Schichten vielfach fossil-arme Dolomite und Kalksteine, die wieder von Raibler-Schichten bedeckt werden.

Auch bei Raibl liegt zwischen den schwarzen Fischschiefern mit Pflanzenresten, die vielfach als Vertreter der Wengener Schichten gelten, und den Myophoria Kefersteini-Schichten ein 3—400 Meter mächtiger Complex von Kalkstein und dunkeln Schiefern, worin vereinzelte St. Cassianer Versteinerungen vorkommen. Eine so innige Verknüpfung der St. Cassianer und Raibler Fauna wie in den Pachycardien-Tuffen der Seiser Alp ist aber bis jetzt noch nie beobachtet worden. Sie ist für die ganze Gliederung der alpinen Trias von höchster Wichtigkeit, denn wie bereits Benecke[1]) mit vollem Recht bemerkt, bilden die Cardita- oder Raibler Schichten den festen Horizont, um welchen sich alle Schwankungen in der Classification der oberen Trias in den letzten Dezennien bewegten. Heute wird dieses „Pivot“ durch Hinzufügung der St. Cassianer Schichten noch bedeutend verstärkt, damit aber zugleich auch die ganze Trias-Gliederung der Alpen vereinfacht.

Hält man an der alten Dreitheilung der Trias in Buntsandstein, Muschelkalk und Keuper fest und es scheint mir kein triftiger Grund vorzuliegen, sie entweder durch eine Anzahl paläontologischer Zonen zu ersetzen, die dann wieder in

---

[1]) Sitzgsber. der k. Akad. d. Wissenschaften in Wien Cl. 1892. S. 221.

eine Menge mit neuen Namen ausgestatteten Unterstufen, Stufen und Serien gruppirt werden oder an ihre Stelle eine auf petrographische Merkmale und namentlich auf den Reichthum oder Mangel an Kalkstein basirte Eintheilung treten zu lassen, so liefern die oberen Buchensteiner Schichten (Subnodosus-Zone) nach den übereinstimmenden Untersuchungen von v. Mojsisovics, Bittner, v. Gümbel, Rothpletz, Benecke und Tornquist[1]) als Aequivalente des oberen Muschelkalks einen festen Orientirungshorizont. Zwischen den Buchensteiner Schichten und St. Cassian-Raibl liegen in den Süd-Alpen überall entweder die Wengener Schichten oder die Esino- und Mormolata-Kalke, resp. die diese ersetzenden Dolomite.

In den bayerischen und nordtiroler Alpen repräsentiren nach v. Gümbel[2]) die Partnach-Schichten sowohl Buchensteiner und Wengener als auch einen Theil der St. Cassianer Schichten und werden von Wettersteinkalk bedeckt, welchem die Cardita (Raibler)-Schichten aufruhen. Paläontologisch stimmen die Cardita-Schichten in ihrem unteren und mittleren Theil entschieden mit den Pachycardien-Tuffen der Seiser Alp überein, die richtige Bestimmung der Aequivalente der Partnachschichten bedarf noch weiterer Aufklärung.

Vielumstritten ist die Frage nach der Eintheilung der Wengener Schichten. Gehören sie zum Muschelkalk oder Keuper? Stratigraphisch nehmen sie unzweifelhaft die Stelle der Lettenkohlengruppe oder der darunter liegenden Trigonodus-Dolomite der germanischen Triasprovinz oder auch beider zusammen ein. Vielleicht repräsentiren sie auch nur einen Theil und zwar den unteren der Lettenkohlengruppe. Paläontologisch lässt sich die Frage nicht lösen, da die typischen Wengener Schichten vorzugsweise marine Fossilien und nur sehr indifferente Reste von Landpflanzen beherbergen.

Vergleicht man die Cephalopoden aus solchen Localitäten, wo die Wengener Schichten in ihrer typischen Entwickelung auftreten, wie bei Wengen, Corfara, auf der Seiser Alp und bei

[1]) Zeitschrift d. deutschen geolog. Gesellschaft 1898. L. S. 637–694.
[2]) Geologie von Bayern II. S. 58.

Prezzo in Indicarien, so zeigt sich eine sehr geringe Uebereinstimmung mit den Formen aus den oberen Buchensteiner Schichten, aber auch keine sonderlich grosse mit jenen aus St. Cassian. Immerhin spricht die reichliche Entwickelung von Trachyceras und Nannites, das Vorhandensein von Lobites und Joannites, der Mangel an Ceratiten und die Seltenheit von Ptychites mehr für eine Verwandtschaft mit der St. Cassianer als mit der Buchensteiner Fauna. Auch stratigraphisch sind die Wengener und St. Cassianer Schichten in den Süd-Alpen meist innig miteinander verbunden.

Für die Altersbestimmung der Wengener Schichten gewähren die Verhältnisse in Nieder-Oesterreich den erwünschtesten Aufschluss. Nachdem schon 1863 und 1864 die Aufnahmen in der Gegend von Lunz und Lilienfeld unter Lipold und Stur zur Aufstellung der kohlenführenden Lunzer Schichten, der diese bedeckenden Opponitzer Schichten und der an ihrer Basis befindlichen Reingrabener und Gösslinger Schichten geführt hatte und nachdem in den zwei letzteren Versteinerungen der Wengener Schichten nachgewiesen waren, schien das Alter der Wengener Schichten gesichert, indem nach Stur die Lunzer Schichten die Flora der Lettenkohle und die Opponitzer Schichten die Fauna der oberen Cardita und Raibler Schichten enthalten. Unter den Aonschiefern liegt theils ächter Muschelkalk, theils mergeliger Kalkstein mit Spiriferina Köveskalliensis, Rhynchonella trinodosi, Aulacothyris angusta Schloth. sp. und Koninckina Leonhardi Wissm.[1]) Letzterer entspricht offenbar den Partnach-Schichten der bayerischen Alpen.

Bittner[2]) betrachtet in Uebereinstimmung mit Stur die Lunzer Schichten als Aequivalente der ausseralpinen Lettenkohle und der unteren und mittleren Cardita-Schichten in den bayerischen und nordtiroler Alpen. Die Opponitzer Schichten werden den oberen Raibler (resp. Torer) und Cardita-Schichten

---

[1]) Vgl. Bittner Jahrb. d. k. geolog. Reichsanstalt 1893. Verhandl. S. 81, 82.

[2]) Jahrb. k. k. geolog. Reichs-Anstalt 1894. S. 266 etc. 1897. S. 429.

gleichgestellt. Was unter den Lunzer Schichten liegt (Partnach-Schichten, Wettersteinkalk, Wengener-, St. Cassianer-, Buchensteiner-Schichten, sammt Esinokalk, Schlerndolomit und Marmolatakalk) gehört nach Bittner zum oberen Muschelkalk oder zur „ladinischen" Stufe.

Benecke[1]) hat sich neuerdings gegen diese Auffassung ausgesprochen und die Begrenzung der Lettenkohlengruppe nebst deren Beziehungen zum Muschelkalk und Keuper festzustellen versucht. Ausgehend von dem Gesichtspunkt, dass die marinen Versteinerungen für die Altersbestimmung der sedimentären Bildungen in erster Linie ausschlaggebend sind, zeigt Benecke, dass sowohl der Trigonodusdolomit an der Basis, als auch der Grenzdolomit im Hangenden der Lettenkohle im Wesentlichen eine Muschelkalkfauna enthalten und dass darum der ganze Complex zwischen diesen beiden Dolomiten besser zum Muschelkalk, als zum Keuper gestellt werde. Erst über dem Grenzdolomit mit dem Gypskeuper, welcher Myophoria Kefersteini und Myophoriopsis (Corbula) Rosthorni enthält, beginnt nach Benecke der eigentliche Keuper, über dessen marine Fauna freilich, wenn wir von der obersten Abtheilung, dem Rhät, absehen, fast nichts bekannt ist. Philippi[2]) weicht bezüglich des Gypskeupers und der Bleiglanzbank von Benecke ab, indem er beide noch zur Lettenkohle rechnet. Auch meiner Ansicht nach kann man den Gypskeuper und die Bleiglanzbank ebenso gut zur Lettenkohle stellen, als zum Keuper und die Lettenkohle sogar noch ausdehnen bis zum Schilfstein; denn zwischen der Flora der Lettenkohle und des Schilfsandsteins ist der Unterschied so geringfügig, dass beständig Verwechselungen dieser Horizonte vorkommen. Dehnt man aber den Begriff der Lettenkohle nach oben soweit aus, so bleibt freilich für den eigentlichen Keuper nur die Region der Stein-

---

[1]) Benecke W. Lettenkohlengruppe und Lunzer Schichten. Berichte d. naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i/B. Bd. X. Heft 2.

[2]) Die Fauna des unteren Trigonodus-Dolomits etc. Jahreshefte d. Ver. f. vaterl. Naturkunde in Würtemberg. 1898. S. 216.

mergel des Stubensandsteins, der Zanclodonmergel und des Rhät übrig. Dass die Wengener Schichten vielfach durch eine Kalk- und Dolomit-Facies (Wettersteinkalk, Schlerndolomit, Esino- und Marmolatakalk) ersetzt sind, wird jetzt wohl von allen Kennern der Alpen-Geologie anerkannt. Wichtige Belege für diese Ansicht liefern die neuesten Monographien des Marmolata- und Elinokalkes von Joh. Böhm, Salomon und Kittl.

Nach der Zusammensetzung der Fauna des Pachycardien-tuffs wird man wohl in Zukunft auf eine scharfe Scheidung von St. Cassianer- und Raibler-Schichten verzichten müssen; jedenfalls ist es unstatthaft, zwischen diese beiden Horizonte die Grenzlinie zweier grösserer Stufen laufen zu lassen.

Die Ablagerungen von den Wengener Schichten an bis herauf zu den Torer Schichten bilden eine natürliche Einheit, welche etwa dem ausseralpinen Complex zwischen Trigonodus-Dolomit und Horizont Beaumont, also im Wesentlichen der Lettenkohlengruppe und dem unteren Keuper bis herauf zum Schilfsandstein entspricht.

Auf diese Gruppe passt weder die Bezeichnung karnisch, noch norisch, noch ladinisch.

Berücksichtigt man mit Benecke zur Parallelisirung hauptsächlich die ausseralpine Trias, so müsste der Muschelkalk demnach bis zum Schilfsandstein erweitert werden, was freilich dem historischen Begriff Muschelkalk wenig entspräche. In den Alpen, wo reiche marine Faunen die verschiedenen Stufen der oberen Trias charakterisiren, beginnt mit den Wengener Schichten offenbar eine bemerkenswerthe faunistische Umgestaltung, welche namentlich bei den Ammoniten in die Augen fällt. Ich würde es darum für zweckmässiger halten den Keuper mit den Wengener Schichten und den damit gleichaltrigen ausseralpinen Bildungen zu beginnen, als dem Muschelkalk eine bis zum Schilfsandstein reichende Ausdehnung zu gestatten.

Für den mittleren Keuper würden Hauptdolomit und Hallstaetter Kalk das zeitliche Aequivalent bilden und dass es sich hier in der That um das Erscheinen einer neuen marinen

Fauna handelt, das beweist ein Blick auf die prächtigen Monographien von v. Mojsisovics über die Cephalopoden und von Koken über die Gastropoden der Hallstaetter Schichten. Die Beziehungen zu den reichen Faunen der Raibler, St. Cassianer und Wengener Schichten, sowie zu deren Kalkfacies von Esino und der Marmolata sind in der That so geringfügig, dass zwischen Hauptdolomit nebst Hallstaetter Kalk und Raibler Schichten füglich eine Grenzlinie von grösserer Bedeutung gelegt werden darf.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1899.

Der Präsident der Akademie, Herr K. A. v. Zittel, eröffnet die Sitzung mit einer Rede: Rückblick auf die Gründung und die Entwickelung der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften im 19. Jahrhundert, welche in den Schriften der Akademie erscheinen wird.

Dann verkündigten die Classensekretäre die Wahlen und zwar der Sekretär der II. Classe, Herr C. v. Voit, die der math.-physikal. Classe.

Von der mathematisch-physikalischen Classe wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätiget:

I. zu ausserordentlichen Mitgliedern:

1. Dr. Hermann Ebert, ord. Professor der Physik an der k. technischen Hochschule dahier;
2. Dr. Sebastian Finsterwalder, ord. Professor der Mathematik an der k. technischen Hochschule dahier;
3. Dr. August Rothpletz, ausserord. Professor für Geologie an der k. Universität dahier;

II. zu correspondirenden Mitgliedern:

1. Eugenio Beltrami, Professor der math. Physik an der Universität und Präsident der R. Accademia dei Lincei in Rom;
2. Gaston Darboux, Professor der höheren Geometrie an der Sorbonne und Mitglied der Académie des Sciences in Paris;
3. Dr. Gustav Retzius, Professor der Zoologie und Präsident der Akademie der Wissenschaften in Stockholm;
4. Edouard Bornet, Botaniker und Mitglied der Académie des Sciences in Paris;
5. Sir George King, Botaniker und früher Superintendent des botanischen Gartens in Calkutta;
6. Dr. Eduard Strasburger, Geh. Regierungsrath und Professor der Botanik an der Universität Bonn;
7. Alexander Karpinsky, kais. russischer Staatsrath und Direktor der russischen geologischen Landesanstalt in St. Petersburg.

Hierauf hielt das ord. Mitglied der math.-physikal. Classe, Herr Dr. phil. Karl v. Orff, k. Generalmajor a. D., die Festrede: Ueber die Hülfsmittel, Methoden und Resultate der Internationalen Erdmessung, welche ebenfalls in den Schriften der Akademie veröffentlicht wird.

Sitzung vom 2. Dezember 1899.

1. Herr H. Seeliger legt eine Abhandlung: „Zur Vertheilung der Fixsterne am Himmel“ vor.

2. Herr Joh. Ranke demonstrirt einen ihm von Herrn W. His, Professor der Anatomie an der Universität Leipzig, zugesandten Schädel bezüglich seiner Abhandlung: „Ueber die überzähligen Knochen der menschlichen Schädeldecke.“

3. Herr F. Lindemann macht eine Mittheilung: „Zur Theorie der automorphen Funktionen.“

4. Herr Ad. v. Baeyer hält einen Vortrag: „Ueber die Beckmann'sche Umlagerung.“ Derselbe wird anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

Zur Vertheilung der Fixsterne am Himmel.

Von **H. Seeliger.**

(Eingelaufen 2. Dezember.)

In meinen früheren Untersuchungen über die scheinbare und räumliche Vertheilung der Fixsterne,[1]) habe ich die hellsten Sterne der Bonner Durchmusterung (D. M.) bis zur Grösse 6.5, also ungefähr die mit freiem Auge sichtbaren Sterne, in eine einzige Gruppe zusammengefasst und zwar aus dem Grunde, weil die Anzahl dieser Sterne verhältnissmässig klein ist und zu befürchten war, dass etwaige Gesetzmässigkeiten in ihrer Vertheilung nicht deutlich genug erkennbar sein werden. Ferner war aus gleichem Grunde zu erwarten, dass sich die Beziehung zwischen den Bonner Schätzungen und einer photometrischen Scala nicht mit derselben Sicherheit ableiten lassen wird, wie bei den schwächeren Sternen. Ausserdem wird man bald die Vertheilung der hellen Sterne des nördlichen Himmels mit viel grösserer Sicherheit studiren können, wenn nämlich die Potsdamer photometrische Durchbeobachtung der D. M. Sterne bis zur Grösse 7.5 vollendet sein wird. Für die Südhälfte des Himmels fehlt zunächst die Aussicht auf eine Beobachtungsreihe von ähnlicher Zuverlässigkeit und die vorhandene, welche Herr Bailey[2]) im Auftrag des Harvard College Observatory

---

[1]) Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1884 S. 520—548; 1886 S. 219—251; 1898 S. 147—180; Abhandlungen der Münchener Akademie 1898 (Bd. XIX, III. Abth.) S. 564—629. Im folgenden werden diese Arbeiten nur mit ihrer Jahreszahl citirt.

[2]) Annals of the Astron. Observatory of the Harvard College. Vol. 34.

ausgeführt hat, unterliegt, wie Herr Kempf[1]) zeigte, sehr berechtigten Einwänden. Für die hellen Sterne liefert indessen die Harvard Photometry[2]) (H.) einigen, wenn auch keineswegs gleichwerthigen Ersatz für die noch unvollendete Potsdamer Arbeit. Bis zu den Sternen der nördlichen Halbkugel von der Grösse $5^1/_2$ dürfte H. nahezu vollständig sein, dagegen sind gewiss nicht alle Sterne 6.0 Grösse angeführt. Für die hellsten Sterne bis zu jener Grösse wird man die Harvard Photometry zum Studium der Vertheilung der Fixsterne unbedenklich in Anspruch nehmen können, wie es u. A. auch Herr Schiaparelli gethan hat. Schon bei den Sternen 6.0 wird man indessen damit nicht ohneweiteres auskommen. Ihre Verwendung bietet ferner Schwierigkeiten dar u. A. deshalb, weil die Helligkeitsschätzungen der hellen Sterne der D. M. bedeutenden systematischen Fehlern unterworfen sind, welche durch Vergleichung mit H. allein nicht genügend sicher ermittelt werden können. Indessen schien es mir doch nicht überflüssig zu sein, meine früheren Untersuchungen nach dieser Richtung zu ergänzen, wenngleich ein nennenswerther Erfolg für die Frage nach der räumlichen Vertheilung der Sterne auf diesem Wege kaum zu erwarten war. Eine solche Ergänzung hat mit der Vergleichung der D. M. Grössen und den Helligkeitsangaben der Harvard Photometry zu beginnen, was übrigens an sich einiges Interesse darbieten dürfte.

Herr Kobold[3]) hat kürzlich an der Hand der beiden genannten amerikanischen photometrischen Arbeiten die Vertheilung der hellen Sterne bis zur Grösse 5.7 untersucht und kam zu dem Ergebniss, dass diese sich in mancher Beziehung anders verhalten, wie die schwächeren Sterne der D. M. Für diese letzteren hatte ich gefunden, dass die Verhältnisse a der Anzahl der Sterne von den hellsten bis zu denen von einer

[1]) Vierteljahrsschrift der Astr. Ges. Jahrg. 31, S. 191.

[2]) Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College Vol. XIV.

[3]) Vierteljahrsschrift der Astron. Ges. Jahrgang 34.

bestimmten Grösse zu der Anzahl der Sterne bis zu einer etwas kleineren Helligkeit mit der Annäherung an die Milchstrasse nicht unbeträchtlich zunehmen. Die hellen Sterne zeigen nach Herrn Kobold diese Eigenschaft nicht, zum Theil vielmehr das Gegentheil. An sich ist dieses interessante Ergebniss nicht auffallend, weil man von vornherein keinen Grund hat anzunehmen, dass die für die telescopischen D. M. Sterne geltenden Vertheilungsgesetze auch für die hellen Sterne gültig bleiben. Ferner verläuft die Zunahme der a mit der Annäherung an die Milchstrasse keineswegs ganz gleichmässig und deutliche Schwankungen der Einzelwerthe der a scheinen reeller Natur zu sein, wie es auch nicht unwahrscheinlich ist, dass sie für die schwächsten Sterne der D. M. bedeutender ist, wie für die helleren.

Die Untersuchung der Grössenschätzungen der hellen Sterne in der D. M. ergeben für sie grosse und zum Theil auffallende Ungleichförmigkeiten. Diese machten mich darauf aufmerksam, dass manche der durch eine sehr einfache Behandlung der Abzählungsergebnisse der D. M. gefundenen Resultate nicht genügend fest begründet sind, da ihre Ableitung sich auf eine grössere Zuverlässigkeit der Bonner Schätzungen stützt, als diesen wahrscheinlich zuerkannt werden darf. Es erschien mir deshalb nicht überflüssig, den Verlauf der a auch für die telescopischen Sterne der D. M. durch eine andere Behandlungsweise des Materiales von Neuem zu untersuchen. Schliesslich ist freilich im Grossen und Ganzen eine Bestätigung des früheren Resultates aus den im Folgenden mitzutheilenden Rechnungen hervorgegangen. Die Zunahme der a mit der Annäherung an die Milchstrasse scheint mir deshalb für die Sterne von der Grösse 6.5 bis 9.0 eine ziemlich feststehende Thatsache zu sein, wenn sich auch der Betrag dieser Zunahme nicht genau aus der D. M. allein ermitteln lassen dürfte.

Die folgende Abhandlung, die eine Reihe ziemlich weitläufiger und zeitraubender Abzählungen erforderte, beschäftigt sich, den vorstehenden Andeutungen gemäss, mit folgenden Fragen:

Im ersten Abschnitt werden die Beziehungen zwischen den Grössenschätzungen der nördlichen Sterne von der Grösse 5 und 6 in der D. M. mit den Angaben der H. aufgesucht. Es wird weiter die Vertheilung dieser Sterne, sowohl nach der D. M. als auch nach H. besprochen. Im zweiten Abschnitt wird die Vertheilung der telescopischen Sterne der D. M. in ihrer Abhängigkeit von der Lage zur Milchstrasse von Neuem betrachtet. Es sei hierbei noch bemerkt, dass bei allen folgenden Rechnungen die Eintheilung des Himmels in dieselben IX je 20 Grad breiten Zonen, deren mittelste (V) die Milchstrasse enthält, beibehalten worden ist, die ich in allen meinen früheren Publicationen über die Vertheilung der Fixsterne angewendet habe.

1.

Die Vergleichungen der D. M. Grössen mit der Harvard Photometry geschah so, dass für jedes Zehntel der D. M. Grösse zwischen 5.3 und 6.2, die Differenz D.M. — H. aufgesucht wurde. Diese Differenzen sind wieder nach den einzelnen Milchstrassenzonen I bis VIII geordnet und innerhalb der einzelnen Zonen in Unterabtheilungen, kleinere oder grössere Bezirke in Rectascension umfassend, je nachdem mehr oder weniger Vergleichsobjecte vorhanden waren. Für Zone VIII war eine solche Theilung zwecklos, da in ihr innerhalb der betrachteten Helligkeitsgrenzen nur 24 Sterne photometrisch bestimmt sind. Zone I liegt zwischen $12^h\,0^m$ und $14^h\,40^m$ Æ, der grössere Theil innerhalb noch engerer Grenzen, weshalb sie in der nun folgenden Zusammenstellung der Differenzen D. M. — H. ebenso wenig wie Zone VIII erscheint, vielmehr nur in den weiter unten folgenden Mittelwerthen. Neben den Differenzen stehen in den folgenden Tabellen die Anzahlen der concurrirenden Sterne.

AR	$5^m.3$		$5^m.4$		$5^m.5$		$5^m.6$		$5^m.7$		$5^m.8$		$5^m.9$		$6^m.0$		$6^m.1$		$6^m.2$	
									Zone II.											
h h																				
9—11	2	−0.17	—	—	2	+0.34	1	−0.12	2	+0.12	2	−0.02	—	—	12	+0.07	2	+0.34	7	+0.12
11—12	2	−0.36	1	−0.14	3	−0.03	—	—	3	+0.19	3	+0.16	1	−0.24	19	+0.18	3	+0.27	5	+0.33
13—14	4	−0.13	—	—	7	+0.12	—	—	6	+0.06	8	+0.17	1	−0.06	14	+0.11	5	+0.13	7	+0.29
15—16	—	—	—	—	8	−0.12	—	—	2	+0.32	1	+0.03	2	−0.20	12	−0.03	2	−0.04	4	+0.43
Mittel	8	−0.20	1	−0.14	20	+0.02	1	−0.12	13	+0.14	14	+0.13	4	−0.17	57	+0.09	12	+0.17	23	+0.27
									Zone III.											
7—9	3	+0.01	—	—	3	+0.13	1	+0.07	4	+0.15	7	+0.18	1	+0.16	16	+0.16	2	+0.33	4	+0.30
9	5	−0.26	—	—	5	+0.17	3	+0.09	2	+0.49	6	+0.07	1	+0.56	10	+0.21	1	+0.28	6	+0.19
10	—	—	—	—	1	−0.44	—	—	1	−0.17	2	+0.11	—	—	4	−0.13	—	—	4	+0.17
11—13	2	+0.03	—	—	—	—	—	—	—	—	4	+0.02	—	—	9	−0.18	—	—	3	−0.19
14—15	2	−0.05	—	—	3	+0.37	—	—	—	—	4	+0.24	1	+0.51	13	+0.14	4	+0.26	4	0.00
16	4	+0.35	—	—	3	+0.04	2	−0.14	5	+0.20	3	−0.04	1	+0.39	24	+0.11	4	+0.14	7	+0.35
17	—	—	—	—	5	−0.16	—	—	2	+0.07	3	+0.07	—	—	12	+0.17	—	—	3	+0.10
Mittel	16	+0.01	—	—	20	+0.06	6	+0.01	14	+0.18	29	+0.10	4	+0.41	88	+0.10	11	+0.23	31	+0.17
									Zone IV.											
0—5	1	−0.10	—	—	3	−0.08	2	−0.04	3	+0.30	2	0.00	1	+0.03	11	+0.09	2	+0.10	2	+0.30
6	—	—	—	—	4	+0.16	—	—	2	+0.37	2	+0.32	—	—	10	+0.16	2	+0.34	2	+0.15
7	4	+0.06	4	+0.24	5	+0.02	—	—	3	+0.35	9	+0.35	1	−0.07	21	+0.15	1	−0.24	4	+0.26
8	—	—	—	—	—	—	2	−0.02	2	+0.43	1	+0.17	—	—	9	+0.19	1	+0.32	2	+0.14
17	2	+0.16	—	—	7	−0.10	—	—	4	+0.19	3	−0.01	1	+0.02	19	+0.06	1	+0.10	4	+0.11
18	5	+0.10	—	—	12	+0.06	1	−0.11	3	+0.03	8	+0.18	1	+0.26	19	+0.03	7	+0.18	5	+0.28
19	4	+0.28	2	+0.17	4	+0.51	1	−0.40	—	—	3	+0.14	—	—	6	+0.18	2	+0.20	6	+0.03
20	1	−0.15	—	—	2	+0.18	—	—	—	—	3	+0.19	1	+0.08	6	−0.07	1	0.00	2	+0.18
21—0	—	—	—	—	3	+0.14	—	—	2	+0.18	—	—	—	—	6	+0.13	1	+0.32	—	—
Mittel	17	+0.11	6	+0.22	40	+0.08	6	−0.10	19	+0.25	31	+0.21	5	+0.06	107	+0.10	18	+0.17	27	+0.17

AR	m 5.3		m 5.4		m 5.5		m 5.6		m 5.7		m 5.8		m 5.9		m 6.0		m 6.1		m 6.2	
									Zone V.											
h 0	—	—	1	− 0.12	1	− 0.10	—	—	—	—	2	+ 0.45	—	—	6	+ 0.15	1	+ 0.71	—	—
1	—	—	—	—	1	+ 0.28	—	—	—	—	—	—	1	+ 0.37	8	+ 0.31	2	+ 0.40	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	2	+ 0.54	—	—	1	+ 0.13	4	+ 0.13	—	—	1	+ 0.24
3	2	+ 0.43	—	—	—	—	—	—	1	+ 0.24	1	+ 0.71	—	—	12	+ 0.18	—	—	2	+ 0.47
4	—	—	2	− 0.02	2	− 0.17	2	+ 0.32	2	+ 0.32	3	+ 0.14	—	—	7	+ 0.39	1	+ 0.70	1	+ 0.66
5	4	+ 0.14	—	—	4	+ 0.13	1	+ 0.52	3	+ 0.34	1	+ 0.46	2	+ 0.64	19	+ 0.29	2	+ 0.59	1	+ 0.44
6—7	2	+ 0.40	—	—	2	+ 0.55	—	—	1	+ 0.26	6	+ 0.24	2	+ 0.35	11	+ 0.31	2	+ 0.33	2	+ 0.61
18—19	4	+ 0.09	4	+ 0.15	11	+ 0.03	1	+ 0.38	5	+ 0.28	19	+ 0.15	7	+ 0.25	20	+ 0.01	6	+ 0.29	6	+ 0.22
20	1	+ 0.73	3	+ 0.16	7	+ 0.12	2	+ 0.19	3	+ 0.34	3	+ 0.05	2	+ 0.27	26	+ 0.04	4	+ 0.21	8	+ 0.28
21	2	− 0.03	1	+ 0.11	4	− 0.26	2	+ 0.11	2	+ 0.42	3	− 0.05	2	+ 0.34	7	+ 0.24	—	—	3	+ 0.32
22	1	+ 0.07	—	—	2	+ 0.39	1	+ 0.31	—	—	1	+ 0.25	3	+ 0.46	13	+ 0.15	1	− 0.36	—	—
23	3	+ 0.19	1	− 0.24	2	− 0.15	1	− 0.53	—	—	—	—	1	+ 0.37	10	+ 0.20	1	+ 0.71	2	+ 0.57
Mittel	19	+ 0.20	12	+ 0.07	36	+ 0.06	10	+ 0.19	19	+ 0.34	39	+ 0.18	21	+ 0.34	143	+ 0.17	20	+ 0.40	26	+ 0.34
									Zone VI.											
0	—	—	1	0.00	3	− 0.20	—	—	2	+ 0.15	3	+ 0.51	1	0.00	7	+ 0.16	—	—	1	+ 0.53
1	1	+ 0.06	1	+ 0.46	—	—	—	—	2	+ 0.37	3	+ 0.22	—	—	8	+ 0.16	1	+ 0.66	3	+ 0.41
2	—	—	—	—	—	—	3	+ 0.11	1	+ 0.03	2	+ 0.25	—	—	5	+ 0.12	2	+ 0.61	1	+ 0.60
3	—	—	2	+ 0.40	2	− 0.14	—	—	5	+ 0.19	3	+ 0.27	—	—	12	+ 0.31	1	+ 0.06	6	+ 0.47
4	4	+ 0.43	1	+ 0.55	3	+ 0.09	2	+ 0.03	7	+ 0.11	3	+ 0.29	2	+ 0.18	20	+ 0.11	—	—	9	+ 0.37
5	—	—	—	—	2	+ 0.34	—	—	5	+ 0.34	2	+ 0.36	—	—	7	+ 0.28	2	+ 0.61	—	—
19—20	2	+ 0.20	1	− 0.05	8	− 0.22	2	− 0.06	3	+ 0.21	2	− 0.30	1	− 0.18	7	− 0.01	—	—	4	− 0.08
21	1	+ 0.34	1	+ 0.04	4	− 0.04	1	− 0.39	—	—	5	+ 0.06	2	+ 0.19	8	+ 0.12	1	+ 0.61	3	+ 0.09
22	2	+ 0.16	—	—	—	—	—	—	3	+ 0.02	3	+ 0.08	2	+ 0.17	12	+ 0.08	1	+ 0.28	3	+ 0.34
23	—	—	—	—	1	− 0.17	—	—	1	+ 0.40	2	+ 0.45	3	− 0.12	10	+ 0.11	1	+ 0.41	4	+ 0.26
Mittel	10	+ 0.28	7	+ 0.26	23	− 0.09	8	− 0.01	29	+ 0.19	28	+ 0.21	11	+ 0.05	96	+ 0.14	9	+ 0.48	34	+ 0.31

Zone VII.

0	1	−0.33	1	+0.03	3	−0.05	—	—	2	+0.18	1	+0.16	1	+0.57	11	−0.06	—	—	1	−0.20
1	2	+0.02	—	—	5	+0.08	—	—	1	−0.02	1	+0.22	—	—	6	+0.17	—	—	4	+0.08
2	1	+0.40	—	—	3	+0.08	—	—	2	+0.21	4	+0.22	—	—	12	+0.11	2	+0.34	—	—
3	2	+0.27	—	—	1	+0.15	—	—	1	+0.02	5	+0.12	1	+0.35	3	−0.33	1	+0.42	1	+0.72
4	—	—	—	—	1	+0.22	—	—	3	+0.38	—	—	—	—	1	+0.32	—	—	—	—
21	—	—	—	—	1	−0.01	1	+0.04	—	—	2	−0.01	—	—	4	+0.30	—	—	2	+0.47
22	—	—	—	—	2	−0.12	—	—	—	—	2	−0.02	—	—	2	+0.26	2	−0.26	4	−0.05
23	3	+0.11	—	—	2	−0.04	—	—	—	—	4	−0.08	—	—	5	+0.05	1	+0.27	3	+0.17
Mittel	9	+0.11	1	+0.03	18	+0.03	1	+0.04	9	+0.21	19	+0.08	2	+0.46	44	+0.07	6	+0.14	15	+0.14

Hieraus ergeben sich folgende Mittelzahlen:

	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII	
m																
5.3	10	−0.06	8	−0.20	16	+0.01	17	+0.11	19	+0.20	10	+0.28	9	+0.11	—	—
5.4	2	+0.08	1	−0.14	—	—	6	+0.22	12	+0.07	7	+0.26	1	+0.03	—	—
5.5	11	−0.08	20	+0.02	20	+0.06	40	+0.08	36	+0.06	23	−0.09	18	+0.03	4	+0.15
5.6	—	—	1	−0.12	6	+0.01	6	−0.10	10	+0.19	8	−0.01	1	+0.04	—	—
5.7	7	+0.15	13	+0.14	14	+0.18	19	+0.25	19	+0.34	29	+0.19	9	+0.21	1	(+0.69)
5.8	4	+0.05	16	+0.11	30	+0.08	31	+0.21	39	+0.18	28	+0.21	19	+0.08	2	+0.14
5.9	2	+0.17	4	−0.17	4	+0.41	5	+0.06	21	+0.34	11	+0.05	2	+0.46	—	—
6.0	28	+0.03	57	+0.09	88	+0.10	107	+0.10	143	+0.17	96	+0.14	44	+0.07	11	+0.08
6.1	3	+0.02	12	+0.17	11	+0.23	17	+0.16	20	+0.35	9	+0.49	6	+0.14	1	(+0.33)
6.2	7	+0.08	23	+0.27	31	+0.17	27	+0.17	26	+0.34	34	+0.31	15	+0.14	5	+0.14

(a)

Die Gesammtmittel für alle Zonen sind:

	m		m	Anzahl
D.M.	5.3	= H.	5.22	89
	5.4		5.26	29
	5.5		5.47	172
	5.6		5.56	32
	5.7		5.48	111
	5.8		5.53	169
	5.9		5.69	49
	6.0		5.88	574
	6.1		5.85	79
	6.2		5.97	168

Zieht man noch, analog dem bei den telescopischen Sternen eingeschlagenen Verfahren, die Sterne von der Grösse 5.3—5.7 bezw. 5.8—6.2 zusammen und betrachtet die gefundene Correction als den Sternen 5.5 bezw. 6.0 Grösse zugehörig, so ergiebt sich:

Zone	m 5.5	Anzahl	m 6.0	Anzahl	m 5.5 D.M. = H.	m 6.0 D.M. = H.	
	m		m		m	m	
I	— 0.01	30	+ 0.04	44	5.51	5.96	(β)
II	+ 0.01	43	+ 0.13	110	5.49	5.87	
III	+ 0.07	56	+ 0.13	166	5.43	5.87	
IV	+ 0.13	88	+ 0.13	187	5.37	5.87	
V	+ 0.16	96	+ 0.22	249	5.34	5.78	
VI	+ 0.10	77	+ 0.20	178	5.40	5.80	
VII	+ 0.09	38	+ 0.10	86	5.41	5.90	
VIII	+ 0.26	5	+ 0.12	19	5.24	5.88	
Mittel	+ 0.10	433	+ 0.16	1039	5.40	5.84	

Aus diesen Tabellen dürfte folgen, dass die Schätzungen der D. M. sehr bedeutende systematische Fehler enthalten und dass sie zum Theil einen so wenig gleichförmigen Gang aufweisen, dass man sie zu feineren Untersuchungen, bei welchen 0.1 Grösse eine Rolle spielt, nur bedingungsweise verwenden kann. Zum grossen Theil wird dies daher rühren, dass die Zahl der Vergleichungen nicht genügend gross ist, als dass sich die zufälligen oder von andern Ursachen, als den betrachteten, herrührenden systematischen Fehler ausgleichen könnten; eine verhältnissmässig geringe Aenderung in der Anordnung ändert die Mittelwerthe gleich um erhebliche Beträge. Besonders auffallend ist das verschiedene Verhalten der Bonner

Grössenangaben mit verschiedenen Zehnteln und diese ordnen sich in (a) nicht so, dass man behaupten kann, es liege eine gleichmässig verlaufende Helligkeitsscala vor. An sich dürfte dies übrigens nicht überraschen, wenn man sich die bekannte Art und Weise vergegenwärtigt, wie die einzelnen Zehntelgrössen in der Bonner Durchmusterung zu Stande gekommen sind. Ist die Anzahl der verglichenen Sterne sehr gross und sind dieselben über weite Strecken am Himmel vertheilt, so darf man erwarten, dass jene unregelmässigen Ursachen, durch welche die einzelnen Zehntel (ausgenommen die Dezimalen 0 und 5) entstanden sind, sich zu gewissen mittleren Zuständen summirt haben. Dies wird bei den telescopischen Sternen der Fall gewesen sein und besonders für die Grössen 9.1 und 9.2 scheint dies aus meinen früheren Vergleichungen der D.M. mit der Harvard-Revision mit einiger Sicherheit hervorzugehen. Bei den Sternen der 5—6. Grösse aber ist ein solcher mittlerer Zustand noch nicht erreicht worden und bei den noch helleren darf man wohl schon gar nicht darauf rechnen, weshalb ich diese bei den vorliegenden Vergleichungen ganz unberücksichtigt gelassen habe. So kommt es, dass die Bonner Grössen 5.3, 5.4 . . 6.2 keineswegs überall eine stets abnehmende Reihe von Helligkeiten darstellen. In Zone V z. B. sind die Bonner Grössen 5.6 und 5.7 heller als die 5.5 und 6.1 heller als 6.0. Indessen folgt aus den weiter unten folgenden m. Fehlern, dass diese Erscheinung durch die relativ kleine Zahl der Vergleichungen bedingt ist und in diesem Sinne möglicherweise nicht reell zu sein braucht. Jedenfalls aber bestehen diese Anomalien und erschweren die Verwerthung der Bonner Abzählungen bei der Entscheidung etwas difficilerer Vertheilungsfragen ganz ausserordentlich.

Zur Beurtheilung der Sicherheit der Differenzen D.M.—H. wurden die durchschnittlichen Fehler einer Vergleichung berechnet. Es genügt, hierbei die Formel

$$\vartheta = \frac{\Sigma\,[\Delta]}{n}$$

anzuwenden, wo $[\varDelta]$ die absoluten Beträge der Differenzen gegen die Mittelzahlen (a) und n die Anzahlen dieser Differenzen sind. Es ergab sich so folgende Tabelle für die ϑ:

Zone m	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Mittel
5.3	0.28	0.15	0.28	0.27	0.19	0.15	0.20	—	0.22
5.4	—	—	—	0.10	0.18	0.24	—	—	0.18
5.5	0.20	0.26	0.23	0.24	0.28	0.32	0.16	0.25	0.25
5.6	—	—	0.16	0.10	0.34	0.21	—	—	0.22
5.7	0.22	0.17	0.21	0.18	0.19	0.22	0.17	—	0.20
5.8	0.16	0.19	0.23	0.23	0.27	0.24	0.20	—	0.23
5.9	—	—	—	0.08	0.19	0.26	—	—	0.19
6.0	0.26	0.25	0.24	0.24	0.27	0.25	0.30	0.28	0.26
6.1	—	0.20	0.22	0.23	0.27	0.17	0.30	—	0.23
6.2	0.15	0.22	0.23	0.23	0.21	0.24	0.24	0.22	0.22
Mittel	0.23	0.22	0.24	0.23	0.25	0.24	0.24	0.27	0.24

Die ϑ haben sehr angenähert überall dieselbe Grösse; wo sich grössere Abweichungen zeigen, ist meist n keine grosse Zahl. Es scheint danach gestattet zu sein, in den meisten Fällen für ϑ die mit Rücksicht auf die Anzahlen gebildeten Mittelwerthe oder auch das Gesammtmittel

$$\vartheta = \overset{m}{0}.24$$

anzunehmen. Nimmt man das Gauss'sche Fehlergesetz als geltend an, so folgt hieraus der mittlere Fehler:

$$\varepsilon = \vartheta \cdot 1.2533 = \overset{m}{0}.30.$$

Wie schon erwähnt, hatte ich in meinen früheren Abzählungen der in der nördlichen D.M. enthaltenen Sterne die Sterne von der Grösse 1—6.5 in eine Gruppe zusammengefasst. Es erschien nun von Interesse eine weitere Zerfällung dieser Gruppe vorzunehmen und auf meine Veranlassung hat der Officiant der Münchener Sternwarte, Herr List, ganz in derselben Weise, wie die früheren Abzählungen ausgeführt worden sind, die Abzählung der Sterne von der Grösse 1—5.5, 5.6—6.0 und 6.1—6.5 durchgeführt. Die erhaltenen Resultate sind in den 3 Tafeln am Schlusse dieser Abhandlung zusammengestellt. An den Zahlen der D.M. sind hierbei irgendwelche Correcturen nicht vorgenommen worden, da dies für die vorliegenden Zwecke ganz gleichgültig ist. In diese Tabellen wurden nun die Grenz-

linien der einzelnen Zonen I, II . . VIII als gebrochene Linien eingezeichnet (eventuell die einzelnen Trapeze halbirend), ganz so wie dies bei den früheren Abzählungen geschehen war und dann für jede Zone die Addition ausgeführt. So ergaben sich die folgenden Anzahlen für die Sterne von der Grösse 1—5.5, 1—6.0 und 1—6.5 am nördlichen Himmel, welche in der D.M. als solche angeführt sind.

Zone	m m 1—5.5	m m 1—6.0	m m 1—6.5
I	61.0	107.5	209.0
II	129.5	221.5	426.0
III	172.0	324.0	626.5
IV	196.5	373.5	759.5
V	238.5	479.5	959.5
VI	203.5	383.0	738.5
VII	90.5	177.5	322.5
VIII	27.5	42.5	77.5
Summe	1119	2109	4119

Für die Verhältnisse $a_{6.0}$ und $a_{6.5}$, das sind die Quotientienten der Anzahlen 1 – 6.0 bezw. 1—6.5 dividirt durch 1—5.5 bezw. 1—6.0 ergiebt sich hieraus:

	log $a_{6.0}$	log $a_{6.5}$		
I	0.246	0.289	0.45	0.46
II	0.233	0.284	0.38	0.60
III	0.275	0.286	0.44	0.66
IV	0.279	0.309	0.50	0.65
V	0.304	0.301	0.44	0.72
VI	0.274	0.285	0.40	0.74
VII	0.292	0.260	0.49	0.65
VIII	0.189	0.261	0.64	0.74
Mittel	0.275	0.291	0.44	0.68

Verfährt man mit diesen Zahlen ebenso wie s. Z. mit den telescopischen Sternen, so hat man zu berücksichtigen, dass diese a nicht halben photometrischen Grössenklassen entsprechen, sondern nach (β) und S. 171 meiner Vergleichung[1]) der D.M. und H.R. den Bruchtheilen von Grössen, welche neben die log a gestellt sind. Reducirt man auf das Intervall einer halben Grösse, so würde sich ergeben:

[1]) Münchener Sitzungsberichte 1898.

	log $a^0_{6.0}$	log $a^0_{6.5}$	Σ
I	0.273	0.314	0.587
II	0.307	0.237	0.544
III	0.313	0.217	0.530
IV	0.279	0.238	0.517
V	0.345	0.209	0.554
VI	0.342	0.193	0.535
VII	0.298	0.200	0.498
VIII	0.148	0.177	0.325
	0.313	0.214	0.527

Durch diese Reduction sind augenscheinlich grosse Ungleichförmigkeiten in den Verlauf der log a hineingekommen, die ja möglicherweise an sich reell sein könnten, von denen man dies aber zunächst als sehr unwahrscheinlich betrachten muss. Man wird wohl nicht fehlgehen, wenn man annimmt, dass die Reduction auf photometrische Grössen in der ausgeführten Weise unzulänglich ist. Der Verlauf der Correctionen D. M.—H. war schon selbst so wenig regelmässig, dass man die Mittelzahlen (β) eben nicht als die Correctionen, die an die D. M. Grössen 5.5 und 6.0 anzubringen sind, ansehen darf. Es scheint überhaupt nicht möglich, wie auch schon oben hervorgehoben wurde, auf Grund der angestellten Vergleichungen und Abzählungen die Vertheilung der Sterne von der Grösse 5—6 zu studiren und man wird deshalb die Bonner Durchmusterung nicht zu Rathe ziehen dürfen, wenigstens wenn es sich um mehr als ganz rohe Feststellungen handelt.

Es scheint deshalb am Platze für diese helleren Sterne die D. M. durch die Angaben der H. zu ersetzen. Ich habe deshalb in letzterer die Sterne von der Grösse 1—5.0 und 1—6.0 abgezählt, wobei die Variablen und solche Doppelsterne, die in H. oder in D. M. nicht getrennt erscheinen, unberücksichtigt geblieben sind. Es ergab sich so

	m 1—5.5	m 1—6.0	log $a_{6.0}$
I	56	109	0.289
II	129	226	0.243
III	181	315	0.240
IV	229	385	0.225
V	314	495	0.198
VI	250	392	0.190
VII	106	183	0.237
VIII	24	44	0.268
Summe	1289	2149	0.222

Die a zeigen hier ein durchaus anderes Verhalten wie früher, indem sie mit der Annäherung an die Milchstrasse nicht unmerklich abnehmen. Man sieht aber, dass dies fast ausschliesslich von der Verschiedenheit der beiderseitigen Angaben über die Anzahl der Sterne von der Grösse 1—5.5 herrührt.

Dass H. gänzlich frei von systematischen Fehlern sei, wird kaum vorausgesetzt werden können; andrerseits ist es nicht gerade wahrscheinlich, dass solche bei der Anordnung nach den Milchstrassenzonen merklich hervortreten werden. Da über die systematischen Fehler von H. vorläufig nichts bekannt ist, wird man sich begnügen müssen, zu untersuchen, ob und bis zu welcher Helligkeit die Sterne in nahezu vollständiger Anzahl in H. enthalten sind. Man wird nun mit einiger Sicherheit annehmen dürfen, dass die Sterne bis zur Grösse 5.5 in H. nahezu vollständig aufgeführt sind. Den H. zu Grunde liegenden Arbeitslisten wurden alle D. M. Sterne bis zur Grösse 6.0 incl. einverleibt, ferner der grössere Theil der Sterne von der Grösse 6.1 und 6.2 und einige in der D. M. als schwächer angegebene, bei denen eine grössere Helligkeit zu erwarten war. Von den 106 bezw. 293 Sternen, deren Grössen in D. M. als 6.1 und 6.2 aufgeführt sind, fehlen in H. 28 bezw. 111; diese vertheilen sich folgendermassen auf die einzelnen Zonen:

	6.1^m	6.2^m	*
I	—	4	12
II	5	14	10
III	1	12	11
IV	6	20	27
V	9	30	29
VI	6	19	21
VII	1	8	14
VIII	—	4	6
	28	111	130

Unter * sind gleich die Anzahlen der Sterne angegeben, welche in D.M. schwächer als 6.2 geschätzt sind und in H. heller als oder gleich 6.0^m angegeben sind.

Danach kann nicht garantirt werden, dass H. nahezu alle Sterne bis zur Grösse 6.0 enthält. Man könnte die Sache näher untersuchen, wenn man sowohl die in der D.M. enthaltenen Sterne der einzelnen Zehntel der Grössenklassen in der Nähe von 6.0 kennte, ferner ihre Beziehung zu der photometrischen Scala von H. und endlich den m. F. einer Grössendifferenz D.M.—H. Die dazu nöthigen Formeln sollen später abgeleitet werden. Leider liegen aber die nöthigen Daten nicht vor, da die Differenzen der D.M.—H. für die Grössen 6.3, 6.4 als nicht bekannt und das vorhandene Material zu ihrer Ableitung nicht ausreichend ist. Was die Zahlen der D.M. Sterne betrifft, so wird es ausreichen, für jede Zone I—VIII procentualiter dieselbe Vertheilung in den einzelnen Zehntelgrössen anzunehmen, wie sie im Durchschnitt aus allen Zonen hervorgeht und also durch die von C. Littrow ausgeführten Abzählungen bekannt ist. Auf diesen Punkt wird weiter unten näher eingegangen werden. Nimmt man nun aber an — und das scheint nicht unbegründet zu sein — dass in H. fast alle Sterne berücksichtigt worden sind, die heller als 6.0^m und in D.M. schwächer als 6.2^m angegeben sind, dann ist die Rechnung durchführbar. Nach den weiter unten folgenden Formeln habe ich unter diesen Voraussetzungen gefunden, dass zu den Sternanzahlen die in den beiden ersten verticalen Reihen stehenden Zahlen von Sternen der Grösse 6.1 bezw. 6.2 in der

D. M. hinzugefügt werden müssen, so dass die Anzahl der Sterne 1—6.0^m durch die angeführten Werthe zu ersetzen sind.

	6.1^m	6.2^m	1^m—6.0^m	log $a_{6.0}$
I	—	1	110	0.293
II	3	8	237	0.264
III	1	6	322	0.250
IV	3	9	397	0.289
V	7	20	522	0.221
VI	5	12	409	0.214
VII	6	3	192	0.258
VIII	—	2	46	0.288
	25	61	2235	0.246

Die mit den vorhin aus H. hervorgegangenen Zahlen 1—5.5^m berechneten log a zeigen einen regelmässigen Verlauf, und zwar eine deutliche Abnahme mit der Annäherung an die Milchstrasse. Dieses Ergebniss, welches mit dem von Herrn Kobold gefundenen stimmt, scheint demnach ein ziemlich gesichertes zu sein.

Ich habe noch die oben erwähnten Formeln abzuleiten. Ein Stern von der photometrischen Grösse γ habe in D. M. die Grösse g. Die Vergleichung der D. M. Grössen mit einem photometrischen Catalog ergiebt dann

$$g = \gamma + c_g + \delta$$

c_g wird eine Correction sein, welche aus dem Mittel aller Differenzen innerhalb einer gewissen Gruppe hervorgeht, δ ist der übrigbleibende zufällige Schätzungsfehler, der sich aus dem Fehler der D. M. und des Catalogs zusammensetzt. Es sei ferner a_g die Anzahl der D. M. Sterne von der Grösse g und $\varphi(\delta)$ das Fehlergesetz, wobei $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\delta)\, d\delta = 1$, so wird

$$a_g \cdot \varphi(\delta)\, d\delta$$

die Anzahl der Sterne in der D. M. sein, welche hier die Grösse g haben und ausserdem einen Schätzungsfehler, der zwischen δ und $\delta + d\delta$ liegt, also eine photometrische Helligkeit zwischen $g - c_g - \delta$ und $g - c_g - \delta - d\delta$ hat. Durchläuft δ die Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so nimmt γ bei festgehaltenem g

alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ an. Der Mittelwerth $\delta A_{g\gamma_1}$ der Anzahl aller Sterne, welche in der D.M. die Grösse g und eine grössere photometrische Helligkeit als γ_1 haben, wird demnach sein:

$$\delta A_{g\gamma_1} = \int_{g-c_g-\gamma_1}^{g-c_g-\gamma_0} a_g \cdot \varphi(\delta) \cdot d\,\delta$$

γ_0 ist hier die photometrische Grösse der hellsten Sterne. Man wird annehmen dürfen, dass $\varphi(\delta)$ sehr schnell abnimmt, wenn δ sich von $\delta = 0$ aus nach der positiven oder negativen Seite ändert. Wenn man sich demnach auf Werthe von g beschränkt, die nicht zu nahe bei γ_0 liegen, wird man, da es sich ja nur um Abschätzungen handeln kann, die obere Grenze des Integrals positiv unendlich setzen dürfen. Die Anzahl A_{γ_1} aller Sterne in D.M., welche in der photometrischen Scala eine Grösse $\leqq \gamma_1$ haben, wird also sein

$$A_{\gamma_1} = {}_g\sum^{\infty} \int_{g-c_g-\gamma_1}^{\infty} a_g\, \varphi(\delta)\, d\,\delta \tag{1}$$

wo die Summe Σ über alle Werthe von g auszudehnen ist, die angenommen werden können, also $g = 1.0$, 1.1 etc. Genügend ausführlich angestellte Abzählungen nach der D.M. geben die a_g. Wäre also φ, welches im Allgemeinen als auch von g abhängig betrachtet werden muss, bekannt, so könnte man A_{γ_1} berechnen. Die Formel (1) wird zweckmässig so umgeformt, dass man Correctionen erhält, welche man an die Abzählungsresultate ${}_g\sum^{g} a_g$ anzubringen hat.

Es soll diese Umformung nur unter der Voraussetzung hingeschrieben werden, dass φ eine gerade und von g unabhängige Function ist. Setzt man dann

$$\int_0^x \varphi(\delta)\, d\,\delta = \tfrac{1}{2}\, \Theta(x)$$

also

$$\Theta(x) = -\Theta(-x); \quad \Theta(\infty) = 1$$

so wird

$$A_{\gamma_1} = {}_g\sum^{g} a_g - \tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{g} a_g\left[1 + \Theta(g - c_g - \gamma_1)\right] + \tfrac{1}{2}\sum_{g+\varepsilon}^{g} a_g\left[1 - \Theta(g - c_g - \gamma_1)\right]$$

Hierbei ist ε das Intervall 0.1, welches zwei aufeinanderfolgende Grössenangaben der D.M. trennt. ${}_g\sum^{g} a_g$ ist die bis zur Grösse g incl. abgezählte Anzahl der Sterne der D.M. und die beiden andern Glieder die Reduction, die man anzubringen hat, um die Zahl der Sterne zu erhalten, welche heller, als die photometrische Grösse γ_1 angiebt, sind.

Für die oben gegebenen Vergleichungen der hellen Sterne scheint in der That φ von g nahezu unabhängig zu sein, wie die Zusammenstellung der m. Fehler ergiebt. Der Verlauf von φ könnte durch eingehendere allerdings etwas weitläufige Betrachtungen bestimmt werden. Indessen ist es nicht unwahrscheinlich, dass φ ungefähr durch das Gauss'sche Fehlergesetz dargestellt wird, wenigstens fallen die aus den ersten und zweiten Potenzen der Abweichungen berechneten m. Fehler nicht sehr verschieden aus. Nimmt man das Gauss'sche Fehlergesetz an:

$$\varphi(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\delta^2}$$

so wird

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt$$

aus den bekannten Tafeln leicht entnommen werden können. h, das sog. Maass der Genauigkeit, ist bekanntlich mit dem m. Fehler ε durch die Gleichung

$$h\,\varepsilon\sqrt{2} = 1$$

verbunden. Für die obigen Zahlen ergiebt sich $\frac{1}{h} = 0.43$. Ich habe die kleine Rechnung (S. 376) mit $h = 2\frac{1}{3}$ ausgeführt.

2.

Ich gehe nun zu den telescopischen Sternen der D.M. über. Um die Anzahl A_m aller Sterne von den hellsten bis zur Grösse m in den einzelnen Milchstrassenzonen I ... VIII zu erhalten, hatte ich[1]) das Abzählungsresultat aus der D.M. auf photometrische Grössen reducirt, wobei Mittelzahlen aus den Vergleichungen der geschätzten D.M. Grössen mit den Angaben der Harvard Photometric Revision benutzt worden sind. Die Reduction geschah in sehr einfacher und, allerdings unter Voraussetzung der Zulässigkeit gewisser Annahmen über die Gleichmässigkeit des Materiales, wohl auch unbedenklicher Weise. Auf einen Punkt mag indessen hingewiesen werden, der seiner Zeit nicht besonders hervorgehoben worden ist. Die D.M. enthält nur Zehntelgrössen. Als Sterne von der Grösse 9.0 z. B. werden also, abgesehen natürlich von den Fehlern der Schätzung, alle Sterne aufgeführt, welche thatsächlich zwischen den Grössen 8.95 und 9.05 liegen. Will man also genau $A_{9.0}$ haben, so muss man von der abgezählten Anzahl die Hälfte der Zahl der Sterne von der Grösse 9.0 in Abzug bringen. Für die a. a. O. verfolgten Zwecke, die Bildung der Zahlen $\log a = \log A_m - \log A_{m-1}$ nämlich, ist die Anbringung dieser Correction irrelevant und sie wurde auch nicht angebracht. Dies ist aber nur unter der Voraussetzung zulässig, dass die Anzahl der Sterne, deren Grösse in der D.M. die Decimalen 0 oder 5 hat, dividirt durch A_m, wo m ebenfalls eine Zahl mit denselben Decimalen ist. einen von m unabhängigen Werth besitzt. Es ist übrigens nur eine ganz beiläufige Erfüllung dieser Bedingung ausreichend, da nur die ersten zwei oder drei Stellen der $\log a$ in Frage kommen. Thatsächlich ist die genannte Bedingung ziemlich nahe erfüllt, wie die folgende Zusammenstellung ergiebt. In dieser steht neben der Sterngrösse m die Anzahl der Sterne dieser Grösse nach Littrows Abzählung,[2]) dann folgen: A_m, die Correction von $\log A_m$:

[1]) Abhandlungen 1898.

[2]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Band 59, II. Abth., 1869.

$\varDelta \log A_m$, die hierdurch verursachte Aenderung $\varDelta \log a$ von $\log a$, das a. a. O. gefundene $\log a_0$ und endlich das reducirte $\log a$:

m		A_m	$\varDelta \log A_m$	$\varDelta \log a$	$\log a_0$	$\log a$
6.0	618	2108	− 0.069	—	—	—
6.5	1239	4122	− 0.071	− 0.002	—	—
7.0	2141	8077	− 0.062	+ 0.009	0.256	0.265
7.5	2860	14078	− 0.046	+ 0.016	0.239	0.255
8.0	5622	25321	− 0.051	− 0.005	0.250	0.245
8.5	9788	48247	− 0.047	+ 0.004	0.255	0.259
9.0	23277	101071	− 0.053	− 0.006	0.274	0.268

Die so entstehenden Correctionen sind also unbedeutend und kommen gegenüber durch andere Einwirkungen verursachten Schwankungen nicht in Frage. Im Uebrigen sind die corrigirten Werthe einander näher gebracht worden, als sie vorher waren.

Ob aber ähnliche Verhältnisse für die einzelnen Milchstrassenzonen I—VIII stattfinden ist zunächst fraglich, wenn man auch vielleicht keinen wirklich ausschlaggebenden Einfluss von dieser Seite auf die Werthe a zu besorgen haben wird. Zwei andere Umstände könnten dagegen von grösserem Einfluss sein. Diese rühren davon her, dass die Bonner Schätzungen mit bedeutenden systematischen und zufälligen Fehlern behaftet sind. Die ersteren lassen sich nur als gewisse Mittelwerthe mit genügender Genauigkeit herleiten, wobei es schwer ist — jedenfalls liegt eine solche Untersuchung nicht vor — das verschiedene Verhalten der einzelnen Zehntel der Grössenangaben gehörig zu übersehen. Auch kommen die einzelnen Zehntelgrössen in der D.M. sehr verschieden häufig vor. Was die zufälligen Fehler betrifft, so findet ein Ausgleich derselben im Allgemeinen nicht statt, weil wegen der Zunahme der Anzahl der Sterne mit der Grösse die Anzahl der zu hell geschätzten Sterne durchaus nicht gleich der der zu schwach geschätzten sein wird. Bei den mit freiem Auge sichtbaren Sternen haben nachweisbar, besonders die zuerst genannten Verhältnisse, eine sichere Ermittlung der Sternanzahlen bis zu einer bestimmten Grösse fast unmöglich gemacht.

Ueber diese verschiedenen Einflüsse kann aber eine angemessen ausgeführte Vergleichung der Harvard Photometric Revision (H.R.) mit der D.M. Aufschluss geben, insoweit natürlich nur, als man H.R. als frei von systematischen Fehlern, namentlich von solchen, welche von der Lage der Sterne zur Milchstrasse abhängen, anzunehmen berechtigt ist. Da über diesen Punkt gegenwärtig nichts Näheres bekannt ist, muss eine solche Annahme nothgedrungen gemacht werden.

Ich habe nun eine solche Vergleichung angestellt. Es wurden fast alle Sterne benutzt, welche zugleich in D.M. und H.R. vorkommen, nur in den sehr reichen Zonen wurde hie und da ein Declinationsgrad fortgelassen. Bei den Zonen I, II, III, VII und VIII wurden dagegen alle Vergleichungen benutzt und nur sehr grosse, im Allgemeinen $0^m.9$ übersteigende Abweichungen ausgeschlossen, da diese jedenfalls durch irgend welche Versehen, Druckfehler u. dergl. zu Stande gekommen sein können. Ich habe mich, wegen der Weitläufigkeit der Rechnung, begnügt, die Correctionen aufzunehmen, welche an die abgezählten D.M. Sterne bis zur Grösse 6.5, 7.5 und 9.0 anzubringen sind, um auf die entsprechenden photometrischen Grössen zu reduciren. Es wurde also die Rechnung für die Anzahlen $A_{7.0}$ und $A_{8.0}$ nicht ausgeführt.

Zur Reduction der geschätzten Grössen auf photometrische wurden die Δ meiner früheren Arbeit[1]) (S. 171) verwendet. Wegen des Anschlusses an die oben gemachten Bemerkungen wäre eine Ausdehnung der Vergleichungen auf die Sterne von der Grösse 6.0 interessant gewesen; hierzu reicht aber die Anzahl der Vergleichspunkte zwischen D.M., H.R. und H. in keiner Weise aus. Die Ableitung der an die Abzählungsresultate anzubringenden Correctionen geschah nun in folgender Weise. Es wurden z. B. um das corrigirte $A_{7.5}$ zu erhalten, gesondert für die einzelnen Zonen I, II . . VII die Anzahlen aller Sterne, welche in der D.M. als von der Grösse 7.0, 7.1 . . bis 8.2 angeführt sind und in H.R. vorkommen, abgezählt — zweite Zahlenreihe unter I, II etc. in der folgenden Tabelle —

[1]) Sitzungsberichte 1898.

und dann diejenigen von ihnen, welche in der D.M. heller oder gleich 7.5 angegeben sind und in H.R. schwächer als die der Bonner Durchmusterungsgrösse 7.5 in jeder Zone entsprechende photometrische Grösse. Letztere sind in der 4—6. Tabelle am Schlusse unter der Bezeichnung „Grenze“ angegeben. Ebenso wurden alle D.M. Sterne schwächer als 7.5 abgezählt, die in H.R. vorkommen und ebenso diejenigen von ihnen, welche in H.R. heller, als die 7.5 entsprechende photometrische Grösse angiebt, sind. Die Tabellen 4—6 enthalten die Verhältnisszahlen. So sagt z. B. die letzte Tabelle aus: von 1000 Sternen in der Zone V, welche in D.M. 9.0 angegeben sind, sind 594 schwächer als oder gleich 9.12 Grössen in der photometrischen Scala, von 1000 D.M. Sternen von der Grösse 9.2 in der Zone II sind 167 heller als 9.32 photometrisch. Die letzten drei Tabellen enthalten am Schlusse noch die mit Rücksicht auf die Anzahlen gebildeten Mittelwerthe der Verhältnisszahlen.

Die gewonnenen Resultate müssen im Allgemeinen den Eindruck einiger Sicherheit machen. Nur für Zone VIII ist überall das Material sehr spärlich und man wird deshalb auf die Resultate in dieser Zone kein Gewicht legen. Einige Unsicherheit ist auch bei den schwächsten Sternen vorhanden. Die D.M. Sterne von der Grösse 9.5 kommen in H.R. nur ganz vereinzelt vor. Ich habe deshalb, um nicht völlig in der Luft stehende Verhältnisszahlen zu bekommen, diese Sterne ganz fortgelassen. Da indessen bekanntlich die mit 9.4 und 9.5 bezeichneten Sterne der D.M. fast immer lichtschwache Sterne sind, dürfte voraussichtlich die so entstandene Unsicherheit nicht von Belang sein.

Multiplicirt man nun die angegebenen Verhältnisszahlen mit der Anzahl der D.M. Sterne jeder Zone und dem betreffenden Zehntel der Grösse, addirt die aus den oberhalb der horizontalen Striche stehenden Verhältnisszahlen erhaltenen Producte und subtrahirt die aus den unterhalb der Striche stehenden Zahlen erhaltenen Producte von den abgezählten Anzahlen $A_{6.5}$, $A_{7.5}$, $A_{9.0}$, so ergeben sich die auf die betreffenden photometrischen Grössen reducirten Anzahlen.

	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII	
m																
+7.2	—	10	—	13	2	27	—	45	2	45	2	33	—	8	1	3
7.1	—	4	—	5	—	9	—	14	—	17	—	9	—	5	—	—
7.0	1	18	1	27	3	53	7	69	10	94	3	69	3	39	1	2
6.9	1	5	—	6	1	6	2	15	4	40	6	15	2	7	—	—
6.8	1	24	6	54	9	58	7	71	8	79	13	56	3	22	1	6
6.7	3	5	7	22	12	29	7	37	13	43	8	30	1	5	—	1
6.6	2	3	1	4	1	3	3	13	16	28	4	11	1	5	—	—
−6.5	14	22	19	38	41	72	38	88	58	106	58	107	14	26	2	4
6.4	1	2	—	2	—	2	4	9	4	14	—	3	—	3	—	—
6.3	—	4	1	9	5	15	10	29	7	23	1	14	3	8	—	—
6.2	1	5	1	15	1	17	2	25	2	23	3	19	2	12	—	2
6.1	-	2	—	4	1	6	1	6	1	12	—	8	—	4	—	—
6.0	—	4	—	10	1	21	5	26	2	26	1	10	1	10	—	2
	24	108	36	209	77	318	86	447	127	550	99	384	30	154	4	20

	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII	
m																
+8.2	—	8	1	19	1	40	—	60	2	63	—	51	2	27	1	8
8.1	—	3	—	11	—	18	1	28	1	51	1	18	—	10	—	2
8.0	2	9	—	26	3	46	10	83	6	86	5	50	—	27	—	4
7.9	2	6	2	14	3	21	5	49	6	60	7	37	—	12	—	4
7.8	3	25	3	56	7	59	24	124	28	124	18	89	10	40	2	8
7.7	5	18	8	33	12	52	29	77	27	86	13	43	5	22	1	4
7.6	2	8	4	11	2	12	9	26	16	43	10	25	4	8	—	—
−7.5	14	26	28	56	50	97	66	128	64	145	38	80	26	49	5	9
7.4	2	5	1	9	3	13	10	33	11	36	8	16	3	6	—	—
7.3	1	6	18	45	9	33	18	56	20	58	20	54	6	14	1	2
7.2	5	11	1	13	2	28	10	54	8	52	8	37	3	8	—	4
7.1	—	4	—	5	—	9	1	21	—	19	2	10	—	5	—	—
7.0	3	19	2	35	1	57	7	95	17	108	9	82	5	38	1	3
	39	148	68	333	93	485	190	834	206	931	139	592	64	266	11	48

	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII	
m																
+9.4	—	—	—	11	—	13	1	17	—	14	—	4	—	1	—	1
9.3	1	9	1	29	—	21	2	26	1	28	4	16	1	10	—	10
9.2	1	15	6	36	11	46	8	37	7	47	8	47	3	23	—	4
9.1	1	14	3	40	12	33	20	52	19	39	12	36	8	23	1	4
−9.0	35	59	95	144	81	132	133	240	161	271	133	217	94	144	36	53
8.9	14	22	18	43	14	50	28	81	41	115	32	83	20	46	4	12
8.8	—	18	18	83	22	68	24	105	33	105	26	112	16	68	13	34
8.7	—	19	—	45	2	36	9	99	14	102	1	66	6	42	1	18
8.6	—	17	1	24	6	26	6	50	1	65	5	53	—	24	2	10
8.5	1	20	—	64	1	48	2	94	7	105	2	88	1	49	—	18
8.4	—	11	—	17	0	25	—	41	2	56	—	31	—	18	—	—
	53	204	142	536	149	498	233	842	286	947	223	753	149	448	57	164

m	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Mittel
7.2	0	0	0.074	0	0.044	0.061	0	0:	0.038
7.1	0	0	0	0	0	0	0	—	0
7.0	0.056	0.037	0.057	0.101	0.106	0.043	0.077	0.5:	0.078
6.9	0.2:	0	0.167	0.133	0.100	0.400	0.286	—	0.170
6.8	0.041	0.111	0.155	0.099	0.101	0.232	0.136	0.167	0.130
6.7	0.600:	0.318	0.414	0.189	0.302	0.267	0.200:	0:	0.297
6.6	0.667:	0.250	0.333	0.231	0.571	0.364	0.20:	0:	0.418
6.5	0.636	0.500	0.569	0.432	0.547	0.542	0.538	0.50:	0.527
6.4	0.5:	0	0	0.444	0.286	0	0:	—	0.257
6.3	0	0.111	0.333	0.366	0.304	0.071	0.375	—	0.265
6.2	0.2:	0.067	0.059	0.080	0.087	0.158	0.167	0:	0.102
6.1	0	0	0.167	0.167	0.083	0	0:	—	0.071
6.0	0	0	0.048	0.192	0.077	0.100	0.100	0:	0.092
Grenze	6.43^m	6.47^m	6.53^m	6.52^m	6.50^m	6.54^m	6.55^m	6.62^m	

m	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Mittel
8.2	0	0.056	0.025	0	0.032	0	0.074	0.125	0.025
8.1	0	0	0	0.036	0.020	0.056	0	0:	0.021
8.0	0.222	0	0.065	0.120	0.070	0.100	0	0:	0.079
7.9	0.333	0.143	0.143	0.102	0.100	0.189	0	0:	0.123
7.8	0.120	0.054	0.119	0.194	0.226	0.202	0.250	0.250	0.181
7.7	0.278	0.242	0.231	0.378	0.319	0.302	0.227	0.250	0.299
7.6	0.250	0.364	0.167	0.356	0.372	0.400	0.500	—	0.353
7.5	0.538	0.500	0.515	0.516	0.441	0.475	0.531	0.556	0.493
7.4	0.400:	0.111	0.231	0.303	0.306	0.500	0.500	—	0.322
7.3	0.167	0.400	0.273	0.321	0.345	0.370	0.429	0.500:	0.347
7.2	0.455	0.077	0.071	0.185	0.154	0.216	0.375	—	0.179
7.1	0:	0:	0	0.048	0	0.200	0	—	0.041
7.0	0.158	0.057	0.018	0.074	0.157	0.100	0.132	0.333:	0.103
Grenze	7.59^m	7.61^m	7.58^m	7.58^m	7.53^m	7.61^m	7.53^m	7.38^m	

m	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Mittel
9.4	—	0	0	0.059	0	0	0	0:	0.016
9.3	0.111	0.034	0	0.077	0.036	0.250	0.100	0	0.067
9.2	0.067	0.167	0.239	0.216	0.150	0.170	0.130	0:	0.173
9.1	0.071	0.075	0.364	0.385	0.487	0.333	0.348	0.25:	0.311
9.0	0.593	0,659	0.614	0.554	0.594	0.613	0.653	0.679	0.610
8,9	0.636	0.419	0.280	0.345	0.357	0.385	0.435	0.333	0.381
8.8	0	0.217	0.324	0.229	0.314	0.232	0.235	0.382	0.256
8.7	0	0	0.005	0.091	0.137	0.015	0.143	0.056	0.077
8.6	0	0.042	0.230	0.120	0.015	0.094	0	0.200	0.078
8.5	0.050	0	0.021	0.021	0.067	0.023	0.020	0	0.027
8.4	0	0	0	0	0.033	0	0	—	0.010
Grenze	9.38^m	9.32^m	9.21^m	9.18^m	9.12^m	9.22^m	9.24^m	9.29^m	

Die Abzählungen der D.M. sind aber in der hier geforderten Ausführlichkeit nicht ausgeführt worden, indem ich mich seiner Zeit darauf beschränkte, stets 5 Zehntel Grössen zusammenzufassen. Die ganze D.M. nach einem so wesentlich erweiterten Programme von Neuem abzuzählen, dürfte wohl ein zu weitläufiges Unternehmen sein und in keinem Verhältniss zu dem stehen, was damit zu erreichen ist. Ich habe mich darauf beschränkt, folgendes Verfahren einzuschlagen, welches genügende Sicherheit zu bieten scheint.

Es liegt die Vermuthung nahe, dass die Vertheilung der Bonner Zehntelgrössen in den einzelnen Zonen I . . . VIII procentualiter überall dieselbe ist, sofern man nur grössere Areale des Himmels in Betracht zieht. Die letztere Voraussetzung scheint nothwendig wegen der bekannten, auch von mir hervorgehobenen bedeutenden systematischen Schätzungsfehlern, welche von der Declination abhängig sind. Bestätigt sich diese Vermuthung, so hat man nur die bekannte Abzählung Littrows, der die Summen aller nördlichen D.M. Sterne für jedes Zehntelgrösse ermittelt hat, zu Rathe zu ziehen, da die kleineren Ungenauigkeiten dieser Abzählung hierbei ganz irrelevant sind. Ich habe nun Herrn List aufgefordert, Stichproben in angemessener Ausdehnung anzustellen. Herr List hat unter theilweiser Mitwirkung des Rechners Herrn K. Ebert an den von mir angegebenen Stellen — ich selbst habe mich an den Abzählungen nur in ganz geringem Umfange betheiligt — Abzählungen vorgenommen, die in den Tabellen am Schlusse dieser Arbeit angeführt sind. Am Kopfe dieser Tabellen steht der Declinationsgrad und die AR-Stunden, auf welche sich die darunter stehenden Anzahlen für jede Zehntelgrösse, von 5.6 angefangen, bezieht. Im Ganzen sind rund 42600 Sterne abgezählt worden und ihre Anzahl beträgt in den Zonen I bis VII den 5., 8., 10., 9., 9., 9., und 6. Theil der in der D.M. enthaltenen Sterne. Zone VIII enthält aus Gründen, die gleich erörtert werden sollen, fast alle (genauer $\frac{11}{12}$) Sterne der D.M. Die Abzählungen sind gleich nach den Zonen geordnet; einige wenige Stellen, welche durch * gekennzeichnet sind, gehören

infolge eines Versehens zwei Zonen an, was indessen für die hier in Frage kommenden Eigenschaften gänzlich ohne Bedeutung ist. Ich theile diese Abzählungsergebnisse so ausführlich mit, damit sie bei einer etwaigen Fortführung benutzt werden können.

Unter Σ ist die Summe der in derselben Horizontalen stehenden Zahlen angegeben, unter G die Anzahl, wie sie aus der Littrow'schen Abzählung folgen würde, wenn die Vertheilung der Sterne in die einzelnen Zehntelgrössen procentualiter in allen Zonen gleich wäre. Es wurde ganz beiläufig ein passender Factor f bestimmt, mit dem man die Littrow'schen Zahlen zu multipliciren hat um G zu erhalten, nachdem diese mit 23.28 — der Anzahl der Sterne $9^{\mathrm{m}}.0$ in Tausenden ausgedrückt — dividirt worden ist.

Die Gegenüberstellung der Zahlen Σ und G dürfte nun zweifellos die Berechtigung der obigen einfachen Annahme ergeben. Die Differenzen sind zum grossen Theil belanglos und in Anbetracht der relativ kleinen Zahl von Sternen sogar recht klein; man wird wohl annehmen dürfen, dass bei ausgedehnteren Abzählungen die Uebereinstimmung noch besser werden wird. Eine entschiedene Ausnahme macht aber Zone VIII. Hier sind grosse Differenzen oder besser wesentlich von 1 verschiedene Quotienten $\Sigma : G$ sehr häufig. Aus diesem Grunde wurde Zone VIII fast vollständig abgezählt, was sich ohne besondere Mühe erreichen liess. Eine Erklärung dieses auf den ersten Blick auffallenden Umstandes wird darin zu finden sein, dass sich Zone VIII in der D.M. nur über relativ wenige Declinationsgrade hin erstreckt. Die Ungleichförmigkeiten der Bonner Grössenschätzungen verlaufen aber in auffallender Abhängigkeit von den Declinationsgraden. So offenbar auch hier.

Dem eben gesagten zufolge habe ich die folgenden Rechnungen für die Zonen I—VII ausschliesslich mit den Littrow-schen Zahlen ausgeführt, Zone VIII sowohl mit diesen, als auch mit dem mitgetheilten Abzählungsresultat.

Nach Littrows Abzählungen sind die Anzahlen der Sterne der D.M. auf der nördlichen Halbkugel:

m m		m		m	
1—5.5	1120	7.1	345	8.7	6799
5.6	30	7.2	984	8.8	10963
5.7	115	7.3	1356	8.9	7596
5.8	177	7.4	516	9.0	23277
5.9	48	7.5	2860	9.1	15615
6.0	618	7.6	609	9.2	20734
6.1	106	7.7	1537	9.3	31278
6.2	293	7.8	2484	9.4	34951
6.3	275	7.9	991	9.5	111276
6.4	101	8.0	5622		
6.5	1239	8.1	1778	m m	
6.6	159	8.2	3650	1—6.5	4122
6.7	457	8.3	4609	1—7.0	8017
6.8	901	8.4	3101	1—7.5	14078
6.9	237	8.5	9788	1—8.0	25321
7.0	2141	8.6	4189	1—8.5	48247
				1—9.0	101071

Daraus ergiebt sich der Quotient f der Anzahl der Sterne von gegebenem Zehntel der Grösse dividirt durch die Anzahl der Sterne $1-6^m.5$ in der ersten Columne, der Sterne $1-7^m.5$ in der zweiten und $1-9^m.0$ in der dritten Columne:

m	f
7.2	0.239
7.1	0.084
7.0	0.519
6.9	0.058
6.8	0.219
6.7	0.111
6.6	0.039
——	——
6.5	0.301
6.4	0.025
6.3	0.067
6.2	0.071
6.1	0.026
6.0	0.150

m	f
8.2	0.259
8.1	0.126
8.0	0.399
7.9	0.070
7.8	0.176
7.7	0.109
7.6	0.043
——	——
7.5	0.203
7.4	0.037
7.3	0.096
7.2	0.070
7.1	0.025
7.0	0.152

m	f
9.4	0.346
9.3	0.309
9.2	0.205
9.1	0.154
——	——
9.0	0.230
8.9	0.075
8.8	0.108
8.7	0.067
8.6	0.011
8.5	0.097
8.4	0.031

Diese f sind mit den oben angegebenen Factoren (S. 385) zu multipliciren, und hierbei die oberhalb der Striche stehenden Zahlen positiv, die unterhalb stehenden negativ zu nehmen. Addirt man alles, so ergiebt sich der Reductionsfactor, mit dem die abgezählten Anzahlen der Sterne der D.M. 1—6.5, 1—7.5 und 1—9.0 zu multipliciren sind, um auf die photometrischen

Grössen H zu reduciren. Für den Logarithmus dieser Factoren ergiebt sich so:

	$6^m.5$	$7^m.5$	$9^m.0$
I	— 0.034	— 0.010	— 0.061
II	— 0.034	— 0.037	— 0.072
III	— 0.026	— 0.023	— 0.048
IV	— 0.042	— 0.010	— 0.019
V	— 0.028	— 0.014	— 0.045
VI	— 0.018	— 0.018	— 0.017
VII	— 0.045	— 0.048	— 0.045
VIII	+ 0.059	— 0.057	— 0.095

Hierdurch erscheinen die Anzahlen auf die folgenden photometrischen Grössen H reducirt:

	$6^m.5$	$7^m.5$	$9^m.0$
I	6.43	7.59	9.38
II	6.47	7.61	9.32
III	6.53	7.58	9.21
IV	6.52	7.58	9.18
V	6.50	7.53	9.12
VI	6.54	7.61	9.22
VII	6.55	7.53	9.24
VIII	6.62	7.38	9.29

Reducirt man nun alle Anzahlen auf die Sterngrössen 6.5, 7.5 und, um keine grossen Reductionsfactoren anwenden zu müssen, 9.2, so wird man den Logarithmus der Sternanzahlen um die folgenden Quantitäten zu corrigiren haben:

	$6^m.5$	$7^m.5$	$9^m.2$	
I	+ 0.030	— 0.039	— 0.077	0.43
II	+ 0.014	— 0.050	— 0.054	0.45
III	— 0.015	— 0.039	— 0.005	0.49
IV	— 0.011	— 0.043	+ 0.011	0.54
V	0	— 0.016	+ 0.043	0.54
VI	— 0.021	— 0.057	— 0.010	0.52
VII	— 0.026	— 0.016	— 0.021	0.52
VIII	— 0.059	+ 0.059	— 0.044	0.49

Es ist hierbei angenommen, dass die Zunahme des Logarithmus der Sternanzahlen A bei Abnahme um eine Grössenklasse soviel beträgt, als die letzte Columne angiebt. Die Ge-

sammtcorrectionen der Logarithmen der Anzahlen $A_{6.5}$, $A_{7.5}$ und $A_{9.2}$ und diese selbst werden jetzt:

	$\overset{m}{6.5}$	$\overset{m}{7.5}$	$\overset{m}{9.2}$	$\log A_{6.5}$	$\log A_{7.5}$	$\log A_{9.2}$
I	−0.004	−0.049	−0.138	2.315	2.792	3.493
II	−0.020	−0.087	−0.126	2.609	3.048	3.818
III	−0.041	−0.062	−0.053	2.760	3.269	4.089
IV	−0.053	−0.053	−0.008	2.827	3.367	4.279
V	−0.028	−0.030	−0.002	2.953	3.514	4.421
VI	−0.039	−0.075	−0.027	2.829	3.323	4.224
VII	−0.071	−0.064	−0.066	2.436	2.933	3.837
VIII	0	+0.002	−0.139	1.889	2.381	3.236

Berechnet man hieraus $\log a$, wo a das Verhältniss der Anzahlen der Sterne von den hellsten bis zu zwei aufeinanderfolgende Grössenklassen ist und zwar aus den Sternen von den Grössen 7.5 und 6.5, dann 9.2 und 7.5 und schliesslich 9.2 und 6.5, so findet sich:

	$\log a_{7.6}$	$\log a_{9.2}$	$\log a$	g
I	0.477	0.412	0.436	4
II	0.439	0.453	0.448	9
III	0.509	0.482	0.492	14
IV	0.540	0.536	0.538	19
V	0.561	0.532	0.544	27
VI	0.494	0.529	0.517	18
VII	0.497	0.532	0.519	8
VIII	{0.492 {0.531	{0.503 {0.463	{0.499 {0.488	2
	0.514	0.514	0.514	

Für die Zone VIII gelten, wie erwähnt, die angewendeten Factoren f nicht. Nimmt man die durch die Abzählungen gegebenen Werthe an, so findet man — wie nicht näher nachgewiesen werden soll — die an zweiter Stelle stehenden Logarithmen. Am besten wird man Zone VIII überhaupt ausschliessen, da sich für den nördlichen Himmel bei ihr einigermassen zuverlässige Reductionen nicht ausführen lassen.

Bildet man schliesslich, nach Vorschrift meiner früheren Abhandlung[1]) und mit den hier wiederholten Gewichtszahlen g die Mittelwerthe von $\frac{1}{2}\log a$ und die Grösse λ, so findet sich:

---

[1]) Abhandlungen 1898. Seite 16—17.

	$\frac{1}{2}\log a$	λ	$\frac{1}{2}\log a_0$	λ_0
I	0.218	+0.82	0.237	+0.63
II und VIII	0.228	+0.72	0.243	+0.57
III und VII	0.251	+0.49	0.248	+0.52
IV und VI	0.264	+0.36	0.260	+0.40
V	0.272	+0.28	0.275	+0.25

Die früher erhaltenen Werthe sind hierbei unter $\frac{1}{2}\log a_0$ und λ_0 angegeben.

Danach ist die Uebereinstimmung der Werthe von λ mit den früher gefundenen durchaus befriedigend. Jedenfalls aber ergiebt die neue Bearbeitung der Abzählungsresultate das gleiche Resultat wie die frühere, dass nämlich die $\log a$ mit der Annäherung an die Milchstrasse zunehmen, so lange es sich um Sterne von der Grösse 6.5—9.0 handelt.

Für die helleren Sterne scheint dieser Satz nicht zu gelten, sich vielleicht sogar umzukehren. Die oben (S. 375) gefundenen Anzahlen $A_{5.5}$, $A_{6.0}$ in Verbindung mit den soeben abgeleiteten $A_{6.5}$ geben nämlich:

	$\log a_{6.0}$	$\log a_{6.5}$	$\log (a_{6.0}\, a_{6.5})$
I	0.293	0.274	0.567
II	0.264	0.234	0.498
III	0.250	0.252	0.502
IV	0.239	0.228	0.467
V	0.221	0.235	0.456
VI	0.214	0.217	0.431
VII	0.258	0.153	0.411
VIII	0.283	0.226	0.509
alle	0.246	0.229	0.478

Eine Abnahme der $\log a$ mit der Annäherung an die Milchstrasse ist, wie schon oben bemerkt, besonders bei den Sternen von der Grösse 5.5—6.0 deutlich ausgesprochen. Indessen sind diese Zahlen unsicher, wenn auch wohl nicht in dem Betrage, dass dadurch die bemerkte Eigenschaft verloren gehen dürfte.

An sich ist es ja wenig wahrscheinlich, dass die a für alle Grössenklassen dasselbe Verhalten zeigen und es wird deshalb das gefundene Resultat in keiner Weise befremden können.

Grösse 1.0

h m — h m	0-4°	5-9°	10-14°	15-19°	20-24°	25-29°	30-34°	35-39°
0.0 — 0.40	0	0	3	3	2	2	2	3
0.40— 1.20	1	3	1	2	4	4	3	1
1.20— 2.0	3	2	2	3	3	1	1	2
2.0 — 2.40	3	3	2	0	1	6	4	1
2.40— 3.20	2	3	1	1	4	2	5	3
3.20— 4.0	0	1	3	1	7	2	3	4
4.0 — 4.40	0	5	4	14	3	2	3	0
4.40— 5.20	7	5	2	5	3	2	3	5
5.20— 6.0	1	5	3	2	5	3	1	4
6.0 — 6.40	1	2	5	2	3	3	0	0
6.40— 7.20	1	2	2	2	1	2	3	2
7.20— 8.0	1	2	2	2	2	6	3	1
8.0 — 8.40	2	4	0	2	1	1	0	0
8.40— 9.20	1	2	2	0	1	3	2	3
9.20—10.0	0	3	3	1	3	1	2	3
10.0 —10.40	2	0	3	0	3	1	3	1
10.40—11.20	3	3	3	1	3	1	4	2
11.20—12.0	2	5	0	1	2	0	0	3
12.0 —12.40	2	0	1	4	2	7	2	1
12.40—13.20	1	1	2	2	2	3	1	2
13.20—14.0	3	0	1	3	4	1	1	3
14.0 —14.40	2	3	3	5	1	2	2	2
14.40—15.20	2	1	0	2	0	4	3	2
15.20—16.0	1	2	2	4	3	5	2	3
16.0 —16.40	2	0	2	2	1	0	4	2
16.40—17.20	2	2	4	3	2	1	3	4
17.20—18.0	8	0	1	5	4	3	2	1
18.0 —18.40	3	3	0	1	5	3	4	7
18.40—19.20	5	1	7	3	4	3	2	4
19.20—20.0	0	5	3	10	3	3	3	4
20.0 —20.40	1	1	7	2	4	3	4	6
20.40—21.20	3	5	2	1	1	4	2	5
21.20—22.0	2	2	0	3	4	4	0	3
22.0 —22.40	2	1	3	0	2	3	1	4
22.40—23.20	3	5	2	2	4	0	0	0
23.20— 0.0	2	3	2	1	1	1	1	0
Σ	74	85	83	95	98	92	79	91

bis 5.5.

40-44°	45-49°	50-54°	55-59°	60-64°	65-69°	70-74°	75-79°	80-84°	85-89°
2	5	2	1	1	0	1	0	0	0
4	1	2	5	1	1	0	0	0	2
4	2	1	0	2	2	3	2	0	0
1	3	0	0	0	1	1	0	0	0
2	3	3	4	0	1	1	0	1	0
1	5	0	1	3	1	1	0	3	0
2	4	3	0	1	1	0	0	1	0
2	1	2	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	2	1	3	0	2	0	1
1	2	0	3	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	2	0	0	0	0	0
3	3	1	1	2	3	0	0	1	0
3	0	3	3	1	0	2	0	0	0
3	1	0	1	0	4	0	1	2	0
3	1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1	2	0	0	0
2	1	1	1	0	0	3	1	0	0
3	0	1	4	0	2	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
2	2	4	0	0	1	1	2	0	0
2	2	1	1	0	2	2	0	0	0
5	3	1	3	0	0	1	2	0	0
3	3	2	1	3	2	0	2	0	0
2	2	1	1	0	2	0	0	1	0
2	1	3	3	1	2	1	1	0	0
2	1	1	3	1	1	2	0	0	1
1	2	5	3	0	3	3	1	0	0
3	3	3	2	1	2	0	0	0	0
2	4	0	1	2	1	1	1	0	0
5	6	3	1	3	1	0	0	1	0
3	3	2	0	3	2	3	0	0	0
4	4	2	2	2	0	2	0	0	1
2	6	2	1	1	3	1	0	2	0
2	2	1	2	1	1	0	1	0	0
82	81	54	55	35	46	33	17	14	5

Grösse 1.0

h m — h m	0-4°	5-9°	10-14°	15-19°	20-24°	25-29°	30-34°	35-39°
0.0 — 0.40	0	0	3	3	2	2	2	3
0.40— 1.20	1	3	1	2	4	4	3	1
1.20— 2.0	3	2	2	3	3	1	1	2
2.0 — 2.40	3	3	2	0	1	6	4	1
2.40— 3.20	2	3	1	1	4	2	5	3
3.20— 4.0	0	1	3	1	7	2	3	4
4.0 — 4.40	0	5	4	14	3	2	3	0
4.40— 5.20	7	5	2	5	3	2	3	5
5.20— 6.0	1	5	3	2	5	3	1	4
6.0 — 6.40	1	2	5	2	3	3	0	0
6.40— 7.20	1	2	2	2	1	2	3	2
7.20— 8.0	1	2	2	2	2	6	3	1
8.0 — 8.40	2	4	0	2	1	1	0	0
8.40— 9.20	1	2	2	0	1	3	2	3
9.20—10.0	0	3	3	1	3	1	2	3
10.0 —10.40	2	0	3	0	3	1	3	1
10.40—11.20	3	3	3	1	3	1	4	2
11.20—12.0	2	5	0	1	2	0	0	3
12.0 —12.40	2	0	1	4	2	7	2	1
12.40—13.20	1	1	2	2	2	3	1	2
13.20—14.0	3	0	1	3	4	1	1	3
14.0 —14.40	2	3	3	5	1	2	2	2
14.40—15.20	2	1	0	2	0	4	3	2
15.20—16.0	1	2	2	4	3	5	2	3
16.0 —16.40	2	0	2	2	1	0	4	2
16.40—17.20	2	2	4	3	2	1	3	4
17.20—18.0	8	0	1	5	4	3	2	1
18.0 —18.40	3	3	0	1	5	3	4	7
18.40—19.20	5	1	7	3	4	3	2	4
19.20—20.0	0	5	3	10	3	3	3	4
20.0 —20.40	1	1	7	2	4	3	4	6
20.40—21.20	3	5	2	1	1	4	2	5
21.20—22.0	2	2	0	3	4	4	0	3
22.0 —22.40	2	1	3	0	2	3	1	4
22.40—23.20	3	5	2	2	4	0	0	0
23.20— 0.0	2	3	2	1	1	1	1	0
Σ	74	85	83	95	98	92	79	91

bis 5.5.

40-44°	45-49°	50-54°	55-59°	60-64°	65-69°	70-74°	75-79°	80-84°	85-89°
2	5	2	1	1	0	1	0	0	0
4	1	2	5	1	1	0	0	0	2
4	2	1	0	2	2	3	2	0	0
1	3	0	0	0	1	1	0	0	0
2	3	3	4	0	1	1	0	1	0
1	5	0	1	3	1	1	0	3	0
2	4	3	0	1	1	0	0	1	0
2	1	2	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	2	1	3	0	2	0	1
1	2	0	3	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	2	0	0	0	0	0
3	3	1	1	2	3	0	0	1	0
3	0	3	3	1	0	2	0	0	0
3	1	0	1	0	4	0	1	2	0
3	1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1	2	0	0	0
2	1	1	1	0	0	3	1	0	0
3	0	1	4	0	2	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
2	2	4	0	0	1	1	2	0	0
2	2	1	1	0	2	2	0	0	0
5	3	1	3	0	0	1	2	0	0
3	3	2	1	3	2	0	2	0	0
2	2	1	1	0	2	0	0	1	0
2	1	3	3	1	2	1	1	0	0
2	1	1	3	1	1	2	0	0	1
1	2	5	3	0	3	3	1	0	0
3	3	3	2	1	2	0	0	0	0
2	4	0	1	2	1	1	1	0	0
5	6	3	1	3	1	0	0	1	0
3	3	2	0	3	2	3	0	0	0
4	4	2	2	2	0	2	0	0	1
2	6	2	1	1	3	1	0	2	0
2	2	1	2	1	1	0	1	0	0
82	81	54	55	35	46	33	17	14	5

Grösse 1.0

h m — h m	0-4°	5-9°	10-14°	15-19°	20-24°	25-29°	30-34°	35-39°
0.0 — 0.40	0	0	3	3	2	2	2	3
0.40— 1.20	1	3	1	2	4	4	3	1
1.20— 2.0	3	2	2	3	3	1	1	2
2.0 — 2.40	3	3	2	0	1	6	4	1
2.40— 3.20	2	3	1	1	4	2	5	3
3.20— 4.0	0	1	3	1	7	2	3	4
4.0 — 4.40	0	5	4	14	3	2	3	0
4.40— 5.20	7	5	2	5	3	2	3	5
5.20— 6.0	1	5	3	2	5	3	1	4
6.0 — 6.40	1	2	5	2	3	3	0	0
6.40— 7.20	1	2	2	2	1	2	3	2
7.20— 8.0	1	2	2	2	2	6	3	1
8.0 — 8.40	2	4	0	2	1	1	0	0
8.40— 9.20	1	2	2	0	1	3	2	3
9.20—10.0	0	3	3	1	3	1	2	3
10.0 —10.40	2	0	3	0	3	1	3	1
10.40—11.20	3	3	3	1	3	1	4	2
11.20—12.0	2	5	0	1	2	0	0	3
12.0 —12.40	2	0	1	4	2	7	2	1
12.40—13.20	1	1	2	2	2	3	1	2
13.20—14.0	3	0	1	3	4	1	1	3
14.0 —14.40	2	3	3	5	1	2	2	2
14.40—15.20	2	1	0	2	0	4	3	2
15.20—16.0	1	2	2	4	3	5	2	3
16.0 —16.40	2	0	2	2	1	0	4	2
16.40—17.20	2	2	4	3	2	1	3	4
17.20—18.0	8	0	1	5	4	3	2	1
18.0 —18.40	3	3	0	1	5	3	4	7
18.40—19.20	5	1	7	3	4	3	2	4
19.20—20.0	0	5	3	10	3	3	3	4
20.0 —20.40	1	1	7	2	4	3	4	6
20.40—21.20	3	5	2	1	1	4	2	5
21.20—22.0	2	2	0	3	4	4	0	3
22.0 —22.40	2	1	3	0	2	3	1	4
22.40—23.20	3	5	2	2	4	0	0	0
23.20— 0.0	2	3	2	1	1	1	1	0
Σ	74	85	83	95	98	92	79	91

bis 5.5.

40-44°	45-49°	50-54°	55-59°	60-64°	65-69°	70-74°	75-79°	80-84°	85-89°
2	5	2	1	1	0	1	0	0	0
4	1	2	5	1	1	0	0	0	2
4	2	1	0	2	2	3	2	0	0
1	3	0	0	0	1	1	0	0	0
2	3	3	4	0	1	1	0	1	0
1	5	0	1	3	1	1	0	3	0
2	4	3	0	1	1	0	0	1	0
2	1	2	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	2	1	3	0	2	0	1
1	2	0	3	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	2	0	0	0	0	0
3	3	1	1	2	3	0	0	1	0
3	0	3	3	1	0	2	0	0	0
3	1	0	1	0	4	0	1	2	0
3	1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1	2	0	0	0
2	1	1	1	0	0	3	1	0	0
3	0	1	4	0	2	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
2	2	4	0	0	1	1	2	0	0
2	2	1	1	0	2	2	0	0	0
5	3	1	3	0	0	1	2	0	0
3	3	2	1	3	2	0	2	0	0
2	2	1	1	0	2	0	0	1	0
2	1	3	3	1	2	1	1	0	0
2	1	1	3	1	1	2	0	0	1
1	2	5	3	0	3	3	1	0	0
3	3	3	2	1	2	0	0	0	0
2	4	0	1	2	1	1	1	0	0
5	6	3	1	3	1	0	0	1	0
3	3	2	0	3	2	3	0	0	0
4	4	2	2	2	0	2	0	0	1
2	6	2	1	1	3	1	0	2	0
2	2	1	2	1	1	0	1	0	0
82	81	54	55	35	46	33	17	14	5

Grösse 5.6

h m	h m	0-4°	5-9°	10-14°	15-19°	20-24°	25-29°	30-34°	35-39°
0.0 —	0.40	0	1	2	2	4	1	4	1
0.40—	1.20	3	0	1	4	3	2	0	2
1.20—	2.0	0	0	1	1	2	3	1	3
2.0 —	2.40	1	1	2	3	4	1	2	2
2.40—	3.20	0	0	2	3	6	5	2	1
3.20—	4.0	2	3	0	4	3	2	2	3
4.0 —	4.40	2	4	8	4	6	3	4	1
4.40—	5.20	2	3	1	4	3	3	2	1
5.20—	6.0	6	3	4	2	2	2	1	1
6.0 —	6.40	1	1	4	3	0	2	3	0
6.40—	7.20	1	2	1	4	5	1	3	0
7.20—	8.0	3	2	2	4	4	1	0	2
8.0 —	8.40	0	1	4	1	5	3	1	2
8.40—	9.20	0	2	1	2	0	2	3	0
9.20—	10.0	2	3	2	0	0	1	2	1
10.0 —	10.40	0	1	3	1	1	0	3	3
10.40—	11.20	2	0	0	1	0	1	1	2
11.20—	12.0	1	1	0	3	1	1	2	0
12.0 —	12.40	1	2	0	2	5	5	0	1
12.40—	13.20	1	0	4	0	2	1	0	3
13.20—	14.0	2	1	1	0	0	4	1	3
14.0 —	14.40	0	0	1	0	1	1	0	1
14.40—	15.20	2	0	0	1	1	1	1	3
15.20—	16.0	1	0	2	4	0	1	2	2
16.0 —	16.40	1	4	2	1	2	3	2	2
16.40—	17.20	1	1	3	2	5	3	1	1
17.20—	18.0	2	1	2	2	5	4	3	3
18.0 —	18.40	1	3	1	2	4	1	2	3
18.40—	19.20	4	3	3	6	4	2	6	0
19.20—	20.0	0	2	6	5	4	3	3	4
20.0 —	20.40	0	0	6	1	6	5	2	3
20.40—	21.20	1	1	2	2	3	0	4	3
21.20—	22.0	2	2	3	4	1	2	1	1
22.0 —	22.40	1	1	2	1	3	1	3	3
22.40—	23.20	3	1	0	1	1	0	3	5
23.20—	0.0	0	1	1	2	4	1	2	4
	Σ	51	51	77	82	100	72	72	70

bis 6.0.

40-44°	45-49°	50-54°	55-59°	60-64°	65-69°	70-74°	75-79°	80-84°	85-89°
3	3	4	2	1	1	1	0	0	0
3	0	2	0	4	2	1	2	0	0
2	1	1	3	2	1	0	0	0	0
1	1	3	1	0	1	0	0	1	0
1	6	2	1	3	0	0	1	1	1
1	2	5	2	1	1	1	0	0	0
1	2	1	2	3	0	1	1	1	0
4	2	0	2	2	0	1	0	0	2
0	5	1	2	0	2	0	0	0	0
1	3	2	2	1	0	3	1	0	0
2	5	1	1	0	0	1	0	0	0
0	2	1	2	1	0	0	1	1	0
0	2	1	1	2	4	0	1	0	0
1	0	2	1	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	2	0	0	0	0
0	1	3	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	3	2	0	0	1	0	1
0	1	0	3	1	0	1	1	0	0
2	3	0	0	4	2	1	1	0	0
2	2	3	1	1	2	2	3	0	0
1	0	3	1	2	0	0	0	0	0
0	4	1	1	2	1	0	0	1	0
1	0	6	2	4	1	0	0	0	0
0	4	0	1	1	1	0	2	0	0
1	1	2	1	1	0	1	2	0	0
0	3	2	1	1	0	2	0	0	0
3	0	2	0	1	2	0	0	0	1
2	1	2	3	1	0	0	1	1	0
3	5	2	1	0	0	0	0	1	0
3	5	3	1	4	1	0	1	1	0
1	3	3	7	0	0	1	2	1	0
2	2	2	2	3	0	0	1	0	0
3	0	3	3	4	2	1	3	0	0
3	2	2	4	3	0	1	0	0	0
3	2	1	2	5	1	2	0	1	1
52	75	69	61	62	29	24	26	11	6

Grösse 6.1

h m — h m	0-4°	5-9°	10-14°	15-19°	20-24°	25-29°	30-34°	35-39°
0.0 — 0.40	1	4	4	2	5	4	4	3
0.40— 1.20	2	2	4	3	4	3	4	5
1.20— 2.0	3	0	2	5	5	4	3	4
2.0 — 2.40	0	4	2	3	3	5	6	6
2.40— 3.20	2	1	2	5	0	4	6	4
3.20— 4.0	1	4	2	4	7	0	9	3
4.0 — 4.40	2	4	5	12	8	5	5	7
4.40— 5.20	5	2	3	8	4	6	6	6
5.20— 6.0	5	3	7	7	2	3	6	4
6.0 — 6.40	6	4	5	10	3	4	3	8
6.40— 7.20	1	4	4	2	3	7	2	6
7.20— 8.0	4	1	6	3	4	2	3	4
8.0 — 8.40	1	1	5	5	3	3	3	5
8.40— 9.20	1	2	0	4	5	4	5	3
9.20—10.0	3	2	3	2	3	3	5	5
10.0 —10.40	2	5	1	2	4	3	5	3
10.40—11.20	5	1	3	1	2	3	1	1
11.20—12.0	2	1	1	4	2	1	2	5
12.0 —12.40	3	3	5	2	3	7	1	1
12.40—13.20	0	1	3	6	4	2	2	3
13.20—14.0	0	4	1	2	5	2	4	5
14.0 —14.40	4	1	3	4	4	4	4	4
14.40—15.20	4	3	4	5	5	4	2	3
15.20—16.0	3	1	4	6	3	0	2	5
16.0 —16.40	3	3	2	5	3	5	1	1
16.40—17.20	2	4	5	10	5	4	3	1
17.20—18.0	5	1	8	7	4	3	7	5
18.0 —18.40	3	4	8	11	4	5	4	4
18.40—19.20	3	3	7	8	9	5	6	9
19.20—20.0	2	1	6	3	6	5	7	8
20.0 —20.40	2	4	6	10	6	4	5	6
20.40—21.20	4	7	1	5	6	4	1	9
21.20—22.0	1	6	7	4	5	3	3	5
22.0 —22.40	2	1	3	7	3	3	5	10
22.40—23.20	2	0	2	3	4	5	6	3
23.20— 0.0	3	6	0	5	4	7	4	7
Σ	92	98	134	185	150	136	145	171

bis 6.5.

40-44°	45-49°	50-54°	55-59°	60-64°	65-69°	70-74°	75-79°	80-84°	85-89°
5	2	4	4	2	4	2	3	1	0
10	9	3	4	4	0	2	5	1	0
0	3	2	5	6	2	4	3	1	0
4	6	8	7	1	3	2	0	0	0
5	7	3	2	4	2	2	1	0	0
4	6	5	4	2	3	6	1	0	1
7	1	1	4	1	0	1	1	0	0
3	4	4	4	0	2	4	0	0	0
2	4	5	5	3	1	1	1	0	0
2	2	1	5	1	0	1	1	0	0
3	4	2	1	1	1	2	1	1	0
3	2	2	4	2	2	1	0	3	0
2	4	3	1	0	2	3	3	0	0
2	4	2	3	1	0	3	1	0	0
1	1	2	2	3	3	2	0	1	0
3	3	4	3	3	2	2	0	2	0
5	0	5	3	2	4	2	2	0	0
5	5	0	3	4	1	1	1	2	0
5	1	4	3	3	2	2	0	0	3
4	3	3	0	2	1	0	0	3	0
5	1	5	3	2	2	0	1	1	0
6	3	0	5	2	1	0	0	1	0
3	4	2	1	2	3	1	1	0	0
2	1	3	4	3	2	0	1	0	0
3	1	3	1	3	2	3	1	0	0
5	6	2	2	4	2	1	3	0	0
6	9	2	3	2	3	1	1	1	0
4	9	4	2	2	2	1	4	0	0
7	8	5	1	3	1	1	3	2	0
3	5	7	13	5	3	1	2	0	0
10	7	8	7	3	2	1	1	1	1
9	8	7	4	4	3	0	1	3	0
5	11	8	4	7	3	2	3	0	0
3	4	4	5	5	2	2	0	0	1
12	5	1	7	7	1	1	0	1	0
6	6	4	5	6	4	3	0	0	0
164	159	128	134	105	71	61	46	25	6

Zone I.	7°	10°	11°	15°	21°	22°	25°
	h h 12—13	h h 12—14	h h 12—14	h h 12—14	h h 12—14	h h 12—14	h h 12—14
m m 1—5.5	—	—	2	1	1	2	1
5.6	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	1	—	1	—	—
8	—	—	—	—	1	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—
6.0	1	1	—	—	2	—	3
1	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	1
4	—	1	3	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	2	2
6	—	1	—	—	—	—	—
7	—	1	—	1	—	—	—
8	—	—	—	—	1	2	3
9	—	—	1	1	—	—	—
7.0	—	2	3	3	—	4	1
1	—	1	—	1	—	1	—
2	—	—	—	—	1	—	1
3	—	1	1	1	1	1	2
4	—	—	1	—	1	4	1
5	1	1	1	2	5	4	6
6	—	—	—	2	—	1	—
7	—	3	—	1	2	—	3
8	—	1	—	—	2	—	2
9	—	2	—	1	—	—	—
8.0	2	4	3	3	7	8	7
1	—	3	1	—	1	1	—
2	4	4	2	4	3	1	—
3	2	3	7	6	4	4	2
4	1	4	1	1	—	3	5
5	3	6	6	8	6	5	15
6	4	9	4	5	3	3	1
7	5	12	10	6	2	5	6
8	7	10	11	9	11	8	10
9	1	15	2	3	2	5	8
9.0	7	12	12	13	19	15	14
1	3	13	5	13	13	9	18
2	11	13	19	15	15	12	17
3	8	24	20	32	33	28	28
4	7	15	20	14	16	31	25
5	30	88	70	106	59	65	86
	97	250	206	252	212	224	268

30^0 12^h–14^h	31^0 12^h–14^h	35^0 12^h–14^h	41^0 12^h–13^h	42^0 12^h–13^h	Σ	G $f = 0.18$
—	2	—	1	1	11	9
—	—	—	—	—	—	—
—	—	1	—	—	3	1
—	—	1	—	—	2	1
—	—	—	—	—	—	—
—	1	—	—	—	8	5
—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	—	2
—	1	—	—	—	2	2
—	—	—	—	—	4	1
—	1	1	—	1	7	10
—	—	—	—	—	1	1
—	1	2	—	—	5	4
1	3	3	—	—	13	7
—	—	—	—	1	3	2
—	1	2	2	—	18	17
—	—	—	—	—	3	3
—	4	1	4	—	11	8
2	2	—	1	1	13	11
—	1	—	—	—	8	4
1	3	3	3	6	36	22
1	2	2	—	2	10	5
1	—	2	—	—	12	12
1	1	1	1	2	11	19
1	1	1	1	2	9	8
3	2	2	3	1	45	44
2	2	3	1	1	15	14
6	2	3	2	1	32	28
3	6	5	1	2	45	36
6	1	2	2	1	27	24
8	3	6	3	4	73	76
3	6	2	1	2	43	32
6	4	10	—	1	67	53
6	7	8	2	3	92	85
7	10	3	1	5	62	59
13	15	17	6	5	148	180
14	21	9	3	4	125	121
9	12	10	2	6	141	160
27	24	24	5	12	265	242
39	35	15	10	7	234	270
97	79	71	28	29	808	860
257	253	210	83	100	2412	

Zone II.	1⁰ h h 11-13	2⁰ h h 11-13	10⁰ h h 10_{20}-11_{20}	10⁰ h h 14-15	11⁰ h h 10_{20}-11_{20}	11⁰ h h 14-15	21⁰ h h 10-11	21⁰ h h 14_{40}-15_{40}	22⁰ h h 10-11	22⁰ h h 14_{40}-15_{40}	30⁰ h h 10-11
m m 1—5.5	—	2	1	1	2	—	—	—	—	—	—
5.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6.0	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	1
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—
4	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	—	1	—	—	—	1	3	—	—	—	2
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	2	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7.0	—	—	—	1	—	2	1	2	3	1	1
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—
3	2	—	1	1	—	—	1	—	—	—	—
4	—	—	—	1	—	1	—	—	1	—	—
5	1	1	1	3	1	1	1	—	5	1	3
6	—	—	1	1	—	1	1	—	—	—	—
7	2	3	2	1	2	—	1	1	1	1	—
8	5	3	—	—	—	2	1	—	4	2	1
9	—	1	—	2	1	—	1	—	1	—	—
8.0	3	5	—	2	—	4	1	4	—	2	2
1	2	—	—	1	—	—	—	—	1	—	1
2	5	1	1	1	2	2	3	1	2	5	2
3	6	3	1	2	—	3	2	6	2	1	1
4	2	2	—	3	—	3	2	1	2	2	3
5	12	7	7	5	4	—	6	9	3	—	5
6	2	3	1	3	—	2	3	1	4	1	5
7	6	8	3	4	5	4	2	5	6	5	2
8	13	17	8	6	5	4	2	4	4	7	7
9	3	3	4	6	1	3	3	2	2	4	4
9.0	31	23	13	7	6	13	7	12	10	6	10
1	7	8	8	7	4	3	10	3	4	7	6
2	27	15	12	11	8	7	6	6	8	12	10
3	42	39	19	17	17	8	10	19	13	17	10
4	6	9	5	16	9	11	15	13	15	14	15
5	88	80	47	55	56	61	49	42	43	43	50
	268	237	135	157	124	136	132	132	134	134	143

30° h h 15-16	31° h h 10-11	31° h h 15-16	41° h h 11-12	41° h h 14-15	42° h h 11-12	42° h h 14-15	50° h h 11-14	51° h h 11-14	62° h h 12-13	63° h h 12-13	64° h h 12-13	Σ	G f=0.25
2	1	1	—	1	—	—	2	—	—	—	—	13	12
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
1	—	—	—	—	—	—	1	2	—	1	2	10	7
—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1	1
—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3
—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2	3
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
1	—	—	2	1	2	—	3	1	1	1	—	19	13
—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	2
—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	5
—	—	1	—	1	1	—	—	—	1	—	1	10	10
—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3
—	3	2	2	1	1	3	1	1	—	1	—	26	23
—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3
—	—	1	2	—	—	—	2	—	—	—	1	9	11
1	—	3	—	2	—	—	1	3	1	1	—	17	15
—	1	—	—	—	1	—	—	1	1	—	—	7	6
2	1	—	1	2	1	—	3	3	2	1	—	34	31
—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	5	7
—	—	—	—	—	1	—	3	—	—	—	1	19	17
—	—	1	—	—	1	2	4	3	—	—	—	29	27
—	—	—	—	—	—	1	—	3	—	—	—	10	11
3	6	2	2	1	—	—	1	5	—	—	—	43	60
2	1	—	—	—	—	1	4	1	—	—	—	14	19
—	2	2	1	3	1	—	1	2	1	—	2	40	39
3	3	—	—	2	2	2	1	4	2	—	4	50	50
3	3	2	2	2	1	—	7	5	—	1	—	46	34
5	2	2	9	3	7	4	8	3	—	1	1	103	105
4	—	3	1	4	1	1	2	4	1	—	—	46	45
2	2	2	2	4	2	5	6	6	2	—	1	84	73
5	12	9	4	3	4	3	6	6	—	1	2	132	118
3	9	7	1	4	3	2	5	3	1	3	3	79	82
11	9	7	8	6	7	8	22	26	3	2	5	252	250
9	4	6	10	7	7	10	13	8	1	7	4	153	168
11	15	5	10	7	5	10	17	22	3	8	4	239	223
12	8	12	12	11	8	16	19	27	10	5	5	356	336
14	17	10	17	15	8	11	35	21	5	7	3	291	375
44	36	41	20	15	23	21	81	78	22	11	10	1016	1195
138	136	119	109	96	87	102	248	239	57	51	49	3163	

Grösse 6.1

h m — h m	0-4°	5-9°	10-14°	15-19°	20-24°	25-29°	30-34°	35-39°
0.0 — 0.40	1	4	4	2	5	4	4	3
0.40— 1.20	2	2	4	3	4	3	4	5
1.20— 2.0	3	0	2	5	5	4	3	4
2.0 — 2.40	0	4	2	3	3	5	6	6
2.40— 3.20	2	1	2	5	0	4	6	4
3.20— 4.0	1	4	2	4	7	0	9	3
4.0 — 4.40	2	4	5	12	8	5	5	7
4.40— 5.20	5	2	3	8	4	6	6	6
5.20— 6.0	5	3	7	7	2	3	6	4
6.0 — 6.40	6	4	5	10	3	4	3	8
6.40— 7.20	1	4	4	2	3	7	2	6
7.20— 8.0	4	1	6	3	4	2	3	4
8.0 — 8.40	1	1	5	5	3	3	3	5
8.40— 9.20	1	2	0	4	5	4	5	3
9.20—10.0	3	2	3	2	3	3	5	5
10.0 —10.40	2	5	1	2	4	3	5	3
10.40—11.20	5	1	3	1	2	3	1	1
11.20—12.0	2	1	1	4	2	1	2	5
12.0 —12.40	3	3	5	2	3	7	1	1
12.40—13.20	0	1	3	6	4	2	2	3
13.20—14.0	0	4	1	2	5	2	4	5
14.0 —14.40	4	1	3	4	4	4	4	4
14.40—15.20	4	3	4	5	5	4	2	3
15.20—16.0	3	1	4	6	3	0	2	5
16.0 —16.40	3	3	2	5	3	5	1	1
16.40—17.20	2	4	5	10	5	4	3	1
17.20—18.0	5	1	8	7	4	3	7	5
18.0 —18.40	3	4	8	11	4	5	4	4
18.40—19.20	3	3	7	8	9	5	6	9
19.20—20.0	2	1	6	3	6	5	7	8
20.0 —20.40	2	4	6	10	6	4	5	6
20.40—21.20	4	7	1	5	6	4	1	9
21.20—22.0	1	6	7	4	5	3	3	5
22.0 —22.40	2	1	3	7	3	3	5	10
22.40—23.20	2	0	2	3	4	5	6	3
23.20— 0.0	3	6	0	5	4	7	4	7
Σ	92	98	134	185	150	136	145	171

bis 6.5.

40-44°	45-49°	50-54°	55-59°	60-64°	65-69°	70-74°	75-79°	80-84°	85-89°
5	2	4	4	2	4	2	3	1	0
10	9	3	4	4	0	2	5	1	0
0	3	2	5	6	2	4	3	1	0
4	6	8	7	1	3	2	0	0	0
5	7	3	2	4	2	2	1	0	0
4	6	5	4	2	3	6	1	0	1
7	1	1	4	1	0	1	1	0	0
3	4	4	4	0	2	4	0	0	0
2	4	5	5	3	1	1	1	0	0
2	2	1	5	1	0	1	1	0	0
3	4	2	1	1	1	2	1	1	0
3	2	2	4	2	2	1	0	3	0
2	4	3	1	0	2	3	3	0	0
2	4	2	3	1	0	3	1	0	0
1	1	2	2	3	3	2	0	1	0
3	3	4	3	3	2	2	0	2	0
5	0	5	3	2	4	2	2	0	0
5	5	0	3	4	1	1	1	2	0
5	1	4	3	3	2	2	0	0	3
4	3	3	0	2	1	0	0	3	0
5	1	5	3	2	2	0	1	1	0
6	3	0	5	2	1	0	0	1	0
3	4	2	1	2	3	1	1	0	0
2	1	3	4	3	2	0	1	0	0
3	1	3	1	3	2	3	1	0	0
5	6	2	2	4	2	1	3	0	0
6	9	2	3	2	3	1	1	1	0
4	9	4	2	2	2	1	4	0	0
7	8	5	1	3	1	1	3	2	0
3	5	7	13	5	3	1	2	0	0
10	7	8	7	3	2	1	1	1	1
9	8	7	4	4	3	0	1	3	0
5	11	8	4	7	3	2	3	0	0
3	4	4	5	5	2	2	0	0	1
12	5	1	7	7	1	1	0	1	0
6	6	4	5	6	4	3	0	0	0
164	159	128	134	105	71	61	46	25	6

Zone	7°	10°	11°	15°	21°	22°	25°
	12h—13h	12h—14h	12h—14h	12h—14h	12h—14h	12h—14h	12h—14h
m m 1—5.5	—	—	2	1	1	2	1
5.6	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	1	—	1	—	—
8	—	—	—	—	1	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—
6.0	1	1	—	—	2	—	3
1	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	1
4	—	1	3	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	2	2
6	—	1	—	—	—	—	—
7	—	1	—	1	—	—	—
8	—	—	—	—	1	2	3
9	—	—	1	1	—	—	—
7.0	—	2	3	3	—	4	1
1	—	1	—	1	—	1	—
2	—	—	—	—	1	—	1
3	—	1	1	1	1	1	2
4	—	—	1	—	1	4	1
5	1	1	1	2	5	4	6
6	—	—	—	2	—	1	—
7	—	3	—	1	2	—	3
8	—	1	—	—	2	—	2
9	—	2	—	1	—	—	—
8.0	2	4	3	3	7	8	7
1	—	3	1	—	2	1	—
2	4	4	2	4	5	1	—
3	2	3	7	6	4	4	2
4	1	4	1	1	—	3	5
5	3	6	6	8	6	5	15
6	4	9	4	5	3	3	1
7	5	12	10	6	2	5	6
8	7	13	11	4	21	8	10
9	1	15	2	3	2	5	8
9.0	7	12	12	15	19	15	14
1	3	15	5	13	13	9	18
2	11	15	19	25	15	12	17
3	8	24	30	32	33	25	23
4	7	15	30	14	16	31	25
5	30	58	70	136	53	55	56
	97	250	206	252	223	234	268

30° h h 12—14	31° h h 12—14	35° h h 12—14	41° h h 12 · 13	42° h h 12—13	Σ	G f = 0.18
—	2	—	1	1	11	9
—	—	—	—	—	—	—
—	—	1	—	—	3	1
—	—	1	—	—	2	1
—	—	—	—	—	—	—
—	1	—	—	—	8	5
—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	—	2
—	1	—	—	—	2	2
—	—	—	—	—	4	1
—	1	1	—	1	7	10
—	—	—	—	—	1	1
—	1	2	—	—	5	4
1	3	3	—	—	13	7
—	—	—	—	1	3	2
—	1	2	2	—	18	17
—	—	—	—	—	3	3
—	4	1	4	—	11	8
2	2	—	1	1	13	11
—	1	—	—	—	8	4
1	3	3	3	6	36	22
1	2	2	—	2	10	5
1	—	2	—	—	12	12
1	1	1	1	2	11	19
1	1	1	1	2	9	8
3	2	2	3	1	45	44
2	2	3	1	1	15	14
6	2	3	2	1	32	28
3	6	5	1	2	45	36
6	1	2	2	1	27	24
8	3	6	3	4	73	76
3	6	2	1	2	43	32
6	4	10	—	1	67	53
6	7	8	2	3	92	85
7	10	3	1	5	62	59
13	15	17	6	5	148	180
14	21	9	3	4	125	121
9	12	10	2	6	141	160
27	24	24	5	12	265	242
39	35	15	10	7	234	270
97	79	71	28	29	808	860
257	253	210	83	100	2412	

Zone IV.	1°	1°	2°	2°	10°	10°	11°	11°	21°	21°	22°	22°	30°	30°	31°	31°	41°
	8h–9h	17h–18h	8h–9h	17h–18h	7h20–8h20	17h–18h	7h20–8h20	17h–18h	7h–8h	18h–19h	7h–8h	18h–19h	7h–8h	18h–19h	7h–8h	18h–19h	7h–8h
mm 1—5.5	—	2	—	4	—	—	1	1	—	2	2	1	1	2	—	2	—
5.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6.0	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2	1
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	—	1	1	3	1	—	1	2	—	—	—	2	—	1	2	1	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
7	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	1	—	1
8	—	3	1	1	—	—	—	—	1	—	2	—	—	1	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—
7.0	—	—	—	2	1	—	—	1	2	1	2	—	2	1	1	1	2
1	—	—	—	1	—	—	—	—	1	1	1	—	—	1	—	—	—
2	—	2	2	—	—	1	—	2	1	—	1	1	—	1	—	—	—
3	2	—	—	1	—	—	3	1	—	—	1	—	—	—	—	1	1
4	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	2	—	1	1
5	2	2	5	1	—	2	2	2	2	2	2	4	3	3	2	—	3
6	1	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	2	—	—	—	1
7	2	2	—	—	1	1	—	2	1	4	1	2	—	—	2	3	—
8	2	4	4	3	2	1	2	1	—	4	—	—	1	1	1	1	2
9	2	1	1	—	—	—	—	—	2	1	—	2	—	2	—	—	1
8.0	9	3	3	6	6	1	6	1	4	6	7	3	1	6	2	9	6
1	1	—	—	2	—	4	1	1	2	1	2	1	4	—	3	1	2
2	1	3	4	1	6	3	1	4	1	4	2	3	—	2	4	7	2
3	5	2	6	3	3	1	5	2	3	3	3	2	3	3	4	2	—
4	—	2	—	1	—	—	—	1	—	—	1	2	3	4	1	1	3
5	11	6	15	8	13	9	7	5	8	11	4	7	6	6	10	10	4
6	—	—	—	2	—	5	2	5	3	4	3	5	2	5	4	3	1
7	7	7	8	3	7	11	8	8	3	5	5	10	11	5	7	6	2
8	17	10	23	10	14	3	12	11	3	11	5	6	6	10	6	9	7
9	—	2	2	3	2	7	2	4	3	10	7	6	8	14	5	12	8
9.0	42	16	39	19	30	20	33	15	12	19	21	17	10	19	17	26	12
1	2	9	5	11	9	16	3	9	16	16	4	20	21	18	25	22	11
2	7	7	13	15	27	22	23	14	17	22	15	34	14	21	13	28	19
3	36	33	38	36	38	28	18	19	21	37	35	36	28	29	29	28	21
4	19	18	17	24	19	28	10	45	33	38	27	30	21	26	35	30	26
5	71	77	81	83	85	83	113	75	107	147	120	117	71	106	68	89	49
	240	213	268	244	264	247	254	231	248	355	274	311	218	290	242	296	187

30° h h 15-16	31° h h 10-11	31° h h 15-16	41° h h 11-12	41° h h 14-15	42° h h 11-12	42° h h 14-15	50° h h 11-14	51° h h 11-14	62° h h 12-13	63° h h 12-13	64° h h 12-13	Σ	G $f = 0.25$
2	1	1	—	1	—	—	2	—	—	—	—	13	12
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
1	—	—	—	—	—	—	1	2	—	1	2	10	7
—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1	1
—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3
—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2	3
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
1	—	—	2	1	2	—	3	1	1	1	—	19	13
—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	2
—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	5
—	—	1	—	1	1	—	—	—	1	—	1	10	10
—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3
—	3	2	2	1	1	3	1	1	—	1	—	26	23
—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3
—	—	1	2	—	—	—	2	—	—	—	1	9	11
1	—	3	—	2	—	—	1	3	1	1	—	17	15
—	1	—	—	—	1	—	—	1	1	—	—	7	6
2	1	—	1	2	1	—	3	3	2	1	—	34	31
—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	5	7
—	—	—	—	—	1	—	3	—	—	—	1	19	17
—	—	1	—	—	1	2	4	3	—	—	—	29	27
—	—	—	—	—	—	1	—	3	—	—	—	10	11
3	6	2	2	1	—	—	1	5	—	—	—	43	60
2	1	—	—	—	—	1	4	1	—	—	—	14	19
—	2	2	1	3	1	—	1	2	1	—	2	40	39
3	3	—	—	2	2	2	1	4	2	—	4	50	50
3	3	2	2	2	1	—	7	5	—	1	—	46	34
5	2	2	9	3	7	4	8	3	—	1	1	103	105
4	—	3	1	4	1	1	2	4	1	—	—	46	45
2	2	2	2	4	2	5	6	6	2	—	1	84	73
5	12	9	4	3	4	3	6	6	—	1	2	132	118
3	9	7	1	4	3	2	5	3	1	3	3	79	82
11	9	7	8	6	7	8	22	26	3	2	5	252	250
9	4	6	10	7	7	10	13	8	1	7	4	153	168
11	15	5	10	7	5	10	17	22	3	8	4	239	223
12	8	12	12	11	8	16	19	27	10	5	5	356	336
14	17	10	17	15	8	11	35	21	5	7	3	291	375
44	36	41	20	15	23	21	81	78	22	11	10	1016	1195
138	136	119	109	96	87	102	248	239	57	51	49	3163	

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]–5.5	—	—	1	1	1	1	1	1	—	1	1	—	—	—	1	3	1
5.6	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6.0	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—
1	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—
2	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—
3	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	1	2	1	—	1	—	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—
8	1	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	2	—	—	—
7.0	—	1	—	—	—	2	—	1	—	—	1	1	1	—	—	—	—
1	—	2	—	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	1	2	—	2	3	1	1	—	—	1	1	—	—	—	1	—
3	1	—	—	1	—	2	1	1	—	2	—	—	1	—	—	—	3
4	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—
5	—	2	2	1	—	—	—	3	2	1	2	2	—	2	3	1	1
6	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	1	—
7	—		—	1	2	1	2	1	1	1	—	2	2	—	—	1	1
8	1	1	2	—	2	1	3	1	3	2	—	2	—	—	1	1	2
9	—	1	—	1	—	—	1	—	—	1	1	—	—	1	—	—	—
8.0	2	—	6	2	1	—	3	4	2	5	2	3	1	3	2	3	3
1	—	—	—	—	1	3	—	2	2	1	—	—	1	2	—	—	3
2	—	1	4	1	2	3	1	1	—	5	3	2	4	2	1	—	1
3	4	2	3	—	2	1	5	—	1	3	2	3	6	1	2	2	1
4	—	—	3	1	—	1	1	—	2	—	2	1	—	3	3	2	2
5	6	—	5	1	9	10	5	7	4	6	2	3	4	5	6	3	6
6	—	1	1	5	2	1	—	2	5	8	2	—	1	5	—	3	2
7	2	7	2	1	6	2	4	6	1	6	2	3	3	3	1	3	3
8	16	4	14	4	6	5	10	5	5	4	6	7	2	6	5	—	7
9	4	3	2	2	3	2	5	5	4	4	2	1	7	3	7	3	4
9.0	15	4	11	4	11	12	15	15	11	16	9	16	6	9	17	16	16
1	10	2	8	3	9	9	1	7	8	11	10	13	9	8	5	9	9
2	7	7	9	13	11	14	2	8	13	11	11	5	6	13	16	12	8
3	24	11	23	14	29	22	24	25	12	16	9	12	10	19	10	20	8
4	16	9	15	4	27	24	7	19	32	15	20	22	27	24	15	16	15
5	55	73	32	67	42	67	94	72	68	56	33	45	65	67	71	44	39
	165	135	144	131	170	188	188	196	178	176	125	150	158	179	169	146	135

41°	42°	42°	50°	50°	51°	51°	62°	62°	63°	63°	64°	64°	70°	70°	71°	71°	Σ	G f-0.3
16-17h	9-10h	16-17h	8-9h	16-17h	8-9h	16-17h	9-10h	16-17h	9-10h	16-17h	9-10h	16-17h	9-11h	14-16h	9-11h	14-16h		
—	—	2	—	—	—	—	1	—	1	—	—	1	1	1	—	—	21	14
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	4	8
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	1
—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	4
—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	1	—	6	4
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
2	—	1	—	2	—	—	—	1	1	1	1	—	—	—	—	—	17	16
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	6
1	—	2	—	1	1	—	—	—	—	2	2	—	—	—	—	1	13	12
—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	3
1	—	—	—	—	1	2	—	1	2	—	—	—	2	—	—	1	17	28
—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	6	4
—	—	—	1	1	1	—	—	2	—	—	—	—	—	2	—	1	21	18
1	2	2	—	1	—	3	—	1	—	—	1	—	—	1	1	—	25	17
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	—	5	7
5	1	4	2	2	1	1	—	1	1	1	1	—	3	1	1	1	48	37
—	—	—	—	1	—	—	3	—	—	—	—	—	—	1	—	—	9	8
—	1	—	3	—	—	2	—	1	—	2	—	1	1	—	—	3	29	20
—	—	1	1	—	1	—	1	—	1	1	1	1	2	—	—	1	33	32
2	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	12	13
2	3	4	2	2	3	5	1	2	4	3	1	2	4	4	3	1	92	72
—	2	3	2	1	1	—	—	1	1	—	—	—	1	1	—	—	28	23
5	1	2	1	1	—	—	2	1	2	1	—	1	3	—	1	—	55	47
1	3	2	3	—	1	2	1	1	—	3	1	—	1	—	—	1	58	59
1	1	—	3	1	1	4	1	—	—	1	—	—	1	2	—	1	38	40
3	4	7	8	3	6	4	2	6	1	2	—	1	7	2	1	5	144	126
1	1	1	—	2	3	—	—	1	—	1	—	2	1	2	1	1	50	54
1	2	3	2	1	5	1	2	—	1	1	—	2	1	1	3	3	84	88
—	4	4	2	4	6	3	3	6	2	3	—	2	2	3	2	5	160	141
6	6	3	3	1	1	4	1	2	—	3	4	1	3	3	—	1	103	98
9	8	14	5	8	6	9	9	4	7	2	3	1	7	10	6	6	317	300
9	4	10	9	3	10	6	3	4	1	7	2	3	2	5	3	7	216	201
13	12	12	4	4	6	6	4	2	6	4	1	2	1	4	5	9	261	267
12	8	11	10	16	8	17	7	8	5	10	2	7	6	5	4	7	431	403
9	9	9	12	13	8	8	3	8	5	6	10	11	8	14	1	12	453	450
37	43	24	26	42	22	30	13	23	18	19	19	21	34	26	34	21	1445	1434
121	118	122	99	111	92	109	57	76	60	74	49	59	95	89	68	88	4220	

Zone IV.	1° 8–9h	1° 17–18h	2° 8–9h	2° 17–18h	10° 7h30–8h30	10° 17–18h	11° 7h30–8h30	11° 17–18h	21° 7–8h	21° 18–19h	22° 7–8h	22° 18–19h	30° 7–8h	30° 18–19h	31° 7–8h	31° 18–19h	41° 7–8h
m m																	
1—5.5	—	2	—	4	—	—	1	1	—	2	2	1	1	2	—	2	—
5.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6.0	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2	1
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	—	1	1	3	1	—	1	2	—	—	—	2	—	1	2	1	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
7	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	1	—	1
8	—	3	1	1	—	—	—	—	1	—	2	—	—	1	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—
7.0	—	—	—	2	1	—	—	1	2	1	2	—	2	1	1	1	2
1	—	—	—	1	—	—	—	—	1	1	1	—	—	1	—	—	—
2	—	2	2	—	—	1	—	2	1	—	1	1	—	1	—	—	—
3	2	—	—	1	—	—	3	1	—	—	1	—	—	—	—	1	1
4	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	2	—	1	1
5	2	2	5	1	—	2	2	2	2	2	2	4	3	3	2	—	3
6	1	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	2	—	—	—	1
7	2	2	—	—	1	1	—	2	1	4	1	2	—	—	2	3	—
8	2	4	4	3	2	1	2	1	—	4	—	—	1	1	1	1	2
9	2	1	1	—	—	—	—	—	2	1	—	2	—	2	—	—	1
8.0	9	3	3	6	6	1	6	1	4	6	7	3	1	6	2	9	6
1	1	—	—	2	—	4	1	1	2	1	2	1	4	—	3	1	2
2	1	3	4	1	6	3	1	4	1	4	2	3	—	2	4	7	2
3	5	2	6	3	3	1	5	2	3	3	3	2	3	3	4	2	—
4	—	2	—	1	—	—	—	1	—	—	1	2	3	4	1	1	3
5	11	6	15	8	13	9	7	5	8	11	4	7	6	6	10	10	4
6	—	—	—	2	—	5	2	5	3	4	3	5	2	5	4	3	1
7	7	7	8	3	7	11	8	8	3	5	5	10	11	5	7	6	2
8	17	10	23	10	14	3	12	11	3	11	5	6	6	10	6	9	7
9	—	2	2	3	2	7	2	4	3	10	7	6	8	14	5	12	8
9.0	42	16	39	19	30	20	33	15	12	19	21	17	10	19	17	26	12
1	2	9	5	11	9	16	3	9	16	16	4	20	21	18	25	22	11
2	7	7	13	15	27	22	23	14	17	22	15	34	14	21	13	28	19
3	36	33	38	36	38	28	18	19	21	37	35	36	28	29	29	28	21
4	19	18	17	24	19	28	10	45	33	38	27	30	21	26	35	30	26
5	71	77	81	83	85	83	113	75	107	147	120	117	71	106	68	89	49
	240	213	268	244	264	247	254	231	248	355	274	311	218	290	242	296	187

41° 17^h-18^h	42° 7^h-8^h	42° 17^h-18^h	50° 6^h-7^h	50° 18^h-19^h	51° 6^h-7^h	51° 18^h-19^h	62° 7^h-8^h	62° 19^h-20^h	63° 7^h-8^h	63° 19^h-20^h	64° 7^h-8^h	64° 19^h-20^h	70° 5^h-7^h	70° 19^h-21^h	71° 5^h-7^h	71° 19^h-21^h	Σ	G $f=0.5$
1	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	22	24
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	4
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	—	2	—	1	—	10	13
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	6
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	1	—	—	5	6
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
1	1	—	—	1	—	—	—	1	—	1	—	1	1	—	—	—	22	27
—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	2	3
1	1	—	—	—	—	1	—	2	—	—	—	—	1	—	1	1	13	10
1	—	—	—	1	—	2	—	—	—	—	—	—	—	1	2	1	17	19
—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	5
2	1	1	—	1	1	1	2	—	1	1	—	—	2	—	1	—	30	46
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	6	7
—	—	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	—	—	1	15	21
1	2	3	1	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	19	29
—	1	—	—	1	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	10	11
3	4	3	2	1	3	1	1	4	—	4	1	1	—	2	1	5	73	61
1	1	1	—	2	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13	13
1	2	3	—	1	1	4	—	2	1	—	1	—	1	2	2	1	43	33
1	3	—	—	2	1	—	1	—	1	1	2	2	2	4	—	1	50	53
—	1	1	2	1	1	2	—	—	1	1	—	—	1	—	—	—	23	21
1	4	7	1	2	6	3	1	5	1	3	2	1	3	2	3	—	124	121
2	—	1	—	—	1	—	1	—	—	1	—	1	—	1	—	2	35	88
—	1	—	3	2	4	4	3	4	—	—	—	1	1	2	1	2	76	78
3	1	4	—	3	2	1	—	3	1	3	—	—	1	2	—	8	82	99
5	3	1	—	2	—	5	—	2	2	—	—	1	1	—	3	2	46	67
9	6	5	10	7	4	11	3	5	4	8	1	7	1	1	—	4	226	210
3	2	2	2	3	2	3	—	5	1	1	—	—	1	2	2	—	73	90
3	1	3	2	7	3	3	1	3	3	1	2	2	2	2	3	3	157	146
11	5	8	4	9	5	7	5	5	2	10	4	5	4	2	4	6	259	236
4	6	5	5	7	4	6	1	1	2	4	1	7	2	3	2	3	158	163
13	9	15	13	12	9	13	5	4	4	17	2	9	8	12	8	10	530	500
13	12	8	8	13	5	13	5	8	3	5	2	5	5	8	4	3	337	335
14	7	14	5	18	8	12	5	6	5	7	3	1	6	8	6	8	444	445
18	16	23	6	18	18	9	8	10	8	8	4	13	10	6	9	12	706	672
23	25	19	23	24	17	18	4	12	14	15	6	7	11	7	16	15	702	751
45	38	76	35	64	30	63	20	25	11	17	17	27	33	51	21	32	2147	2390
180	153	204	122	205	128	187	66	109	66	110	49	93	100	119	90	120	6483	

Zone V.	1° h 18–19	2° h 18–19	10° h 6–7	10° h 19–20	11° h 6–7	11° h 19–20	21° h 6–7	21° h 19–20	22° h 6–7	22° h 19–20	30° h 5–6	30° h 19–20	31° h 5–6	31° h 19–20	41° h 5–6	41° h 20–21	42° h 5–6
m m 1–5.5	1	—	1	3	2	3	—	1	2	—	—	—	—	—	—	1	—
5.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
8	—	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
6.0	1	—	—	—	—	—	1	1	—	—	1	—	—	2	1	—	1
1	—	—	1	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—	1	1	1	—	—	2	—
3	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
4		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	1
5	—	—	1	—	—	1	—	1	1	1	—	2	1	1	—	2	—
6	—	—	1	—	—	1	—	1	—	—	—	—	2	—	—	—	—
7	—	—	—	1	—		—	1	1	2	—	—	1	1	2	2	—
8	—	3	—	1	2	2	—	2	—	—	—	2	2	—	1	2	3
9		—	1	1	1	2	—	—	—	—	—	4	—	1	—	4	1
7.0	2	1	2	4	2	2	—	1	2	3	2	4	2	3	4	3	1
1	—	2	1	2	2	—	—	—	1	1	—	—	1	2	—	—	1
2	1	—	1	1	—	1	1	1	3	1	—	1	1	1	—	1	—
3	—	2	—	1	—	—	2	3	1	2	1	2	—	2	2	5	—
4	—	—	—	—	—	1	1	1	—	—	1	2	1	—	—	1	3
5	—	1	2	3	3	4	1	3	2	4	3	2	2	4	3	—	2
6	1	—	—	—	1	—	1	1	—	1	—	1	1	3	1	—	—
7	5	—	1	1	1	2	2	3	3	5	—	3	3	—	1	4	—
8	3	3	1	—	1	4	3	2	1	3	3	6	4	4	—	5	1
9	1	2	—	1	2		2	3	1	—	2	2	3	1	1	1	4
8.0	2	3	3	10	11	8	8	5	4	5	5	3	7	5	3	4	7
1	4	1	8	2	4	4	4	4	1	8	2	5	2	8	8	3	—
2	4	6	4	2	8	4	8	7	—	5	6	5	5	9	4	3	4
3	4	2	5	6	7	4	8	8	1	7	8	3	4	5	3	3	3
4	5	4	1	8	6	8	8	7	4	2	1	8	1	10	5	5	6
5	7	4	5	12	16	7	7	10	12	8	10	8	3	9	7	8	10
6	8	8	2	4	9	8	4	5	4	5	6	4	4	6	4	8	4
7	7	7	9	10	12	8	12	8	21	8	9	9	[illegible]	7	5	10	8
8	6	12	[illegible]	18	11	18	16	8	[illegible]	7	7	12	7	[illegible]	13	11	4
9	[illegible]	7	12	9	18	12	7	18	6	16	6	11	9	[illegible]	4	13	7
9.0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	21	23	27
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	17	16
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	40	19
3	8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	54	27	27
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	33	43
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

42° 20^h-21^h	50° 3^h-5^h	50° 21^h-22^h	51° 3^h-5^h	51° 21^h-22^h	62° 0^h-2^h	62° 22^h-3^h	63° 0^h-2^h	63° 22^h-23^h	64° 0^h-2^h	64° 22^h-23^h	70° 0^h-2^h	70° 23^h-0^h	71° 0^h-2^h	71° 23^h-0^h	Σ	G $f=0.6$
—	—	1	1	—	2	1	1	—	—	—	1	—	1	—	22	29
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3
—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	6	5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2	1
1	2	—	—	—	—	3	2	—	1	—	1	2	—	—	20	16
—	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	—	6	3
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	8	8
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	8
1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	3
4	—	—	2	1	2	3	—	1	2	1	1	—	1	—	29	32
—	—	1	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	1	—	10	4
1	1	—	—	1	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	16	12
—	—	—	—	1	—	1	—	1	1	1	—	—	1	1	27	23
1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	18	6
—	3	1	3	—	2	3	2	—	3	1	1	—	—	—	57	55
—	1	2	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18	9
2	—	1	—	2	2	—	—	1	—	—	2	—	—	—	24	25
3	1	3	2	2	—	—	1	—	1	2	4	—	—	—	42	35
3	2	2	—	1	2	—	—	—	1	—	—	—	1	—	23	13
4	5	—	3	2	3	5	—	2	2	2	1	1	—	—	69	74
1	2	2	1	1	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	20	16
1	3	2	—	1	2	2	3	—	—	1	—	—	—	—	49	40
4	2	1	6	1	1	2	4	4	2	1	2	1	1	1	77	64
—	1	—	—	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	29	25
2	8	3	8	1	9	3	7	1	3	1	3	2	2	4	145	145
5	3	1	3	—	1	1	1	1	1	—	—	—	—	—	75	46
6	3	4	3	4	8	5	6	3	3	1	1	—	1	1	121	94
13	1	3	8	6	4	1	9	3	2	2	2	2	1	—	128	119
1	3	1	2	4	3	2	3	3	3	—	2	—	—	—	101	80
10	8	8	8	3	12	5	14	1	8	5	5	2	5	2	239	252
6	6	5	7	2	5	3	6	4	2	2	1	—	1	—	133	108
14	8	14	2	6	7	—	8	3	4	—	1	3	3	1	219	175
15	14	11	9	10	11	5	7	5	10	6	6	2	6	4	316	283
12	9	6	12	2	7	3	4	4	9	7	5	—	2	—	249	196
21	40	14	21	19	22	6	19	9	15	5	12	2	7	6	590	600
14	14	18	19	17	13	8	13	11	16	4	7	2	12	—	492	402
25	44	15	29	21	16	13	13	5	27	18	9	5	8	4	708	534
33	30	29	32	22	18	9	30	4	19	14	12	6	9	13	908	806
54	58	39	44	34	68	17	39	11	40	21	17	6	11	9	1305	901
120	146	104	124	86	137	40	105	47	123	36	66	10	46	22	3496	2868
378	421	291	350	254	357	141	300	125	302	133	165	46	120	69	9708	

Zone VI. m m	1⁰ h h 5-6	1⁰ h h 20-21	2⁰ h h 5-6	2⁰ h h 20-21	10⁰ h h 4-5	10⁰ h h 20-21	11⁰ h h 4-5	11⁰ h h 20-21	21⁰ h h 4-5	21⁰ h h 21-22	22⁰ h h 4-5	22⁰ h h 21-22
1—5.5	1	—	2	—	—	3	—	—	2	1	2	1
5.6	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
7	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—
8	1	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6.0	—	—	—	—	—	1	1	—	2	1	1	—
1	—	—	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—
3	—	—	—	—	—	—	1	1	1	—	—	—
4	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
5	2	—	—	1	—	1	—	—	1	1	—	1
6	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	1	—	1	1	—	1
8	2	—	—	1	—	1	1	—	—	3	—	—
9	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7.0	—	2	—	1	1	2	2	1	—	4	3	2
1	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—
2	4	—	1	1	—	1	—	2	—	1	—	1
3	—	—	1	1	—	—	—	—	—	·2	1	—
4	1	—	1	1	—	—	—	—	—	1	1	—
5	—	4	—	3	2	1	5	3	2	4	2	1
6	—	—	3	—	—	1	—	1	—	—	—	—
7	1	3	—	1	—	—	—	1	—	2	—	2
8	2	2	3	1	2	2	1	4	1	1	1	2
9	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
8.0	1	3	3	3	2	6	1	3	3	6	3	4
1	1	1	1	—	3	—	—	2	—	—	—	2
2	6	2	2	5	4	2	1	4	5	3	—	4
3	3	8	3	3	3	5	4	3	1	2	2	3
4	—	1	3	—	1	2	—	3	1	—	1	2
5	2	6	3	10	3	10	5	6	1	3	3	7
6	1	2	4	2	2	4	—	3	5	—	1	3
7	9	2	4	1	2	7	2	6	4	4	5	4
8	5	8	6	10	2	5	2	6	5	14	6	11
9	4	3	4	3	3	9	4	9	4	4	5	3
9.0	24	24	19	22	14	18	7	24	17	15	13	17
1	10	6	12	7	10	16	2	15	8	12	8	18
2	22	17	19	18	16	18	5	24	7	10	14	17
3	17	28	14	20	13	24	15	35	18	16	16	28
4	33	12	21	15	14	44	7	59	4	27	16	32
5	161	86	139	81	80	103	78	131	80	83	95	81
	315	220	270	212	180	288	116	348	174	221	200	248

30^0 h h 2-4	30^0 h h 21_{20}-23	31^0 h h 3-4	31^0 h h 21_{20}-23_{20}	41^0 h h 2-3	41^0 h h 23-0	42^0 h h 2-3	42^0 h h 23-0	50^0 h h 0-2	51^0 h h 0-2	Σ	G $f = 0.4$
—	—	2	—	—	—	—	1	1	—	16	19
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2
1	—	—	2	—	—	—	—	—	—	6	8
—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	1
—	1	—	2	--	2	—	1	—	2	14	11
1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	4	2
—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	3	5
—	1	—	1	—	—	—	—	—	2	7	5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2
4	1	4	—	—	1	2	—	2	—	21	21
—	2	—	—	—	—	—	1	1	—	5	3
—	1	—	2	—	1	1	—	2	1	12	8
—	—	1	1	—	2	2	—	2	1	17	15
1	—	—	—	1	—	—	—	1	—	4	4
1	5	4	2	1	3	1	2	3	5	45	37
1	2	—	1	—	—	—	—	3	2	11	6
2	1	1	—	2	1	1	—	—	2	21	17
3	—	1	4	2	—	1	1	2	1	20	23
1	—	—	1	—	1	—	1	—	—	9	9
5	3	1	4	3	—	3	8	1	3	58	49
1	—	1	1	—	1	—	—	3	3	15	10
—	2	—	3	1	3	1	1	1	4	26	26
4	5	1	6	2	6	1	3	—	7	57	48
4	1	—	3	1	—	2	2	1	3	20	17
2	7	2	3	6	6	7	2	4	5	82	97
—	3	2	1	—	1	3	2	2	—	24	31
5	10	3	4	3	6	3	4	5	2	83	63
7	6	5	8	4	4	6	5	4	3	92	79
4	7	4	6	3	1	1	4	8	4	56	53
6	11	5	13	10	6	9	6	9	17	151	168
1	7	2	6	2	—	8	5	7	13	78	72
4	15	2	5	5	7	4	6	5	12	115	117
12	17	13	24	5	14	14	5	18	11	213	188
11	10	6	7	5	6	5	12	12	13	142	131
18	28	9	39	11	10	16	19	26	27	417	400
10	18	9	28	15	19	16	18	27	26	310	268
21	37	9	33	15	11	14	14	20	29	390	356
27	48	17	46	22	23	24	24	39	41	555	537
48	46	23	43	23	26	27	29	75	64	688	600
78	148	39	162	69	97	89	80	174	203	2337	1912
283	443	166	462	211	259	261	257	459	506	6129	

Zone VII.	1°	2°	7°	7°	10°	10°	11°	11°
	h h 3–4	h h 3–4	h h 3–4	h h 22–23	h h 2–4	h h 22–0	h h 2–4	h h 22–0
m m 1–5.5	—	1	—	—	2	1	2	4
5.6	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	2	—	—	—	—	—	—
9	—	—	1	—	—	—	—	—
6.0	—	—	—	—	—	2	—	—
1	—	—	—	—	—	1	—	—
2	—	—	—	—	—	1	—	—
3	—	—	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	—
5	—	1	—	—	—	—	1	—
6	—	—	1	—	—	—	—	—
7	1	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	—	1
9	—	—	—	—	1	—	—	1
7.0	1	1	—	2	3	3	—	2
1	—	—	—	—	1	—	—	—
2	—	—	—	—	—	1	1	—
3	—	—	—	—	1	2	3	1
4	1	—	—	—	—	—	—	1
5	2	1	1	1	1	1	2	1
6	—	—	—	1	1	1	2	1
7	—	2	2	—	1	3	1	2
8	—	1	3	2	2	4	—	3
9	—	—	—	3	2	2	—	—
8.0	6	5	1	3	6	3	4	2
1	—	2	1	1	—	1	1	2
2	3	2	1	3	5	1	1	3
3	2	7	4	2	6	6	5	2
4	—	2	—	1	4	3	1	5
5	8	11	5	4	7	11	7	4
6	—	—	—	2	1	6	7	6
7	4	2	3	6	2	9	5	11
8	13	3	3	3	8	8	14	9
9	1	2	—	6	7	10	8	10
9.0	28	14	19	15	16	18	26	12
1	1	4	1	8	11	18	16	16
2	6	8	9	11	8	31	13	38
3	21	25	7	20	14	37	23	56
4	8	7	5	24	17	35	28	43
5	49	64	56	62	120	112	122	131
	155	167	123	180	247	331	293	367

21° 0h–2h	21° 23h–0h	22° 0h–2h	22° 23h–0h	25° 0h–2h	25° 23h–0h	30° 0h–2h	31° 0h–2h	Σ	G $f = 0.3$
—	—	3	2	—	—	2	1	18	14
—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	—	—	—	2	2
—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
3	2	2	—	2	—	1	—	12	8
—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
—	—	—	—	—	1	—	1	3	4
—	—	—	1	—	2	—	—	3	4
—	—	—	—	—	—	1	—	1	1
—	—	4	—	3	—	1	1	11	16
—	—	—	1	—	1	—	—	3	2
—	—	—	—	—	—	—	1	2	6
—	—	—	2	—	—	3	1	7	12
—	—	—	—	—	—	1	2	5	3
3	—	5	—	3	—	1	—	29	28
—	—	—	—	—	—	—	1	2	4
—	—	—	1	1	2	1	2	9	13
1	1	—	—	3	1	—	2	15	17
1	—	1	—	3	2	—	—	9	7
6	1	5	2	4	3	3	—	34	37
—	1	—	—	1	—	1	1	10	8
—	1	1	2	2	—	—	1	18	20
—	3	1	4	1	1	7	2	34	32
—	—	1	1	1	—	1	2	13	13
5	3	10	3	9	6	10	8	84	72
2	1	2	1	4	1	3	3	25	23
3	1	2	3	4	—	2	6	40	47
7	2	4	1	5	3	7	6	69	59
4	—	5	3	5	2	4	2	41	40
10	5	9	7	10	6	11	8	123	126
1	3	7	4	6	2	11	1	57	54
6	—	6	3	9	2	2	7	77	88
14	7	10	14	13	7	7	7	140	141
6	2	6	5	7	3	12	7	92	98
25	8	18	9	23	13	23	25	292	300
17	5	16	9	13	5	18	27	185	201
6	11	11	9	20	12	15	21	229	267
21	16	41	19	17	19	32	34	402	403
35	14	29	18	36	33	37	55	424	450
107	58	109	55	143	67	120	134	1509	1434
283	145	308	179	353	194	337	369	4081	

Zone VIII.	0⁰ h h 0-3	0⁰ h h 23-0	1⁰ h h 0-3	1⁰ h h 23-0	2⁰ h h 0-3	2⁰ h h 23-0	3⁰ h h 0-3	3⁰ h h 23-0	4⁰ h h 0-3	4⁰ h h 23-0	5⁰ h h 0-2	5⁰ h h 23$_{30}$-0	6⁰ h h 0-2
m m 1—5.5	—	1	1	—	4	1	1	—	2	2	1	1	2
5.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6.0	1	—	1	1	—	—	—	—	3	—	—	—	—
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	2	—	1	1	—	—	—	—	—	—	2
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	1	1	1	—	2	1	—	—	—	—	—	—	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—
8	2	—	2	1	3	—	1	—	—	—	1	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
7.0	2	—	2	—	1	—	1	—	2	2	1	—	2
1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—
2	2	2	—	1	1	—	1	1	1	—	1	—	1
3	1	—	2	—	2	—	3	—	1	—	—	—	3
4	—	—	—	—	1	—	1	—	1	—	—	—	—
5	3	—	5	1	4	—	3	1	—	1	2	—	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	2	3	2	2	2	—	1	1	—	—	—	4
8	4	—	11	1	7	2	3	1	2	1	2	1	5
9	3	—	—	—	—	—	—	1	—	1	-	1	—
8.0	12	—	5	6	12	4	11	1	9	1	5	1	2
1	1	—	—	—	—	—	—	2	1	—	2	—	2
2	4	1	9	5	3	8	8	2	10	1	2	1	5
3	13	2	9	1	11	2	8	1	3	3	5	2	4
4	1	—	1	—	2	—	—	—	3	1	—	—	1
5	24	1	26	7	18	15	21	2	22	8	11	8	8
6	2	2	3	—	2	1	—	3	3	—	4	2	4
7	12	1	4	6	15	5	14	4	17	7	12	4	11
8	28	4	41	7	25	14	27	9	18	10	15	8	13
9	6	4	1	—	7	2	3	2	2	1	1	2	6
9.0	56	8	68	15	58	19	65	12	62	20	31	10	40
1	9	10	6	—	7	—	11	2	10	1	9	4	9
2	28	8	26	5	25	7	20	10	21	6	17	4	18
3	60	10	75	13	44	25	53	29	56	19	24	7	32
4	24	9	26	6	32	3	18	5	25	3	10	5	29
5	221	53	217	73	191	36	158	20	220	42	128	32	123
	520	120	548	151	480	143	432	109	496	131	284	93	327

6° h h 23_{20}-0	7° h h 0-2	7° h h 23_{20}-0	8° h h 0-2	8° h h 23_{20}-0	9° h h 0-2	9° h h 23_{20}-0	10° h h 0-1_{40}	11° h h 0-1_{40}	12° h h 0-1_{40}	13° h h 0-1_{40}	14° h h 0-1_{40}	Σ	G $f = 0.5$
1	1	—	1	—	—	1	—	1	—	—	4	25	24
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2
—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	2	4
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	1	1	—	—	—	1	2	—	—	11	13
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2
—	2	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	10	6
—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	6
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2
2	—	1	—	1	2	1	1	1	1	1	—	17	27
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	3
—	—	—	2	1	—	—	—	—	—	—	—	4	10
1	1	1	—	—	3	—	2	2	—	—	1	21	19
—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	5
—	3	1	3	—	3	—	1	2	—	2	—	28	46
—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	3	7
—	1	1	2	—	—	—	1	1	1	—	1	19	21
—	3	—	—	—	1	—	3	—	1	1	—	21	29
1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	—	6	11
—	4	1	3	1	2	1	3	1	1	3	—	40	61
—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	13
—	—	—	3	—	2	—	1	—	—	—	1	24	33
2	1	—	1	1	1	—	—	1	1	2	1	51	53
—	—	1	4	2	—	—	—	—	1	—	—	14	21
3	5	—	5	—	2	2	2	9	3	1	1	102	121
—	3	2	1	—	1	1	—	1	—	2	—	19	38
—	6	4	6	1	5	—	2	5	2	2	5	93	78
1	2	4	3	3	5	2	8	7	4	1	3	107	99
4	3	—	2	—	2	—	3	—	3	2	1	29	67
—	8	7	8	4	7	1	5	8	6	8	7	240	210
2	6	2	7	—	4	1	3	3	—	2	4	60	90
2	7	2	10	5	4	3	3	3	4	9	7	171	146
1	12	5	17	3	7	3	14	16	10	7	6	320	236
2	4	2	13	2	4	2	5	6	6	6	2	91	163
4	29	7	23	6	18	13	24	13	21	18	24	664	500
3	21	4	16	3	14	5	13	15	9	14	10	205	335
9	13	2	21	6	12	7	8	10	17	14	23	337	445
17	30	4	36	32	27	10	27	33	13	27	24	727	672
7	33	7	37	16	25	7	18	16	19	14	15	409	752
24	131	38	101	21	119	46	92	78	105	134	135	2538	2390
86	330	97	327	109	271	106	242	233	232	272	277	6416	



Die überzähligen Hautknochen des menschlichen Schädeldaches.

(Nachtrag. S. Abhandlungen der k. bayer. Akad. d. Wiss. II. Cl. XX. Bd. II. Abth. 1899.)

Von **J. Ranke.**

(*Eingelaufen 22. Dezember.*)

Ein neuer Fall von Sutura parietalis an dem Schädel eines erwachsenen Europäers.

In der Abhandlung über „Die überzähligen Hautknochen“ habe ich Seite 27 (301) um erneute Durchsicht der anatomischen Sammlungen ersucht speziell zur Auffindung weiterer Schädel mit Verdoppelung der Scheitelbeine namentlich bei Erwachsenen.

Heute kann ich schon einen Erfolg dieses Aufrufs mitteilen.

Herr Geheimrath W. His hat mir, wofür ich hier den besten Dank aussprechen möchte, aus der anatomischen Sammlung der Leipziger Universität einen Schädel zur Untersuchung zugesendet, welcher auf der rechten Seite eine vollkommene Verdoppelung des Scheitelbeines, durch eine sagittal von vorn nach hinten verlaufende, stark gezackte Naht, aufweist (Fig. 1). Auf der linken Seite zeigt das Scheitelbein eine unvollständige Parietalnaht, von der Mitte der Lambdanaht aus nach vorwärts in das Scheitelbein in sagittaler Richtung einspringend (Fig. 2).

Die Parietalnaht geht auf der rechten Seite von der Höhe des unteren Drittels der Kranznaht aus und verläuft in einer Länge von 115 mm nach hinten bis zum oberen Drittel des rechten Schenkels der Lambdanaht. Auf der linken Seite zeigt sich ein 25 mm langer Nahtrest der Parietalnaht, welcher über der Mitte des linken Schenkels der Lambdanaht abgeht.

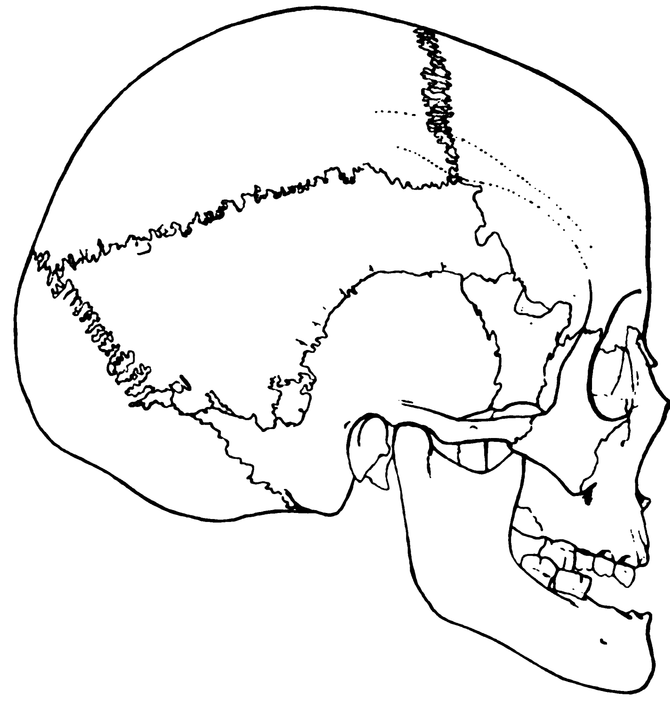


Fig. 1.

Die Richtung des Nahtrestes entspricht im Allgemeinen der Richtung des hinteren Abschnittes der Parietalnaht der rechten Seite (Fig. 4). Doch neigt sich das vordere verwachsene, aber noch deutlich sichtbare Ende nach abwärts, so dass die Fortsetzung der Naht die Kranznaht nicht erreichen, sondern einen hinteren, unteren Abschnitt des Scheitelbeines abtrennen würde. Auf diese Weise würde eine jener schiefen Scheitelbeinnähte

entstehen, von welchen ich l. c. in Fig. 13, 14 und 15 nach meinen und Grubers Beobachtungen Beispiele mitgeteilt und ihre Entstehung aus der sagittal verlaufenden eigentlichen Parietalnaht geschildert habe (S. 28 (302) bis 35 (309)).

Die vollständige Parietalnaht auf der rechten Schädelseite erscheint namentlich in ihrem hinteren Abschnitte als eine

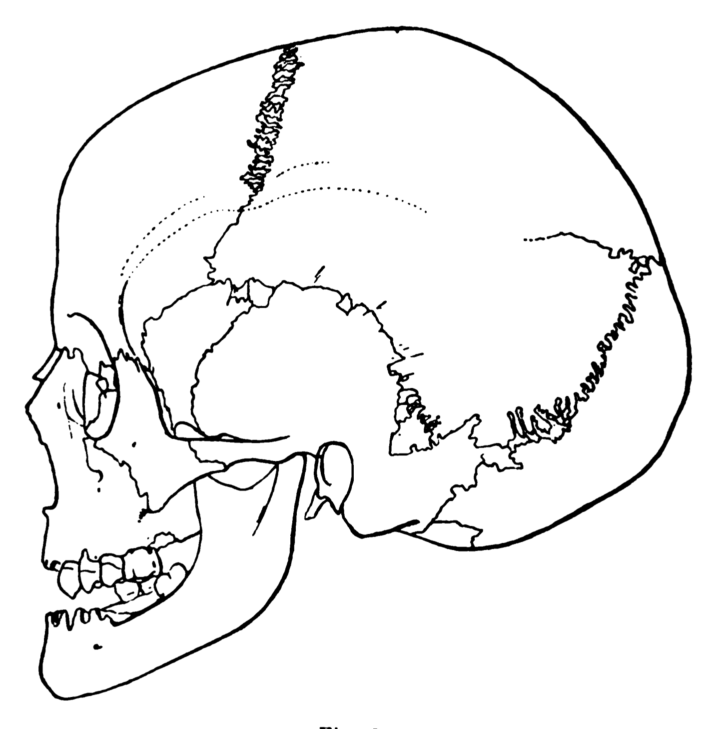


Fig. 2.

stark gezackte Zackennaht, auch in dem vorderen Abschnitte zeigen sich Zacken, welche aber nicht eigentlich durch das Ineinandergreifen der durch die Parietalnaht getrennten Scheitelbeinabschnitte gebildet werden, sondern der gezackte Rand des unteren Scheitelbeines legt sich schuppenartig über den unteren Rand des oberen Scheitelbeines. Wieder ist die Ausbildung des vorderen (Coronar)-Randes des unteren Scheitel-

beines von dem Coronarrand des oberen Scheitelbeines in der beschriebenen typischen Weise verschieden. Während letzterer eine wahre Zackennaht darstellt, ist der Coronarrand des unteren Scheitelbeines einfach linear begrenzt und lagert sich nach dem Typus einer wahren Schuppennaht über den entsprechenden Coronarrand des Stirnbeins (Fig. 3).

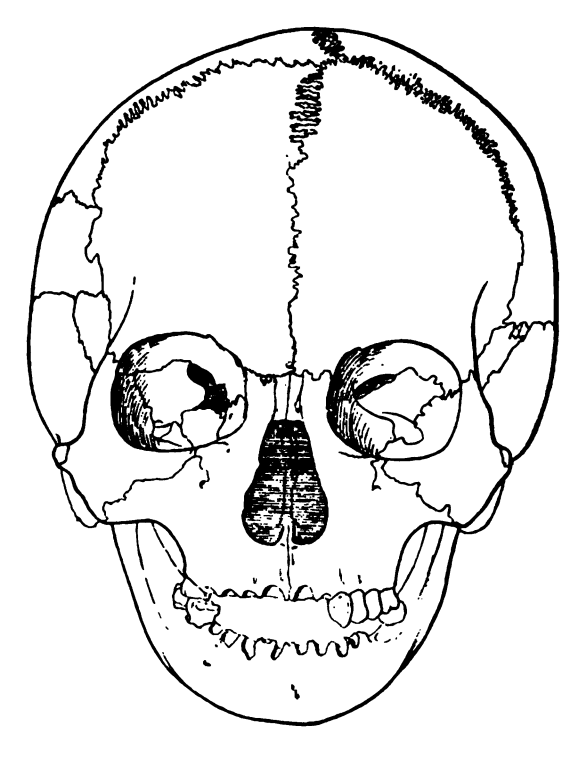


Fig. 3.

Durch den angegebenen Verlauf der Parietalnaht wird das Scheitelbein in zwei verschieden grosse und verschieden gestaltete Abschnitte geteilt. Das obere Scheitelbein stellt ein unregelmässiges Viereck dar, bei welchem die Sagittalnaht und Coronarnaht einen nahezu rechten Winkel miteinander bilden, der durch die Parietalnaht gebildete Unterrand wendet sich

nicht parallel mit der Sagittalnaht nach hinten, sondern nähert sich derselben mehr und mehr an. Während der Vorderrand (Coronarrand) 74 mm beträgt, beträgt der Lambdarand des oberen Scheitelbeines nur 33 mm.

Das untere Scheitelbein bildet abgesehen von dem einspringenden Bogen der Schläfenschuppe ebenfalls ein unregel-

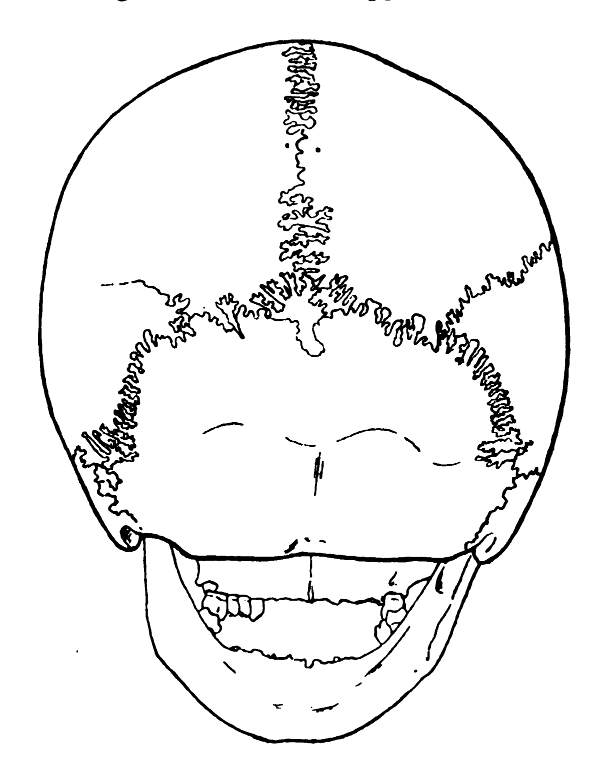


Fig. 4.

mässiges Viereck: aber umgekehrt wie bei dem oberen Scheitelbein ist hier der Coronarrand viel kürzer als der Lambdarand. Der Coronarrand misst 25, der Lambdarand 56 mm, wozu noch die zwischen Processus mastoideus und Schläfenschuppe einspringende hintere, untere Ecke hinzukommt. Rechnet man diese Ecke noch zum Lambdarand des unteren Scheitelbeins,

so ergibt sich eine Länge von 76 mm. Das untere Scheitelbein ist also umgekehrt wie das obere, hinten breit und vorne schmal. Sein Unterrand erscheint durch die einspringende Schuppe ausgeschnitten.

Der senkrechte Bogen des rechten Scheitelbeins von der höchsten Auswölbung der Schuppennaht aus mit dem Bandmass gemessen beträgt 113 mm, davon entfallen 27 mm auf den unteren, 86 mm auf den oberen Abschnitt des geteilten Scheitelbeines; über der Pars mastoidea beträgt die verticale Höhe des unteren Abschnittes 62 mm, die des oberen 58 mm.

Das untere Scheitelbein ist sonach nicht unwesentlich kleiner als das obere.

Bezüglich der Gesammtbildung des durch die Parietalnaht getrennten rechten Scheitelbeines ist zu bemerken, dass ein eigentlicher Scheitelbeinhöcker fehlt, während das linke, nur in seinem hinteren Abschnitte teilweise getrennte, Scheitelbein einen wohlausgebildeten und prominirenden Scheitelbeinhöcker zeigt. Es spricht das für eine relativ frühzeitige (theilweise) Verschmelzung der beiden Scheitelbeinanlagen der linken Seite, womit ja wohl auch die Ablenkung des hinteren Nahtrestes nach unten zusammenhängen mag.

Der Schädel ist brachycephal und zeigt eine geringe, linksseitig etwas stärkere Vorbuchtung des Hinterhauptes. Der Schädel ist klein und zart, weiblich, die Weisheitszähne fehlen noch und die Sphenobasilarfuge ist noch nicht vollkommen verknöchert. Es ist der Schädel eines jugendlichen, noch nicht vollkommen erwachsenen weiblichen Individuums.

Ich habe bei genauer Prüfung eine vorzeitige Verwachsung von Schädelnähten nicht nachweisen können, auch nicht an der Schädelbasis. Im Gegenteil zeigt sich eine vollkommen offene Stirnnaht (Fig. 3) und ein beträchtlicher Rest der linken Naht resp. Fuge, zwischen der Unterschuppe und dem Gelenkteil des Hinterhauptbeines, Synchondrosis condylosquomosa, die Persistenz dieser letzteren Naht ist bekanntlich beim Menschen relativ recht selten.

Vom Foramen infraorbitale geht eine Naht beiderseits senkrecht hinauf zum untern Augenhöhlenrand.

Der Schädel zeigt keine stärker ausgesprochene Schiefheit, doch ist die Wölbung der ganzen linken Seite des Schädels, wie sich aus der schon erwähnten Ausbildung des Scheitelbeinhöckers auf dieser Seite ergibt, eine stärkere. Es ist das ein Unterschied gegen die bisher beobachteten Schädel mit Parietalnaht, bei welchen, wie bei dem von mir zuerst beschriebenen so auch, so viel ich sehe, bei den übrigen, die stärkere Wölbung des Schädels auf die Seite der persistirenden Naht trifft. Aber auch bei dem neuen Parietalnaht-Schädel des Herrn W. His ist das rechte geteilte Parietale grösser als das linke. Der Coronar-Rand beträgt links 11, rechts 12 cm, d. h. um 1 cm ist im Bregma die Sagittalnaht nach links verschoben, so dass das Ende der Stirnnaht nicht mit dem Anfang der Sagittalnaht zusammentrifft.

Sonst zeigt der Schädel keine gröberen Abnormitäten. In der Naht zwischen dem Oberrand des grossen Keilbeinflügels und dem Stirnbein, Sutura sphenofrontalis, rechts zeigt sich ein kleiner Schaltknochen; zwei kleine Schaltknochen finden sich zwischen dem Oberrand des grossen Keilbeinflügels und dem unteren Rande des linken Scheitelbeines in der Gegend der ehemaligen Schläfenfontanelle. Die Lambdanaht ist so gut wie frei von Worm'schen Knochen, nur in der hinteren kleinen Fontanelle befindet sich ein doppelter unregelmässig gestalteter Fontanellknochen.

Die Stirn ist gerade ansteigend mit gut ausgebildeten Stirnhöckern, die Scheitelkurve flach, beides im Ecker'schen Sinne weibliche Charaktere. Die Augenhöhleneingänge sind gerundet, relativ gross; die Nasenbeine, welche zum grösseren Teil abgebrochen sind, sind in der erhaltenen oberen Partie schmal, die Nase ist im ganzen schmal, die rechte Seite des Unterrandes der Apertura piriformis ist etwas stärker, ulmenblattförmig, nach unten gewölbt; die Fossae caninae sind tief, der Schädel gut profilirt; der Alveolarfortsatz des Oberkiefers kurz, die Zähne klein; der Unterkiefer niedrig und schwach,

aber mit gut ausgebildetem Kinnfortsatz, die Aeste des Unterkiefers niedrig und schmal, stark schief nach hinten gewendet mit einem entschieden weiblichen Winkel von 128°.

Die Anzahl der bis jetzt in der Literatur bekannten Menschenschädel mit vollkommener Verdoppelung des Scheitelbeines, d. h. mit Sutura parietalis completa, beträgt mit diesem Schädel aus der Leipziger Sammlung des Herrn W. His

13
davon 9 Europäer
„ 4 von anderen Rassen.

Schädelmasse:

Hirnschädel:	Länge	= 165	Index = 82.10
	Breite	= 136	
	Höhe	= 132	
	Ohr-Höhe	= 104	
	Kleinste Stirnbreite	= 90	
	Sagittalumfang	= 384	
	Davon: Stirnbogen	= 116	
	Scheitelbogen	= 132	
	Hinterhauptsbogen	= 100	
	Horizontalumfang	= 486	
	Querbogen	= 290	
	Davon: rechte Hälfte	= 153	
	„ linke „	= 137	
	Capacität	= 1230 ccm.	
Gesichtsschädel:	Jochbreite	= 114	Index = 81.58
	Gesichtshöhe	= 93	
	Mittelgesichtshöhe	= 59	
	Mittelgesichtshöhe bis Mundspalte	= 66	
	Nasenhöhe	= 45	Index = 48.88
	Nasenbreite	= 22	
	Augenhöhlenhöhe	= 32	Index = 86.49
	Augenhöhlenbreite	= 37	
	Profilwinkel	= 80°.	

Zur Theorie der automorphen Functionen.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 3. Februar.*)

Die Theorie der doppelt periodischen Functionen lässt sich bekanntlich sehr einfach dadurch begründen, dass man versucht, nach der Theorie der Partialbruch-Reihen eine Function zu bilden, die in jedem Periodenparallelogramme nur einen Pol erster Ordnung hat. Die entstehende Function ist dann mit einem Integrale zweiter Gattung im Wesentlichen identisch $\left(\frac{H'(z)}{H(z)}\right.$ in Jacobi's Bezeichnung$\left.\right)$; und von ihm steigt man durch Integration oder Differentiation unmittelbar zu den H- oder σ-Functionen bez. zur $\wp$-Function auf.

Bei den automorphen Functionen hat zwar Poincaré einen analogen Ansatz gemacht, erhält aber nicht die analoge Integralfunction zweiter Gattung, sondern seine „fonctions thetafuchsiennes", die sich bei linearer Transformation des Arguments um einen Factor ändern. Für die einfachsten Reihen, welche auch hier zu jenen Integralfunctionen führen würden, fehlt der Convergenzbeweis. Diese Schwierigkeit habe ich versucht, im Folgenden zu überwinden. Dadurch gelange ich dann direct zu den Integralen zweiter Gattung, an die man die Theorie der algebraischen Functionen (z. B. des Riemann-Roch'schen Satzes) sofort anknüpfen könnte; und durch Integration werden die Integrale dritter sowie diejenigen erster Gattung eingeführt.

Für einen besonderen Fall (wo die das Kreisbogen-Polygon begrenzenden Kreise sich nicht schneiden, und die zugehörige Curve p^{ten} Geschlechts $p+1$ reelle Züge besitzt) hat Schottky schon analoge Untersuchungen angestellt, nachdem er den nöthigen Convergenzbeweis auf anderem Wege erbrachte; bei ihm bilden indessen nicht die Integrale zweiter Gattung den Ausgangspunkt, sondern er bildet direct unendliche Producte der Art, wie sie unten am Schlusse von § 3 auftreten werden.

Im Folgenden schliesse ich mich in der Darstellung und Bezeichnungsweise durchaus an die grossen Arbeiten Poincaré's an.[1]) Die Entwicklungen sind zunächst dem Falle angepasst, wo ein Polygon mit „Hauptkreis" gegeben ist, lassen sich aber (wie ja auch die Poincaré'schen Untersuchungen) unmittelbar auf die übrigen Fälle übertragen.

§ 1. Die Convergenz einer gewissen Reihe.

Die Substitutionen der gegebenen Gruppe bezeichnen wir durch $f_i(z)$, so dass

$$f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \tag{1}$$

gesetzt wird und i einen von 0 bis ∞ laufenden Index bezeichnet, durch den die Substitutionen numerirt werden; dabei sei $f_0(z) = z$. Nach Herrn Poincaré kann man leicht Functionen bilden, die sich bei Substitutionen der Gruppe nur um einen Factor ändern, und zwar auf folgende Weise. Sei $H(z)$ eine rationale Function von z, so bilde man die Reihe

$$\Theta(z) = \sum_k H(f_k(z))\,[f'_k(z)]^m. \tag{2}$$

Dieselbe ist, wenn $m > 1$, für alle Werthe von z absolut convergent, allein ausgenommen die Pole der Function $H(z)$ und die Pole der Functionen $f'_k(z)$, welche mit denjenigen Punkten identisch sind, die bei den Transformationen (1) dem

---

[1]) Acta mathematica, Bd. 1 und 3.

unendlich fernen Punkte zugeordnet werden; denn (da die Determinante $a_i d_i - b_i c_i$ immer gleich der Einheit angenommen wird) ist

$$f_i'(z) = \frac{1}{(c_i z + d_i)^2}. \tag{3}$$

Die durch (2) definirte Function genügt der Bedingung

$$\Theta(f_i(z)) = \Theta(z) \cdot [f_i'(z)]^{-m} = \Theta(z) \cdot (c_i z + d_i)^{2m}. \tag{4}$$

Bildet man den Quotienten zweier solcher Poincaré'schen Θ-Functionen, bei denen m denselben Werth hat, so erhält man eine automorphe Function, d. h. eine solche, die bei den Transformationen der Gruppe völlig ungeändert bleibt.

Für uns kommt es darauf an, Reihen der Form (2) zu untersuchen, wenn die Zahl m den von Poincaré ausgeschlossenen Werth 1 besitzt. Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst die Reihe

$$\Sigma f_i''(z) = -2 \Sigma \frac{c_i}{(c_i z + d_i)^3} \tag{5}$$

und beweisen ihre absolute Convergenz.

Durch logarithmische Differenzirung der Gleichung (4) erhalten wir

$$\begin{aligned} -f_i''(z) &= \frac{1}{m}\left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(f_i)} f_i'^2 - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i'\right] \\ &= \frac{1}{m}\left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(z)} f_i'^{m+2} - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i'\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Untersuchung der Reihe (5) können wir daher auf die Untersuchung der beiden einzelnen Reihen

$$\begin{aligned} U &= \Sigma \frac{1}{m} \frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(z)} f_i'^{m+2}, \\ V &= \Sigma \frac{1}{m} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i' \end{aligned} \tag{7}$$

zurückführen und haben dann den Vortheil, dass wir sowohl für die Zahl m, als für die Function $\Theta(z)$ noch besonders günstige Wahl treffen dürfen.

Wir beginnen mit Untersuchung der Reihe V. Die Gleichung (6) ist eine Identität; in ihr kann daher auch die Zahl m und die Function Θ von dem Index i selbst abhängen. Wir definiren nun $\Theta(z)$ durch die Gleichung (2), indem wir $H(z)$ durch die Gleichung

$$H(z) = (z - f_1(\zeta))^2 (z - f_2(\zeta))^2 \ldots\ldots (z - f_j(\zeta))^2, \tag{8}$$

bestimmen, wo ζ einen willkürlichen Punkt bezeichnet, und wo die Zahl j so gewählt sein möge, dass für alle Zahlen k, die der Bedingung $k > j$ genügen, die Ungleichheit

$$\text{abs } f'_k(\zeta) < 1 \tag{9}$$

erfüllt sei. Dabei können wir uns der Einfachheit wegen die Substitutionen (1) so geordnet denken, dass dem grösseren absoluten Betrage von $f'_i(z)$ ein kleinerer Index entspricht, ausserdem aber immer $f_0 = z$ gesetzt wird. Die Ungleichheit (9) ist für endliche hinreichend grosse Werthe von k immer zu erfüllen, denn nach Poincaré ist die Reihe

$$\Sigma f'_i(\zeta)^2 \tag{10}$$

stets convergent, also sicher $\lim \text{abs } f'_i(\zeta) = 0$. Wir erhalten aus (2)

$$\Theta'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m\, H(f_k(z))\, [f'_k(z)]^{m-1} f''_k(z) \tag{11}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} H'(f_k(z))\, [f'_k(z)]^{m+1},$$

also für $z = \zeta$:

$$\Theta'(\zeta) = \sum_{k=j+1}^{\infty} m\, H(f_k(\zeta))\, [f'_k(\zeta)]^{m-1} f''_k(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H'(f_k(\zeta))\, [f'_k(\zeta)]^{m+1}.$$

$$\Theta(\zeta) = H(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H(f_k(\zeta))\, [f'_k(\zeta)]^{m}.$$

Bedeutet nun m eine Zahl, welche mit dem Index i ebenfalls unendlich gross wird, etwa $m = i$, und sei dem entsprechend

$$(12)\qquad \Theta_i(\zeta) = H(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H(f_k(\zeta))\,[f'_k(\zeta)]^i,$$

so wird $\Theta_i(\zeta)$ für keinen noch so grossen Werth von i unendlich gross und nach den Poincaré'schen Sätzen nur an einer endlichen Anzahl von Stellen in jedem Bereiche gleich Null. Die Anzahl der Nullstellen wächst allerdings mit der Zahl $m = i$ in's Unendliche, bleibt aber stets eine discrete, so dass wir durch passende Wahl von ζ stets das Verschwinden von $\Theta(\zeta)$ vermeiden können; für $i = \infty$ wird überdies $\Theta_i(\zeta) = H(\zeta)$. Der absolute Betrag der Function $\frac{1}{\Theta_i(\zeta)}$ bleibt daher stets unterhalb einer endlichen Grenze M:

$$(13)\qquad \text{abs}\,\frac{1}{\Theta_i(\zeta)} < M_i.$$

Ferner sind die Reihen (da $i > 2$)

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} H(f_k(\zeta)) \left[\frac{f'_k(\zeta)}{f'_{j+1}(\zeta)}\right]^{i-1} f''_k(\zeta) \quad \text{und} \quad \sum_{j+1}^{\infty} H'(f_k(\zeta)) \left[\frac{f'_k(\zeta)}{f'_{j+1}(\zeta)}\right]^{i+1}$$

convergent und bleiben stets endlich. Bezeichnen wir die oberen Grenzen ihrer absoluten Beträge mit P_i und Q_i, so wird

$$\text{abs}\, V = \text{abs} \sum_i \frac{1}{i} \frac{\Theta'_i(\zeta)}{\Theta_i(\zeta)} f'_i(\zeta)$$

$$< \sum_i M_i \left[P_i \,\text{abs}\,(f'_{j+1}(\zeta))^{i-1} + \frac{1}{i}\, Q_i \,\text{abs}\,(f'_{j+1}(\zeta))^{i+1}\right] \text{abs}\, f'_i(\zeta).$$

Da nun die Reihe $\sum_i \text{abs}\,(f'_{j+1}(\zeta)^{i+1}$ in Folge der Forderung (9) sicher convergirt, so folgt, dass auch die Reihe V für $z = \zeta$ convergent, und zwar absolut convergent ist; ausgenommen sind dabei die Punkte $\zeta = -\frac{c_i}{d_i}$, für welche die Functionen $f'_i(\zeta)$ unendlich gross werden.

Was jetzt die Reihe U betrifft, so gilt für die in den Nennern auftretende Function wieder die Ungleichung (13). Auch der Zähler $\Theta'_i(f_i(\zeta))$ bleibt nach (11) stets endlich; dies

gilt noch für unendlich grosse Werthe von i, denn $f_i(\zeta)$ bezeichnet stets einen im Innern des Hauptkreises gelegenen Punkt, bleibt also endlich für unendlich grosse Werthe von i; in der Ungleichung (9) kann daher die Zahl j so gross gewählt werden, dass diese Bedingung nicht nur für einen Punkt ζ, sondern auch für alle Punkte ζ erfüllt ist, die aus dem ersten durch die Substitutionen $f_i(\zeta)$ hervorgehen, so dass:

$$\text{abs}\ f_k'(f_i(\zeta)) < 1 \text{ für } k > j.$$

Setzen wir fest, dass die Zahl j in dieser erweiterten Weise bestimmt werde, so werden dadurch unsere Betrachtungen über die Reihe V nicht gestört. Das allgemeine Glied der Reihe U aber wird von der Form

$$R\,[f_{j+1}'(f_i(\zeta))]^{i-1} f_i'(\zeta)^{i+2} + \frac{1}{i}\,S\,[f_{j+1}'(f_i(\zeta))]^{i-1} f_i'(\zeta)^{i+2},$$

wo mit R und S endlich bleibende Ausdrücke bezeichnet sind. Die Reihe ist also sicher convergent, und zwar (wegen der Factoren $f_i'^{\,i+2}$) in stärkerem Grade wie die Reihe U. Nach (5) und (6) haben wir also das Resultat gewonnen, dass die Reihe

$$(14) \qquad \Sigma f_i^{n}(\zeta)$$

für alle Werthe von ζ, in denen $f_i(\zeta)$ nicht unendlich gross wird, absolut convergirt.

Die Zahl, welche gewählt werden muss, um den Rest der Reihe $U + V$ kleiner als eine gegebene Zahl zu machen, hängt von der Zahl j ab, die nöthig ist, um die Ungleichung (9) zu befriedigen; und diese Zahl wieder ist von dem betrachteten Punkte ζ abhängig. Vergleicht man die Zahlen j für mehrere Stellen ζ mit einander, so braucht man nur den grössten benötigten Werth von j zu wählen, um für alle diese Stellen das gewollte zu erreichen. Ist dann die Zahl j entsprechend definirt, so ist die Reihe offenbar gleichmässig in einem gegebenen endlichen Gebiete, in dem kein Pol der Functionen f_i' liegt, convergent, denn sie convergirt im Wesentlichen wie eine Potenzreihe

$$\sum_i [f'_{j+1}(\zeta)]^i,$$

und die absoluten Beträge der Functionen f'_{j+1} sind durch passende Wahl von j kleiner als Eins gemacht worden; die Potenzen $(f'_{j+1})^i$ lassen sich also durch passende Wahl von i kleiner als eine beliebig vorgegebene Zahl machen, und zwar für alle Werthe ζ eines solchen Gebietes durch denselben Werth von i.

Die Reihe $\sum f''_i$ kann hiernach gliedweise integrirt werden; und somit folgt, dass die Reihe

$$\sum_i [f'_i(z) - f'_i(z_0)]$$

ebenfalls absolut convergirt, denn die gliedweise Integration einer absolut convergenten Reihe führt stets wieder zu einer absolut convergenten Reihe. Es ist

$$f'_i(z) - f'_i(z_0) = (z_0 - z)\,\frac{c_i(z_0 + z) + 2\,d_i}{(c_i z_0 + d_i)^2\,(c_i z + d_i)^2}\,c_i,$$

oder wenn wir annehmen, dass der Punkt $z = 0$ im Innern unseres Fundamentalbereiches liege, für $z_0 = 0$:

$$f'_i(z) - f'_i(0) = -z\,\frac{z + 2\dfrac{d_i}{c_i}}{(c_i z + d_i)^2\left(\dfrac{d_i}{c_i}\right)^2}.$$

Der absolute Werth von $\dfrac{c_i}{d_i}$ nähert sich mit wachsendem i der Grenze Eins, kann daher auf die Convergenz der Reihe nicht von Einfluss sein. Folglich muss auch die Reihe

$$\text{(15)} \qquad \Theta_0(z) = \sum_i \frac{1}{(c_i z + d_i)^2} = \sum_i f'_i(z)$$

absolut convergiren für jede von den Punkten $-\dfrac{d_i}{c_i}$ verschiedene Stelle z.

Für diese Reihe $\Theta_0(z)$ gelten dieselben Ueberlegungen, wie sie Poincaré für seine Reihen $\Theta(z)$ anstellt. Es ist nemlich

$$\Theta_0(f_i(z)) = \sum_k f'_k(f_i(z)) = \sum_k \frac{d f_k(f_i(z))}{d z} \frac{1}{f'_i(z)},$$

also:

$$\Theta_0(f_i(z)) = \frac{1}{f'_i(z)} \Theta_0(z). \tag{16}$$

§ 2. Integrale zweiter Gattung.

Wir untersuchen jetzt die von zwei Punkten z und ζ abhängende Reihe

$$\Omega(z, \zeta) = \sum_k \frac{f'_k(\zeta)}{z - f_k(\zeta)}. \tag{17}$$

Da der reciproke Werth von $z - f_k(\zeta)$ stets endlich und von Null verschieden bleibt, falls nur z von ζ und den Punkten $f_i(\zeta)$ verschieden ist, so zieht die absolute Convergenz der Reihe (15) auch unmittelbar diejenige der Reihe (17) nach sich.

Die Eigenschaften dieser Reihe, insofern sie von ζ abhängt, sind nach Analogie der Poincaré'schen Reihe und der Gleichung (16), durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$\Omega(z, f_i(\zeta)) = \frac{1}{f'_i(\zeta)} \Omega(z, \zeta). \tag{18}$$

Der Punkt ζ liege im Innern des Hauptkreises; dann wird $\Omega(z, \zeta)$ nur an der Stelle $z = \zeta$ und den homologen Stellen $z = f_k(\zeta)$ unendlich gross (erster Ordnung). Als Function von ζ wird Ω auch unendlich (zweiter Ordnung) an den Nullstellen der Gleichungen $c_i \zeta + d_i = 0$.

Hauptsächlich kommt es uns darauf an, das Verhalten der Function Ω für den Fall festzustellen, dass z durch $f_i(z)$ ersetzt wird. Offenbar ist

$$\frac{1}{f_i(z) - f_k(\zeta)} = \frac{(c_i z + d_i)(c_k \zeta + d_k)}{(a_i c_k - c_i a_k) + \zeta(a_i d_k - c_i b_k)} \frac{1}{z - \zeta_1} = \frac{\Omega_{ik}}{z - \zeta_1},$$

wodurch Ω_{ik} definirt sei, und wo:

$$\zeta_1 = -\frac{b_i - d_i f_k(\zeta)}{a_i - c_i f_k(\zeta)} = f_i^{-1}(f_k(\zeta)),$$

ferner:

$$\frac{c_i z + d_i}{z - \zeta_1} = c_i + \frac{1}{z - \zeta_1} \frac{a_i d_i - b_i c_i}{a_i - c_i f_k(\zeta)},$$

$$\Omega_{ik} = \frac{c_i z + d_i}{a_i - c_i f_k(\zeta)},$$

also

$$\frac{\Omega_{ik}}{z - \zeta_1} = \frac{c_i}{a_i - c_i f_k(\zeta)} + \frac{1}{z - \zeta_1} \frac{a_i d_i - b_i c_i}{[a_i - c_i f_k(\zeta)]^2}$$

$$= \frac{c_i}{a_i - c_i f_k(\zeta)} + \frac{1}{z - f_i^{-1}(f_k(\zeta))} \frac{d f_i^{-1}(f_k(\xi))}{d f_k(\zeta)},$$

schliesslich

$$\Omega(f_i(z), \zeta) = \sum_k \frac{\Omega_{ik}}{z - \zeta_1} f'_k(\zeta)$$

$$= \sum_k \frac{1}{z - f_i^{-1}(f_k(\zeta))} \frac{d f_i^{-1}(f_k(\zeta))}{d \zeta} + \sum_k \frac{c_i f'_k(\zeta)}{a_i - c_i f_k(\zeta)},$$

oder, da die Gesammtheit der Werthe $f_i^{-1}(f_k(\zeta))$ identisch ist mit der Gesammtheit der Werthe $f_k(\zeta)$:

$$\Omega(f_i(z), \zeta) = \Omega(z, \zeta) + \Omega\left(\frac{a_i}{c_i}, \zeta\right). \tag{19}$$

Das Verhalten der Function Ω ist also vollkommen analog dem Verhalten eines Integrals einer algebraischen Function; die Grösse $\Omega\left(\frac{a_i}{c_i}, \zeta\right)$ ist ein Periodicitäts-Modul des Integrals. Die Function Ω bezeichnen wir als Integral zweiter Gattung, weil sie mit dem Abel'schen Integrale zweiter Gattung die erwähnte Eigenschaft gemein hat, und nach den Poincaré'schen Resultaten auch stets mit einem solchen Integrale identificirt werden kann.

Der Differentialquotient der Function $\Omega(z, \zeta)$ nach z ist nicht eine automorphe Function, sondern hat die Eigenschaft der Poincaré'schen Θ-Functionen sich um einen Factor zu ändern; in der That folgt aus (19):

$$\frac{d\,\Omega(z, \zeta)}{d z} \cdot \frac{d f_i(z)}{d z} = \left(\frac{d\,\Omega(z, \zeta)}{d z}\right)_{f_i(z)} = \frac{d\,\Omega(f_i(z), \zeta)}{d f_i(z)}. \tag{20}$$

Wir haben hier also eine neue Methode zur Bildung derartiger Functionen.

Die Periodicitätsmoduln von $\Omega(z, \zeta)$ sind Functionen von ζ, und zwar ist

$$\Omega\left(\frac{a_i}{c_i}, \zeta\right) = \sum_k \frac{c_i}{a_i - c_i f_k(\zeta)} f_k'(\zeta), \tag{21}$$

also nach (18):

$$\Omega\left(\frac{a_i}{c_i}, f_r(\zeta)\right) \cdot f_r'(\zeta) = \Omega\left(\frac{a_i}{c_i}, \zeta\right). \tag{22}$$

Die Function $\frac{\Omega(z, \zeta)}{\Theta_0(\zeta)}$ dagegen würde, falls nicht etwa $\Theta_0(\zeta)$ identisch verschwindet, nur automorphe Functionen zu Periodicitätsmoduln haben, dem entsprechend, dass die Periodicitätsmoduln der Integrale zweiter Gattung algebraische Functionen des singulären Punktes sind. Die Functionen (21) sind stets endlich, weil die Punkte $\frac{a_i}{c_i}$ stets ausserhalb des Hauptkreises liegen, der Punkt ζ oder $f_i(\zeta)$ also nie mit ihnen zusammenfallen kann.

§ 3. Integrale dritter Gattung.

Durch Integration der Function Ω nach der Variabeln ζ zwischen den Grenzen η und ξ entsteht eine neue Function, die wir $S_{\xi\eta}$ nennen, und welche in zwei Punkten ($z = \xi$ und $z = \eta$) eines jeden Gebietes je logarithmisch unendlich wird. Wir haben

$$S_{\xi\eta}(z) = \int_\eta^\xi \Omega(z, \zeta)\, d\zeta = \sum_k \log \frac{z - f_k(\xi)}{z - f_k(\eta)}. \tag{23}$$

Die gliedweise Integration der Reihe

$$\sum_i f_i'(\zeta) = \sum_i \frac{1}{(c_i \zeta + d_i)^2} = \sum_i \frac{1}{c_i^2} \frac{1}{\left(\zeta + \frac{d_i}{c_i}\right)^2}$$

ist in der That erlaubt; denn die Grössen $\frac{d_i}{c_i}$ bleiben endlich

für $i = \infty$; die Convergenz der Reihe hängt also nur von den Grössen c_i^{-2} ab, ist folglich von dem Werthe der Variabeln ζ nicht wesentlich abhängig. Das allgemeine Glied der rechten Seite von (23) wird gleich Null bei unendlich wachsendem Index, denn es ist

$$f_k(\xi) = \frac{a_k}{c_k} - \frac{a_k d_k - b_k c_k}{(c_k \xi + d_k) c_k}, \quad f_k(\eta) = \frac{a_k}{c_k} - \frac{a_k d_k - b_k c_k}{(c_k \eta + d_k) c_k}.$$

Beide Grössen nähern sich also für $k = \infty$ dem von ξ und η unabhängigen endlichen Grenzwerthe von $\frac{a_k}{c_k}$. Ebenso kann die Reihe

$$\sum_i \frac{f_i'(\zeta)}{f_i(\zeta)} = \sum_i \frac{1}{(a_i \zeta + b_i)(c_i \zeta + d_i)} = \sum_i \frac{1}{c_i^2 \left(\frac{a_i}{c_i}\zeta + \frac{b_i}{c_i}\right)\left(\zeta + \frac{d_i}{c_i}\right)}$$

gliedweise integrirt werden; denn ihre Convergenz wird ebenfalls durch die Glieder c_i^{-2} bedingt, während sich die Quotienten $\frac{a_i}{c_i}$ und $\frac{d_i}{c_i}$ endlichen (wenn auch unbestimmten) Grenzwerthen nähern und ebenso

$$\frac{b_i}{c_i} = \frac{a_i d_i}{c_i^2} - \frac{a_i d_i - b_i c_i}{c_i^2} = \frac{a_i d_i}{c_i^2} - \frac{1}{c_i^2}$$

endlich bleibt.

Die Eigenschaften der Function $S_{\xi\eta}$ ergeben sich durch folgende Betrachtung. Es ist identisch

$$f_i(z) - f_k(\xi)$$
$$= \frac{[(a_i c_k - c_i a_k)\xi + (a_i d_k - c_i b_k)]\, z + (b_i c_k - d_i a_k)\xi + (b_i d_k - d_i b_k)}{(c_i z + d_i)(c_k \xi + d_k)}$$
$$= [z - f_i^{-1}(f_k(\xi))]\, c_i \left[\frac{a_i}{c_i} - f_k(\xi)\right] (c_i z + d_i)^{-1},$$

also unmittelbar:

$$(24) \quad \log \frac{f_i(z) - f_k(\xi)}{f_i(z) - f_k(\eta)} = \log \frac{z - f_i^{-1}(f_k(\xi))}{z - f_i^{-1}(f_k(\eta))} + \log \frac{\frac{a_i}{c_i} - f_k(\xi)}{\frac{a_i}{c_i} - f_k(\eta)}.$$

Da die Gesammtheit der Functionen $f_i^{-1}(f_k(\xi))$ identisch ist mit der Gesammtheit der Functionen $f_i(\xi)$, so führt die Anwendung dieser Relation auf die rechte Seite von (23) zu dem Resultate

$$S_{\xi\eta}(f_i(z)) = S_{\xi\eta}(z) + S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right). \tag{25}$$

Die Grössen $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$, welche hier als Periodicitätsmoduln des Integrals dritter Gattung auftreten, sind Functionen von ξ und η, welche für alle Werthe dieser Grössen endlich bleiben, denn die Punkte $\frac{a_i}{c_i}$ liegen stets ausserhalb des Hauptkreises. Die Anzahl der Periodicitätsmoduln ergibt sich zunächst gleich n, wenn $2n$ die Zahl der Seiten des Fundamentalpolygons angibt, wird aber durch die Betrachtungen der folgenden Paragraphen wesentlich reducirt. Setzen wir

$$H(z) = \prod_k \frac{z - f_k(\xi)}{z - f_k(\eta)}, \tag{26}$$

so genügt die Function $H(z)$, welche nur in dem einen Punkte ξ gleich Null und nur in dem einen Punkte η gleich Unendlich wird, der Functionalgleichung:

$$H(f_i(z)) = H(z) \cdot e^{S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)}. \tag{27}$$

Die durch (26) definirte Function hängt auf's Engste mit den von Klein eingeführten Primformen zusammen. Die letzteren (welche durch einen Grenzprocess aus Integralen dritter Gattung abgeleitet sind) werden nur an einer Stelle der Riemann'schen Fläche, also auch nur an einer Stelle des gegebenen Polygons gleich Null und an keiner Stelle unendlich gross, während unser Product an je einer Stelle unendlich klein bez. unendlich gross erster Ordnung wird. Wäre es erlaubt, Zähler und Nenner des Productes $H(z)$ von einander zu trennen, ohne die Convergenz zu stören, so würde jeder für sich die

wesentlichen Eigenschaften einer „Primform" haben. Klein[1]) weist selbst auf diesen Zusammenhang hin unter Bezugnahme auf einen entsprechenden von Schottky[2]) aufgestellten Product-Ausdruck, der sich bei dessen schon erwähnten Untersuchungen über den besonderen Fall ergab, wo das gegebene Polygon durch mehrere sich nicht schneidende Kreise begrenzt wird, und wo in Folge dessen die gegebene Transformations-Gruppe zu den von Poincaré[3]) als Klein'sche Gruppen bezeichneten linearen Transformations-Gruppen gehört.

Die von v. Mangoldt[4]) und H. Stahl[5]) gegebenen Productdarstellungen automorpher Functionen sind wesentlich complicirterer Natur, da dort den einzelnen Factoren der unendlichen Producte Exponentialfactoren beigefügt werden müssen, um die Convergenz zu erzielen.

§ 4. Die Vertauschung von Parameter und Argument.

Es war der Definition nach

$$S_{\xi\eta}(\beta) - S_{\xi\eta}(\alpha) = \int_\alpha^\beta d\,S_{\xi\eta} = \sum_k \log\left(\frac{\beta - f_k(\xi)}{\beta - f_k(\eta)} \cdot \frac{\alpha - f_k(\eta)}{\alpha - f_k(\xi)}\right);$$

ferner ist identisch

[1]) Zur Theorie der Abel'schen Functionen, Mathematische Annalen Bd. 36 (1889), p. 12 ff.

[2]) Ueber eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt; Crelle's Journal Bd. 101, p. 227 ff. (1886). Auch die am Schlusse dieser Abhandlung aufgestellte Differentialgleichung, welche den Zusammenhang mit den ϑ-Functionen vermittelt, wird sich analog für die im Texte behandelten Fälle ableiten lassen.

[3]) Mémoire sur les groupes kleinéens, Acta mathematica Bd. 3, p. 49 ff.

[4]) Ueber eine Darstellung elliptischer Modulfunctionen durch unendliche Producte, Göttinger Nachrichten 1885, p. 313 und 1886, p. 1 (hier mit Ausdehnung auf allgemeine Functionen).

[5]) Ueber die Darstellung der eindeutigen Functionen, die sich durch lineare Substitutionen reproduciren, durch unendliche Producte, Math. Annalen Bd. 33, p. 291 ff. (1888).

$$z - f_\kappa(\xi) = \frac{(c_\kappa \xi + d_\kappa)\, z - (a_\kappa \xi + b_\kappa)}{c_\kappa \xi + d_\kappa}$$

$$= \frac{c_\kappa z - a_\kappa}{c_\kappa \xi + d_\kappa}\,(\xi - f_\kappa^{-1}(z)),$$

$$z - f_\kappa(\eta) = \frac{c_\kappa z - a_\kappa}{c_\kappa \eta + d_\kappa}\,(\eta - f_\kappa^{-1}(z)).$$

Hieraus folgt:

$$(28) \qquad \int_x^z dS_{\xi\eta} = \sum_\kappa \log\left(\frac{\xi - f_\kappa^{-1}(z)}{\eta - f_\kappa^{-1}(z)} \cdot \frac{\eta - f_\kappa^{-1}(x)}{\xi - f_\kappa^{-1}(x)}\right),$$

und da die Gesammtheit der Transformationen f_κ^{-1} identisch ist mit der Gesammtheit der Transformationen f_κ, so ergibt sich weiter

$$(29) \qquad \int_x^z dS_{\xi\eta} = \int_\xi^\eta dS_{xz}.$$

Dem Integrale $S_{\xi\eta}$ kommt also diejenige Eigenschaft zu, welche bei den Normalintegralen dritter Gattung in der Theorie der Abel'schen Functionen als Satz der Vertauschung von Parameter und Argument bekannt ist. Dieser Satz wird dort am einfachsten durch Untersuchung des Integrals

$$\int S_{\xi\eta}\, dS_{xz}$$

abgeleitet, indem man die Integration über den Rand der betreffenden Riemann'schen Fläche ausdehnt, nachdem letztere durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt ist, und nachdem man die singulären Punkte ξ, η, x, z durch Schleifen mit diesem Rande verbunden hat. An Stelle der Integration über die Ufer der Querschnitte tritt hier die Integration über den Rand des Kreisbogenpolygons, auf welches die Riemann'sche Fläche nach der Poincaré'schen Methode abgebildet ist. Seien A_κ, B_κ die Ecken einer Seite dieses Polygons und C_κ, D_κ diejenigen der zugeordneten Seite, so ergibt sich

$$\sum_{\kappa=1}^{n}\left[\int_{A_\kappa}^{B_\kappa} S_{\xi\eta}\, dS_{xz} - \int_{C_\kappa}^{D_\kappa} S_{\xi\eta}\, dS_{xz}\right] - 2\pi i\left[\int_\xi^\eta dS_{xz} - \int_x^z dS_{\xi\eta}\right] = 0.$$

Die erste Summe der linken Seite ist gleich

$$\sum_i \int_{A_i}^{B_i} [S_{\xi\eta}(z) - S_{\xi\eta}(f_i(z))]\, d\, S_{\alpha\beta} = - \sum_i S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) \int_{A_i}^{B_i} d\, S_{\alpha\beta};$$

und die Vergleichung mit der Relation (29) lehrt, dass der Ausdruck der rechten Seite gleich Null ist. Die Integrale $\int_{A_i}^{B_i} d\, S_{\alpha\beta}$ sind Periodicitätsmoduln des Integrals $S_{\alpha\beta}$, lassen sich also durch die Grössen $S_{\alpha\beta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$ linear (mit ganzzahligen Coëfficienten) ausdrücken. Setzen wir zur Abkürzung

$$(30) \qquad \begin{aligned} P_i &= S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right), \quad \Pi_i = \int_{A_i}^{B_i} d\, S_{\xi\eta}, \\ P'_i &= S_{\alpha\beta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right), \quad \Pi'_i = \int_{A_i}^{B_i} d\, S_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

so bestehen demnach Relationen der Form

$$(31) \qquad \Pi_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} P_k, \quad \Pi'_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} P'_k,$$

wo die Coëfficienten γ_{ik} ganze Zahlen bedeuten. Die Gleichung (29) führt jetzt zu der Relation:

$$(32) \qquad \sum_i P_i \sum_k \gamma_{ik} P'_k = 0,$$

welche für alle Werthe von α und β erfüllt sein muss.

Nehmen wir nun an, dass die Grössen P_i von einander unabhängig seien, d. h. dass zwischen ihnen keine lineare Beziehung mit constanten Coëfficienten erfüllt sei, so müssten die n Gleichungen

$$(33) \qquad \sum_k \gamma_{ik} P'_k = 0$$

erfüllt sein, und zwar für alle Werthe von α und β, also auch für $\alpha = \xi$, $\beta = \eta$, d. h. es müssten auch zwischen den P_i die

gleichen n Beziehungen bestehen, was der gemachten Annahme widersprechen würde.

Wenn r von einander unabhängige Relationen der Form

$$\sum_k \delta_{ik} P_k = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots r \tag{34}$$

als erfüllt vorausgesetzt werden, so kann man r der n Grössen P_i mittelst derselben aus der Gleichung (32) herausschaffen, und es folgen für die P'_k dann $n - r$ Relationen von der Form (33). Letztere müssen auch für $a = \xi$, $\beta = \eta$ Geltung haben, also auch für die Grössen P_k ebenso erfüllt sein, wie für die P'_k. Die Gleichungen (34) müssen also mit den Gleichungen (33) identisch sein, und es muss $n = 2r$, also n eine gerade Zahl sein. Zwischen den n Periodicitätsmoduln

$$P_i = S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$$

eines Integrals dritter Gattung bestehen daher mindestens $\frac{n}{2}$ lineare Relationen mit ganzzahligen Coëfficienten. In besonderen Fällen kann die Anzahl der Relationen eine grössere sein, wie im folgenden Paragraphen erörtert werden soll, wobei sich auch der Fall einer ungeraden Zahl n erledigen wird.

Der Satz über die Vertauschung von Parameter und Argument lässt sich auch leicht für Integrale zweiter Gattung aussprechen, und zwar ganz so, wie es in der Theorie der Abel'schen Integrale geschieht.[1])

Es war

$$\int_a^\beta d\,S_{\xi\eta} = \int_\eta^\xi d\,\xi \int_a^\beta d\,\Omega_\xi.$$

Also folgt nach (29):

$$\frac{\partial \int_a^\beta d\,\Omega_\xi}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 \int_a^\beta d\,S_{\xi\eta}}{\partial \beta\, \partial \xi} = \frac{\partial^2 \int_\xi^\eta d\,S_{a\beta}}{\partial \beta\, \partial \xi}:$$

[1]) Vgl. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, p. 122.

und hieraus die betreffende Gleichung für Integrale zweiter Gattung:

$$\left(\frac{\partial \Omega_\xi}{\partial z}\right)_{z=\beta} = \left(\frac{\partial \Omega_\beta}{\partial z}\right)_{z=\xi}.$$

Durch Differentiation erhält man für die Periodicitätsmoduln der Integrale zweiter Gattung analoge Relationen, wie für diejenigen der Integrale dritter Gattung.

§ 5. Einige Beispiele.

Hier mögen zunächst einige Beispiele betrachtet werden.[1]) Es sei ein Achteck mit den Ecken A, B, C, D, E, F, G, H gegeben; und diese Ecken mögen bei positivem Umgange in der angegebenen Reihenfolge angetroffen werden. Einander entsprechende Seiten seien

AB	und	FE	durch	die	Transformation	$f_1(z)$,
BC	"	GF	"	"	"	$f_2(z)$,
CD	"	HG	"	"	"	$f_3(z)$,
DE	"	AH	"	"	"	$f_4(z)$.

Dann ist

$$\begin{aligned} S_{\xi\eta}(F) &= S_{\xi\eta}(f_1(A)) \quad = S_{\xi\eta}(f_2(C)) \\ &= S_{\xi\eta}(A) + P_1 = S_{\xi\eta}(C) + P_2, \\ S_{\xi\eta}(G) &= S_{\xi\eta}(f_2(B)) \quad = S_{\xi\eta}(f_3(D)) \\ &= S_{\xi\eta}(B) + P_2 = S_{\xi\eta}(D) + P_3, \\ S_{\xi\eta}(H) &= S_{\xi\eta}(f_3(C)) \quad = S_{\xi\eta}(f_4(E)) \\ &= S_{\xi\eta}(C) + P_3 = S_{\xi\eta}(E) + P_4. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\Pi_1 = S_{\xi\eta}(B) - S_{\xi\eta}(A), \quad \Pi_2 = S_{\xi\eta}(C) - S_{\xi\eta}(B),$$
$$\Pi_3 = S_{\xi\eta}(D) - S_{\xi\eta}(C), \quad \Pi_4 = S_{\xi\eta}(E) - S_{\xi\eta}(D).$$

---

[1]) Dieselben beiden Beispiele wählt Poincaré a. a. O. zur Erläuterung des Begriffes der Cyklen.

Die Gleichungen (31) nehmen hier die Gestalt an

$$(35)\quad \begin{aligned} \Pi_1 &= \quad * \;\; - P_2 + P_3 - P_4, \\ \Pi_2 &= \quad P_1 + \; * \;\; - P_3 + P_4, \\ \Pi_3 &= - P_1 + P_2 + \; * \;\; - P_4, \\ \Pi_4 &= \quad P_1 - P_2 + P_3 + \; * \; ; \end{aligned}$$

und dieselben Relationen gelten für die Grössen P_i' und Π_i'. Diese Beziehungen sind identisch mit denjenigen, welche im Raume zwischen den Punkten P und Ebenen Π bei der Verwandtschaft des linearen Complexes bestehen. Die Bedingung (32) wird

$$(36)\qquad P_1 \Pi_1' + P_2 \Pi_2' + P_3 \Pi_3' + P_4 \Pi_4' = 0.$$

Besteht zwischen den P_i die Relation

$$(37)\qquad \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = 0,$$

so ergibt sich durch Elimination von P_1 (wobei α_1 nicht gleich Null sein darf):

$$(38)\quad P_2(\alpha_1\Pi_2'-\alpha_2\Pi_1')+P_3(\alpha_1\Pi_3'-\alpha_3\Pi_1')+P_4(\alpha_1\Pi_4'-\alpha_4\Pi_1')=0.$$

Ist ausserdem

$$(39)\qquad \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \beta_3 P_3 + \beta_4 P_4 = 0,$$

so folgt:

$$(40)\quad P_2(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)+P_3(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)+P_4(\alpha_1\beta_4-\alpha_4\beta_1)=0.$$

und durch Elimination von P_2 aus (38) erhalten wir eine im P_2 und P_3 lineare und homogene Gleichung, deren Coëfficienten verschwinden müssen; die letzteren sind linear im Π_1', Π_2', Π_3', Π_4' und führen zu den Relationen:

$$(41)\quad \begin{aligned} (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\Pi_3'-\alpha_3\Pi_1')-(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)(\alpha_1\Pi_2'-\alpha_2\Pi_1')&=0, \\ (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\Pi_4'-\alpha_4\Pi_1')-(\alpha_1\beta_4-\alpha_4\beta_1)(\alpha_1\Pi_2'-\alpha_2\Pi_1')&=0. \end{aligned}$$

Dieselben Gleichungen müssen erfüllt sein, wenn man α, β bez. durch ξ, η, d. h. Π_i' durch Π_i ersetzt, und müssen dann mit den Gleichungen (37) und (39) gleichbedeutend werden. Aus (35) folgt:

$$
\begin{aligned}
a_1 \Pi_2 - a_2 \Pi_1 &= a_1 P_1 + a_2 P_2 - (a_1 + a_2)(P_3 - P_4),\\
a_1 \Pi_3 - a_3 \Pi_1 &= - a_1 P_1 + (a_1 + a_3) P_2 - a_3 P_3 - (a_1 - a_3) P_4,\\
a_1 \Pi_4 - a_4 \Pi_1 &= a_1 P_1 - (a_1 + a_4) P_2 + (a_1 - a_4) P_3 + a_4 P_4.
\end{aligned}
$$

Sei zur Abkürzung $(\alpha\beta)_{ik} = \alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i$, so gehen folglich die Gleichungen (40) über in

$$
\begin{aligned}
&- a_1 P_1 [(\alpha\beta)_{12} + (\alpha\beta)_{13}] + a_1 P_2 (\alpha\beta)_{32} + a_1 P_3 (\alpha\beta)_{23}\\
&+ P_4 [(\alpha\beta)_{13} (a_1 + a_2) - (\alpha\beta)_{12} (a_2 - a_1) - a_1 (\alpha\beta)_{14}] = 0.
\end{aligned}
$$

Formen wir dies Resultat mit Hülfe von (39) und den analogen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
P_1 (\alpha\beta)_{12} + P_3 (\alpha\beta)_{32} + P_4 (\alpha\beta)_{42} &= 0,\\
P_1 (\alpha\beta)_{13} + P_2 (\alpha\beta)_{23} + P_4 (\alpha\beta)_{43} &= 0
\end{aligned}
$$

um, so ergibt sich nach Weglassung des Factors P_4 eine Beziehung zwischen den α_i und β_i, nemlich

$$
a_1[(\alpha\beta)_{13} - (\alpha\beta)_{14} - (\alpha\beta)_{12} - (\alpha\beta)_{24} - (\alpha\beta)_{34}] = a_2[(\alpha\beta)_{12} - (\alpha\beta)_{13}].
$$

Analoge Gleichungen wird man durch Vertauschung der Indices erhalten.

Von anderem Gesichtspunkte aus lässt sich dies Beispiel in folgender Weise behandeln. Die beiden Relationen, welche sich für die Π_i' ergeben, sollen (falls man Π_i für Π_i' schreibt) mittelst der Transformation (35) auf die ursprünglichen Gleichungen (37) und (39) zurückgeführt werden. Umgekehrt müssen so aus diesen Gleichungen diejenigen für die Π_i (oder Π_i') gewonnen werden können; es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
a_1 \Pi_1' + a_2 \Pi_2' + a_3 \Pi_3' + a_4 \Pi_4' &= 0,\\
b_1 \Pi_1' + b_2 \Pi_2' + b_3 \Pi_3' + b_4 \Pi_4' &= 0,
\end{aligned}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
a_1 &= * - a_2 + a_3 - a_4,\\
a_2 &= a_1 + * - a_3 + a_4,\\
a_3 &= - a_1 + a_2 + * - a_4,\\
a_4 &= a_1 - a_2 + a_3 + *,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

und wo dieselben Gleichungen zwischen den b_i und β_i bestehen. Mit Hülfe von (36) eliminiren wir Π'_1 und Π'_2 und finden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \Pi'_3 + a_4 \Pi'_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 \Pi'_3 + b_4 \Pi'_4 \\ P_1 & P_2 & P_3 \Pi'_3 + P_4 \Pi'_4 \end{vmatrix} = 0,$$

und hieraus die beiden Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ P_1 & P_2 & P_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese letzteren müssen bez. identisch sein mit den Relationen:

$$(43) \qquad \begin{aligned} P_1 (a\beta)_{14} + P_2 (a\beta)_{24} + P_3 (a\beta)_{34} = 0, \\ P_1 (a\beta)_{13} + P_2 (a\beta)_{23} + P_4 (a\beta)_{43} = 0; \end{aligned}$$

und daraus ergeben sich die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$(44) \qquad \begin{aligned} \varrho\,(a\beta)_{14} &= (a b)_{23}. \qquad & \varrho'\,(a\beta)_{13} &= (a b)_{42}, \\ \varrho\,(a\beta)_{24} &= (a b)_{31}. \qquad & \varrho'\,(a\beta)_{23} &= (a b)_{14}, \\ \varrho\,(a\beta)_{34} &= (a b)_{12}. \qquad & \varrho'\,(a\beta)_{43} &= (a b)_{21}. \end{aligned}$$

Wegen des doppelten Werthes von $(a b)_{12} = -(a b)_{21}$ muss $\varrho' = \varrho = 1$ sein: berechnet man ferner die Grössen $(a b)_{ik}$ durch $(a\beta)_{ik}$ gemäss (42). so reduciren sich die Bedingungen (44) auf die Forderung:

$$(45) \qquad (a\beta)_{34} = (a\beta)_{24} = (a\beta)_{14} = (a\beta)_{31} = (a\beta)_{23}.$$

Die Gleichungen (43) werden demnach:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 = 0, \\ P_1 - P_2 + P_4 = 0. \end{aligned}$$

Mit diesen Gleichungen müssen die ursprünglichen Relationen (37) und (39) äquivalent sein; auch die oben (p. 441) vorläufig aufgestellte Bedingung ist durch sie identisch erfüllt.

Die Elimination setzt voraus, dass nicht gleichzeitig a_3 und a_4 verschwinden; denn in dem Falle würden die linken

Seiten der beiden Gleichungen (43) einander proportional werden. Das Resultat wäre im Wesentlichen dasselbe, als wenn wir in den vorliegenden Formeln α_1 und α_2 verschwinden lassen. Aus (45) folgt dann

$$\beta_1 = 0, \; \beta_2 = 0, \; \alpha_3 \beta_4 - \beta_3 \alpha_4 = 0;$$

die angenommenen Bedingungen wären also einfach

$$P_3 = 0 \text{ und } P_4 = 0.$$

Das erhaltene Resultat ist aber nicht anwendbar, wenn sowohl α_1 und α_2, als auch β_3 und β_4 gleich Null sind. In diesem Falle ergibt sich

$$(\alpha_3 - \alpha_4)(\Pi_1' - \Pi_2') - \alpha_4 \Pi_3' + \alpha_3 \Pi_4' = 0,$$
$$\beta_2 \Pi_1' - \beta_1 \Pi_2' + (\beta_1 - \beta_2)(\Pi_3' - \Pi_4') = 0.$$

Die Anwendung von (36) führt durch Elimination von Π_1' und Π_2' zu der Relation:

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 - \alpha_4 & \alpha_4 - \alpha_3 & -\alpha_4 \Pi_3' + \alpha_3 \Pi_4' \\ \beta_2 & -\beta_1 & (\beta_1 - \beta_2)(\Pi_3' - \Pi_4') \\ P_1 & P_2 & P_3 \Pi_3' + P_4 \Pi_4' \end{vmatrix} = 0;$$

und hieraus, da die Coëfficienten von Π_3' und Π_4' einzeln verschwinden müssen:

$$(P_1 + P_2 + P_3)(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_3 - \alpha_4) + \beta_1 \alpha_4 P_1 + \beta_2 \alpha_4 P_2 = 0,$$
$$(P_1 + P_2 + P_4)(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_3 - \alpha_4) + \beta_1 \alpha_3 P_1 + \beta_2 \alpha_3 P_2 = 0.$$

Wir haben also folgende Möglichkeiten:

1) $\alpha_3 = \alpha_4$, $\quad \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 = 0$, es folgt $\quad P_3 + P_4 = 0$;
2) $\beta_1 = \beta_2$, $\quad P_1 + P_2 = 0$, „ „ $\quad \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = 0$;
3) $\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 = 0$, $\quad (\alpha_3 - \alpha_4)(P_1 + P_2) + \alpha_3 P_3 - \alpha_4 P_4 = 0$.

Im letztern Falle müsste auch

$$(\alpha_3 - \alpha_4)(\beta_1 - \beta_2) P_2 + 2 \alpha_3 \beta_1 P_3 = 0$$

sein; es würde folgen $\beta_1 = \beta_2$ und $\alpha_3 = 0$, so dass die ursprünglichen Relationen lauteten

$$P_1 + P_2 = 0, \quad P_4 = 0.$$

Im Falle 1) geht die Gleichung (36) über in

$$P_1(\beta_2 \Pi_1' - \beta_1 \Pi_2') + \beta_2 P_3 (\Pi_3' - \Pi_4') = 0$$

also:

$$\beta_2 \Pi_1' - \beta_1 \Pi_2' = (P_3 - P_4)(\beta_1 + \beta_2) - (\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2) = 0,$$
$$\Pi_3' - \Pi_4' \quad = -(P_3 + P_4) + 2(P_2 - P_1) = 0.$$

Es ist also nothwendig $\beta_1 + \beta_2 = 0$ und $P_3 + P_4 = 0$, wo dann die ursprünglichen Gleichungen (37) und (39) in der Form

$$P_1 - P_2 = 0, \quad P_3 + P_4 = 0$$

erscheinen.

Ein anderes Beispiel gibt dasselbe Achteck, wenn die Seiten auf einander nach folgendem Schema bezogen werden:

AB	auf	DC	durch die Transformation	f_1,
BC	„	ED	„ „ „	f_2,
EF	„	HG	„ „ „	f_3,
FG	„	AH	„ „ „	f_4.

Haben die Grössen P_i und Π_i die frühere Bedeutung, so wird hier

$$P_1 = S_{\xi\eta}(D) - S_{\xi\eta}(A) = S_{\xi\eta}(C) - S_{\xi\eta}(D),$$
$$P_2 = S_{\xi\eta}(E) - S_{\xi\eta}(B) = S_{\xi\eta}(D) - S_{\xi\eta}(C),$$
$$P_3 = S_{\xi\eta}(G) - S_{\xi\eta}(F) = S_{\xi\eta}(H) - S_{\xi\eta}(E),$$
$$P_4 = S_{\xi\eta}(F) - S_{\xi\eta}(A) = S_{\xi\eta}(H) - S_{\xi\eta}(G).$$

An Stelle der Gleichungen (35) treten die folgenden

$$\Pi_1 = S_{\xi\eta}(B) - S_{\xi\eta}(A) = -P_2,$$
$$\Pi_2 = S_{\xi\eta}(C) - S_{\xi\eta}(B) = \quad P_1,$$
$$\Pi_3 = S_{\xi\eta}(D) - S_{\xi\eta}(C) = -P_4,$$
$$\Pi_4 = S_{\xi\eta}(G) - S_{\xi\eta}(F) = \quad P_3.$$

Wir gehen wieder von den Relationen (37) und (39) aus,

$$-\alpha_2 \Pi_1' + \alpha_1 \Pi_2' - \alpha_4 \Pi_3' + \alpha_3 \Pi_4' = 0,$$
$$-\beta_2 \Pi_1' + \beta_1 \Pi_2' - \beta_4 \Pi_3' + \beta_3 \Pi_4' = 0,$$

und die Anwendung von (36) führt zu dem Resultate

$$\begin{vmatrix} -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 \Pi_4' - \alpha_4 \Pi_3' \\ -\beta_2 & \beta_1 & \beta_3 \Pi_4' - \beta_4 \Pi_3' \\ P_1 & P_2 & P_4 \Pi_4' + P_3 \Pi_3' \end{vmatrix} = 0;$$

also bestehen die beiden Gleichungen

$$P_1 (\alpha\beta)_{13} + P_2 (\alpha\beta)_{23} + P_4 (\alpha\beta)_{12} = 0,$$
$$P_1 (\alpha\beta)_{14} + P_2 (\alpha\beta)_{24} - P_3 (\alpha\beta)_{12} = 0.$$

Die Vergleichung mit (43) ergibt:

$$(\alpha\beta)_{12} + (\alpha\beta)_{34} = 0$$

als einzige Bedingung. Dieselbe ist insbesondere erfüllt für

$$\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \beta_3 = 0, \ \beta_4 = 0,$$

in welchem Falle die Relationen

$$\alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = 0, \quad \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 = 0,$$
$$\alpha_3 \Pi_4' - \alpha_4 \Pi_3' = 0, \quad \beta_1 \Pi_2' - \beta_2 \Pi_1' = 0$$

bestehen. Ist gleichzeitig $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_4 = 0$, so haben wir $P_3 = 0$ und $P_4 = 0$, d. h. P_1 und P_2 sind die normalen Periodicitätsmoduln des Normalintegrals $S_{\xi\eta}$.

§ 6. Die Integrale erster Gattung.

In der Theorie der Abel'schen Integrale erscheinen als Periodicitätsmoduln der Normalintegrale dritter Gattung an den Querschnitten der Riemann'schen Fläche bekanntlich die Normalintegrale erster Gattung; und die Grenzen der letzteren sind die Unstetigkeitspunkte der Integrale dritter Gattung.

Fassen wir jetzt die Grössen $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$ als Functionen von ξ und η auf, und setzen dem entsprechend nach (24) und (25)

$$S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) = \sum_k \log \frac{\frac{a_i}{c_i} - f_k(\xi)}{\frac{a_i}{c_i} - f_k(\eta)}, \tag{46}$$

oder abgekürzt

$$S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) = \int_\eta^\xi du_i = u_i(\xi) - u_i(\eta),$$

so zeigt sich, dass die rechte Seite für keinen Punkt ξ im Innern des Hauptkreises unendlich gross wird, ihr also in der That die Eigenschaft eines Integrals erster Gattung zukommt; denn die Punkte $\frac{a_i}{c_i}$, welche durch die Substitution $f_i^{-1}(z)$ aus dem Punkte $z = \infty$ hervorgehen, liegen sämmtlich ausserhalb des Hauptkreises.

Die Anzahl der von einander linear unabhängigen Integrale erster Gattung ist gleich der Anzahl der von einander linear unabhängigen Functionen $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$, welche in § 4 vorläufig bestimmt wurde. Diese Bestimmung bedarf aber noch einer wesentlichen Modification in dem Falle, dass die Ecken des Fundamentalpolygons (im Sinne Poincaré's) in mehrere Cyclen zerfallen.

Der Punkt $z = \infty$, welcher bei Bildung der Ausdrücke $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) = S_{\xi\eta}(f_i(\infty))$ wesentlich zu sein scheint, muss thatsächlich durch einen beliebigen, ausserhalb des Hauptkreises gelegenen Punkt ersetzt werden können, denn durch eine lineare Hülfstransformation kann er an die Stelle eines beliebigen Punktes dieser Art gebracht werden. Um einen solchen willkürlichen Punkt ζ in die Rechnung einzuführen, beachten wir, dass nach (24) die Formel

$$\begin{aligned} S_{\xi\eta}(f_i(z)) - S_{\xi\eta}(z) &= S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) - S_{\xi\eta}(\infty) \\ &= S_{\xi\eta}(f_i(\zeta)) - S_{\xi\eta}(\zeta) \end{aligned}$$

für jeden Werth von z oder ζ gilt. Es ist also auch

$$\begin{aligned} u_i(\xi) - u_i(\eta) &= S_{\xi\eta}(f_i(\zeta)) - S_{\xi\eta}(\zeta) \\ &= \sum_k \log\left(\frac{f_i(\zeta) - f_k(\xi)}{f_i(\zeta) - f_k(\eta)} \cdot \frac{\zeta - f_k(\eta)}{\zeta - f_k(\xi)}\right) \end{aligned}$$

eine von ζ unabhängige Constante, falls ζ ausserhalb des Hauptkreises liegt.

Gehören nun einem Cyclus ν Ecken A_i an, so können durch gewisse $\nu - 1$ Transformationen diese Ecken mit einer von ihnen zur Deckung gebracht werden; dasselbe gilt für die zu diesen Ecken conjugirten Punkte A_i' ausserhalb des Hauptkreises. Umgekehrt kann einer der letzteren Punkte, den wir jetzt ζ nennen, durch gewisse Transformationen successive mit den anderen Ecken zusammengebracht werden; die letzte Transformation $f_j(\zeta)$ aber führt ihn an die alte Stelle zurück. Ist nur ein Cyclus vorhanden, so setzt sich diese letzte Substitution aus den früheren zusammen; sind aber mehrere Cyclen vorhanden, so ist dies nicht der Fall, und doch ist für diese Transformation $f_j(\zeta) = \zeta$, also auch der entsprechende Periodicitätsmodul

$$S_{\xi\eta}(f_j(\zeta)) - S_{\xi\eta}(\zeta),$$

welcher eine lineare Function der $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$ ist, gleich Null. Bei einem Cyclus haben wir also n, bei zwei Cyclen $n-1$ Grössen $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) = P_i$ zu berücksichtigen; bei ϱ Cyclen bleiben $n - \varrho + 1$ Grössen P_i zu untersuchen.

Auf diese $n - \varrho + 1$ Grössen sind die Ueberlegungen von § 4 anzuwenden. Die Zahl p der von einander unabhängigen Integrale erster Gattung ist daher im Allgemeinen gleich

$$p = \frac{n + 1 - \varrho}{2}.$$

Es ist dieses dieselbe Zahl, welche Poincaré durch andere Betrachtungen (über den „Zusammenhang" des Polygons) für das Geschlecht der zugehörigen Riemann'schen Fläche abgeleitet hat. Ist n eine ungerade Zahl, so muss hiernach ϱ eine gerade Zahl sein.

Wir haben noch die Periodicitäts-Moduln der Integrale erster Gattung zu untersuchen. Die Aenderung, welche u_i erleidet, wenn ξ durch $f_m(\xi)$ ersetzt wird, ist gleich

$$(46) \quad u_i(f_m(\xi)) - u_i(\xi) = \sum_k \log\left(\frac{f_i(\zeta) - f_k(f_m(\xi))}{f_i(\zeta) - f_k(\xi)} \cdot \frac{\zeta - f_k(\xi)}{\zeta - f_k(f_m(\xi))}\right),$$

wo die rechte Seite unabhängig von ζ ist, indem z. B. $\zeta = \infty$ genommen werden kann. **Wir haben nachzuweisen, dass die rechte Seite auch unabhängig von ξ ist.**

Der Beweis wird unmittelbar durch den Satz über die Vertauschung von Parameter und Argument gegeben. In der That ergibt sich unmittelbar aus den Formeln, welche in § 4 auf die Gleichung (28) führten, das Resultat:

$$u_i(f_m(\xi)) - u_i(\xi) = \sum_k \log\left(\frac{f_k^{-1}(f_i(\zeta)) - f_m(\xi)}{f_k^{-1}(f_i(\zeta)) - \xi} \cdot \frac{f_k^{-1}(\zeta) - \xi}{f_k^{-1}(\zeta) - f_m(\xi)}\right)$$

$$= \sum_k \log\left(\frac{f_m(\xi) - f_k^{-1}(f_i(\zeta))}{f_m(\xi) - f_k^{-1}(\zeta)} \cdot \frac{\xi - f_k^{-1}(\zeta)}{\xi - f_k^{-1}(f_i(\zeta))}\right).$$

Die rechte Seite geht aber aus der rechten Seite von (46) hervor, wenn man ξ, ζ, f_i, f_m, f_k bez. durch ζ, ξ, f_m, f_i, f_k^{-1} ersetzt. Da nun die Gesammtheit der Transformationen f_k identisch ist mit der Gesammtheit der Transformationen f_k^{-1}, so folgt

$$(47) \qquad u_i(f_m(\xi)) - u_i(\xi) = u_m(f_i(\zeta)) - u_m(\zeta)$$
$$= u_m(f_i(\infty)) - u_m(\infty).$$

Die rechte Seite ist bereits als unabhängig von ζ nachgewiesen (indem z. B. $\zeta = \infty$ genommen werden konnte); folglich ist auch die linke Seite (die nach demselben Gesetze gebildet ist) unabhängig von ξ. Setzen wir

$$a_{im} = u_i(f_m(\xi)) - u_i(\xi) = u_m(f_i(\xi)) - u_m(\xi),$$

so folgt noch die Relation

$$(48) \qquad a_{im} = a_{mi}.$$

Die Gleichung (46) löst die Aufgabe, alle Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung als Functionen von $6p-6$ Parametern darzustellen,[1]) denn so gross ist nach Poincaré

[1]) Entsprechende Formeln gibt Schottky a. a. O. für den von ihm

die Anzahl der reellen Parameter, von welchen die gegebene Transformationsgruppe abhängt, und ebenso gross ist bekanntlich die Anzahl der Moduln, von denen die zu einer Curve gehörigen Abel'schen Integrale abhängen.

Die bekannten bilinearen Relationen für die Periodicitätsmoduln zweier Integrale erster Gattung werden durch Betrachtung des Integrals $\int u_i \, d u_m$ ebenso gewonnen, wie für zwei Integrale dritter Gattung mittelst des Integrals $\int S_{\alpha\beta} \, d S_{\xi\eta}$ in § 4 geschah, und wie es Poincaré an einem Beispiele gezeigt hat.[1])

Die Anzahl der Relationen (48) ist gleich $n(2n-1)$, da die Indices i, n alle von einander verschiedenen Werthe von 1 bis $2n$ annehmen können. Es sind nur p der $2n$ Integrale u_i von einander unabhängig; indem man die übrigen Integrale durch die p ersten ausdrückt, erhält man aus (48) für $i > p$ lineare Relationen, welche die Periodicitätsmoduln dieser übrigen Integrale auf diejenigen der p ersten zurückführen. Für das auf p. 442 behandelte Beispiel findet man leicht, dass P_1 und P_2 Normalintegrale sind, und zwar

P_1 mit den Periodicitätsmoduln $a_{11}, a_{12}, a_{13} = -a_{12} - a_{11}, a_{14} = a_{12} - a_{11}$,
P_2 „ „ „ $a_{21}, a_{22}, a_{23} = -a_{12} - a_{22}, a_{24} = a_{22} - a_{12}$,

wozu noch je $2\pi i$ wegen des Logarithmus hinzutritt. Auch im Falle 1) p. 443 f. werden P_1 und P_3 leicht als Normalintegrale erkannt, bez. mit den Periodicitätsmoduln

$$a_{11} = a_{12}, \; a_{13} = -a_{14} \text{ und } a_{31} = a_{32}, \; a_{33} = -a_{34}.$$

In analoger Weise bleiben überhaupt p^2 Periodicitätsmoduln (von Normalintegralen) übrig, zwischen denen noch $\frac{1}{2} p(p-1)$ Relationen der Form (48) bestehen.

Die vorstehenden Betrachtungen müssen etwas modificirt werden, wenn die Begrenzung des ursprünglichen Kreisbogen-Polygons streckenweise von dem Hauptkreise selbst gebildet

---

behandelten besonderen Fall; die dabei eingeführten Integralfunctionen erster Gattung haben von selbst die Eigenschaften der Normalintegrale.

[1]) Vgl. Acta mathematica Bd. 1, p. 259 ff.

wird, d. h. wenn in der Begrenzung sogenannte Seiten zweiter Art vorkommen und wenn in Folge dessen das ursprüngliche Polygon R_0 zusammen mit seinem „Spiegelbilde (R_0') in Bezug auf den Hauptkreis“ ein einziges in sich zusammenhängendes Polygon bildet, das der weiteren Betrachtung zu Grunde zu legen ist. Wenn das ursprüngliche Polygon R_0 $2n$ Seiten erster Art mit q Cyclen besitzt, so bildet R_0 mit R_0' zusammen ein Polygon mit $4n$ Seiten erster Art und $2q$ Cyclen. Die Anzahl der zu betrachtenden Functionen $P_i = S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$ wäre also zunächst gleich $2n - 2q$. In diesem Falle aber liegen die Punkte $\frac{a_i}{c_i}$ zwar auch alle ausserhalb des Hauptkreises, aber einer liegt im Innern von R_0', und in ihm wird jede der Grössen

$$P_i = S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) = \sum_k \log \frac{a_i - c_i f_k(\xi)}{a_i - c_i f_k(\eta)}$$

unendlich gross, denn unter den singulären Punkten

$$\xi = f_k^{-1}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$$

dieser Function kommen alle Punkte $\frac{a_r}{c_r}$ vor, wenn man von einem $\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$ ausgeht. Als überall endliche Integrale können daher nur die Differenzen $P_i - P_k$ in Betracht kommen, d. h. $2n - 2q - 1$ Functionen; und die Anzahl der zwischen ihnen bestehenden Relationen muss gleich der Hälfte der um eine Einheit vermehrten Zahl sein (wie oben): das Geschlecht, d. i. die Anzahl der von einander unabhängigen Integrale erster Gattung, wird demnach

$$p = n - q,$$

wie es Poincaré seinerseits findet.

Hat man es mit sogenannten Klein'schen Gruppen zu thun, so können weitere Vereinfachungen eintreten, indem man als singuläre Punkte der Integrale erster Gattung die Grenzpunkte

benutzt, um welche sich die Polygon-Seiten unendlich verdichten, und die selbst in keinem Polygon liegen, wie es Schottky in dem von ihm behandelten Falle thut.

§ 7. Die Fuchs'schen Zetafunctionen.

Ist eine lineare Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung in der Form

$$\frac{d^\mu v}{d x^\mu} + \sum_{i=0}^{i=\mu-1} \varphi_i(x, y) \frac{d^i v}{d x^i} = 0 \tag{49}$$

gegeben, wo die Coëfficienten $\varphi_i(x, y)$ rationale Functionen der Argumente x und y bezeichnen, und zwischen letzteren selbst eine algebraische Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{50}$$

erfüllt ist, so kann man nach den Arbeiten von Klein, Poincaré und Schottky diese Coëfficienten $\varphi_i(x, y)$ als eindeutige automorphe Functionen einer Variabeln z darstellen, welche gleich $\frac{w_1}{w_2}$ zu setzen ist, wenn w_1 und w_2 particuläre Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$\frac{d^2 w}{d x^2} = \psi(x, y) \cdot w \tag{51}$$

sind, vorausgesetzt, dass die rationale Function $\psi(x, y)$ passend gewählt wird, nemlich so, dass x und y eindeutige automorphe Functionen von w werden.

Auch die Integrale der Gleichung (49) lassen sich dann als Functionen von z auffassen; und unter gewissen Voraussetzungen über die singulären Stellen der Differentialgleichung (49) sind ihre Integrale durch Potenzreihen nach Potenzen von z darstellbar, welche alle im Einheitskreise convergiren, falls man es so eingerichtet hat, dass der Einheitskreis als Hauptkreis für die durch (51) einzuführenden automorphen Functionen auftritt, wo dann nur Punkte z im Innern des Einheitskreises in Betracht kommen.

Wenn nun z eine lineare Transformation der zu (51) gehörigen Gruppe erleidet, d. h. z durch $f_i(z)$ ersetzt wird, so erleiden die Integrale von (49), die wir Z_i nennen, ebenfalls eine lineare isomorphe Substitution, indem

$$(52) \quad Z_k(f_i(z)) = a_{k1}^{(i)} Z_1(z) + a_{k2}^{(i)} Z_2(z) + \ldots + a_{k\mu}^{(i)} Z_\mu(z),$$
$$k = 1, 2, \ldots \mu; \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Solche Functionen Z bezeichnet Poincaré[1]) als „fonctions zétafuchsiennes" und stellt sie durch Reihen ξ_j dar, die in folgender Weise definirt sind:

$$(53) \qquad \xi_j(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{d f_i(z)}{d z}\right)^m \sum_{k=1}^{k=\mu} A_{jk}^{(i)} H_k(f_i(z)).$$

Hierin bedeutet $f_i(z)$ eine lineare Substitution (wie oben in § 1 ff.); $A_{jk}^{(i)}$ sind die bei Auflösung der Gleichungen (52) auftretenden Coëfficienten; und

$$H_1(z), \; H_2(z) \ldots . \; H_\mu(z)$$

sind μ rationale Functionen von z; der Index j kann die Werthe $1, 2, \ldots . \mu$ annehmen. Die ganze Zahl m muss so gewählt sein, dass die Reihe (53) convergirt. Die Convergenz wird durch Vergleichung mit der Reihe $\sum (f_i')^m$ beurtheilt. Bezeichnet M den grössten absoluten Betrag aller in der Substitutionsgruppe (52) vorkommenden Coëfficienten $a_{kl}^{(i)}$, so muss nach Poincaré

$$2m - 4 > a \log (M\mu)$$

sein, wo a eine gewisse Constante bedeutet, ausserdem $m > 1$, damit die zum Vergleiche benutzte Reihe sicher convergirt.

Da wir nun in § 1 die Convergenz der letzteren Reihe auch für $m = 1$ nachgewiesen haben, so kann die Bedingung (56) durch die günstigere

$$2m - 2 > a \log (M\mu)$$

ersetzt werden, wobei ausserdem $m \geq 1$ sein muss. Insbesondere

---

[1]) Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes, Acta mathematica, Bd. 5, 1884.

kann auch $m=1$ sein, wenn $M\mu < 1$ ist. Diese Voraussetzung soll im Folgenden gemacht werden.

Die Function ξ_j genügt identisch der Bedingung

$$\xi_j(f_r(z)) = (f_r'(z))^{-m} \sum_{k=1}^{\mu} a_{jk}^{(r)} \xi_k(z). \tag{54}$$

Die Anwendung der linearen Transformation $f_r(z)$ auf die Variable z als Argument der Function $\xi_j(z)$ bewirkt also, dass sich letztere linear durch die anderen Functionen $\xi_k(z)$, versehen mit dem Factor $f_r'(z)^{-m}$, ausdrückt. Es ist dies derselbe Factor, welcher zu der in (2) gegebenen Poincaré'schen Θ-Function bei der gleichen Transformation hinzutritt, so dass die μ-Functionen

$$\frac{\xi_1}{\Theta}, \frac{\xi_2}{\Theta}, \ldots\ldots \frac{\xi_\mu}{\Theta} \tag{55}$$

ein System von Functionen Z_k bilden, wie es den Gleichungen (52) genügt; und sie genügen einer Differentialgleichung von der Form (49).

Im Folgenden soll nicht weiter auf den Zusammenhang mit den Differentialgleichungen eingegangen werden; es soll nur gezeigt werden, wie man eine besonders einfache Klasse von Functionen benutzen kann zur Bildung eines Systems von Fuchs'schen Zeta-Functionen.

Wir bilden die Reihe

$$\eta_j(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\mu} A_{kj}^{(i)} \frac{f_k'(\zeta_k)}{z - f_i(\zeta_k)}; \tag{56}$$

dann ist nach der Umformung, welche zu Gleichung (19) führte:

$$\eta_j(f_r(z)) = \sum_i \sum_k A_{kj}^{(i)} \frac{1}{z - f_r^{-1}(f_j(\zeta_k))} \frac{d f_r^{-1}(f_j(\zeta_k))}{d\zeta_k} + \Omega_{jr}$$

wo Ω_{jr} eine von z unabhängige Constante bedeutet, nemlich

$$\Omega_{jr} = \sum_i \sum_k A_{kj}^{(i)} \frac{c_r}{a_r - c_r f_i(\zeta_k)}.$$

Andererseits ist identisch

$$r_i(z) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j^r \sum_{k=1}^{n} A_\varkappa^\mu \frac{1}{z - f_r^{-1}(f_\varkappa(\zeta_k))} \frac{d f_r^{-1}(f_\varkappa(\zeta_k))}{d \zeta_k},$$

denn die rechte Seite dieser Formel unterscheidet sich von der rechten Seite der Gleichung (56) nur dadurch, dass vor der Summation auf die i^{te} Transformation die aufgelöste r^{te} angewandt wurde, was das Resultat nicht beeinflussen kann, da in der Summe alle Transformationen der Gruppe vorkommen. Also folgt:

$$r_i(z) = \sum_{k=1}^{n} a_j^r \, r_i(f_r(z)) - \sum_{k=1}^{n} a_j^r \, \Omega_j$$

oder durch Auflösung

$$r_i(f_r(z)) = \sum_{j=1}^{n} A_j^r \, r_j(z) + A^r \, \Omega_r,$$

wo A^r die Determinante der r^{ten} Substitution (52) bedeutet. Hieraus folgt unmittelbar:

Die Differentialquotienten der r_i-Functionen, welche durch (56) definirt werden, haben die wesentliche Eigenschaft der Poincaré'schen Functionen ζ_j, indem sie den Gleichungen (54) genügen, nemlich:

$$r_j'(f_r(z)) = [f_r'(z)]^{-1} \sum_{\varrho=1}^{n} A_\varrho^r \, r_\varrho'(z).$$

Den Functionen r_i kommen hiernach analoge Eigenschaften zu, wie den Integralfunctionen zweiter Gattung, zu deren Aufstellung die Betrachtung der automorphen Functionen in § 2 Veranlassung gab. Durch Integration nach dem Parameter ζ würden Functionen entstehen, welche den Abel'schen Integralen dritter Gattung analog sind, und deren Periodicitätsmoduln den Integralen erster Gattung entsprechen.

Die Functionen r_{ij} können an Stelle der ζ_j zur Bildung der Fuchs'schen Z-Functionen (55) benutzt werden, wenn auch Θ passend gewählt wird.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis Dezember 1899.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Band XXI. 1899. 8⁰.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations. Year 1896. 1899. Fol.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis za godinu. 1898. 1899. 8⁰.
Rad. Vol. 138. 139. 1899. 8⁰.
Stari pisci hrvatski Tom. 21. 1899. 8⁰.
Zbornik. Band IV, Heft 1.

Kroatisch.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Band I, Heft 3, 4. 1899. 4⁰.

University of the State of New-York in Albany:

New-York State Museum. 49th Annual Report. 1895. Vol. 2. 1898. 4⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde I. Sectie, Deel VI, No. 6, 7; II. Sectie, Deel VI, No. 3—8. 1898—99. 4⁰.
Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde. Jaar 1898/99, Deel VII. 1899. gr. 8⁰.
Jaarboek voor 1898. 1899. gr. 8⁰.
Prijsvers Patris ad filium. 1899. 8⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

32d annual Report. June 1. 1889. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Studies in historical and political Science. Series XVI, No. 10—12; Series XVII, No. 1—5. 1898/99. 8⁰.
Circulars. Vol. XVIII, No. 141. 1899. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. 20, No. 4; Vol. 21, No. 1, 2. 1898/99. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. 19, No. 2—4. 1898⁰.
American Chemical Journal. Vol. 20, No. 8—10; Vol. 21, No. 1—5. 1898/99. 8⁰.

Memoirs from the Biological Laboratory. Vol. IV, 3. 1899. 4⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. IX, No. 93—97.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. VII, No. 4. 1898. 4.

Historischer Verein in Bamberg:

59. Bericht f. d. J. 1898. 1899. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Band 41, 1—6. 1899. 8⁰.
Notulen. Deel 36, afl. 4; Deel 37, afl. 3. 1898/99. 8⁰.
Dagh-Register int Casteel Batavia. Anno 1631—34. 1898. 4⁰.

Kgl. natuurkundige Vereeniging en Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 58. 1898. 8⁰.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Spomenik. No. XXXIV. 1898. Fol.
Godischnijak. XII, 1898. 1899. 8⁰.
Ragusa und das osmanische Reich von Lujo Knez Vojnović. 1. Buch. 1898. 8⁰. (In serb. Sprache.)

Museum in Bergen (Norwegen):

G. O. Sars. An account of the Crustacea of Norway. 1899. 4⁰.
Afhandlinger og Aarsberetning 1899. 8⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1899. No. XXIII—XXXVIII. 4⁰.
Politische Correspondenz Friedrichs des Grossen. Band XXV. 1899. 4⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. Neue Folge. Heft 25 u. 29 in 8⁰; Atlas zu Heft 25 in Fol. 1898/1899.

Archäologische Gesellschaft in Berlin:

59. Programm zum Winckelmannsfeste. 1899. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 32. Jahrg., No. 11—18. 1899. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 51, Heft 1. 2. 1899. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Jahrg. I, No. 9—14. 1899. 4⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie 1899. Register zu Band XII. 8⁰.
Verhandlungen 1899. No. 13—16. 8⁰.

K. technische Hochschule in Berlin:

A. Riedler, Die Technischen Hochschulen und ihre wissenschaftlichen Bestrebungen. 1899. 4⁰.
Chronik der kgl. technischen Hochschule zu Berlin 1799—1899. 1899. 4⁰.
E. Lampe, Die reine Mathematik in den Jahren 1884—1899. 1899. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahresbericht über d. Jahr 1898/99. 1899. 4⁰.
Jahrbuch. Band XIV, 2. 3. 1899. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1898. Freie Hansestadt Bremen. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen i. J. 1898. Bremen 1899. 4⁰.

Bericht über d. Jahr 1898. 1899. 8⁰.
Ergebnisse der magnet. Beobachtungen in Potsdam i. J. 1898. 1899. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Band XXVIII, Heft 1, 2. 1899. 8⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1899, No. 14—24; 1900, No. 1. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Band XII, 2. Leipzig 1899. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band XIV, Heft 7—12. 1899. Fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 19. Jahrg., Heft 7—12. 1899. 4⁰.

Schweizerische naturforschende Gesellschaft in Bern:

Verhandlungen 1897 u. 1898 nebst französischem Auszuge. 1898. 8⁰.

Historischer Verein in Bern:

Archiv. Band XV, Heft 3. 1899. 8⁰.

Gewerbeschule in Bistritz:

XXIII. Jahresbericht für 1887/98. 1898.
XXIV. Jahresbericht für 1898/99. 1899. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. Serie III. Vol. XV, Fasc. 4—6.
„ XVI, „ 1—6. 1898.
„ XVII, „ 1—3. 1899. 4⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1899, 1. Hälfte. 8⁰.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4 u. 8⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 56. Jahrg., 1. Hälfte. 1899. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1899, No. 13—24. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. XXXIV, No. 21—23.
„ XXXV, No. 1—3. 1899. 8⁰.

Public Library in Boston:

47th annual Report for 1899. 8⁰.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 28, No. 13—16. 1899. 8⁰.
Memoirs. Vol. V, No. 4, 5. 1899. 4⁰.

Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig:

11. Jahresbericht 1897/98 u. 1898/99. 1899. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Band XVI, 2. 1899. 8⁰.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:

76. Jahresbericht. 1898. 1899. 8⁰.

Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. 3. Jahrg., Heft 3, 4. 1899. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnées. Tom. 15, Fasc. 4. 1899. 8⁰.
Bulletin. IV. Série. Tom. XIII, No. 6—10. 1899. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires Tom. 53. 1898. 4⁰.
Mémoires couronnées in 4⁰. Tom. 55 u. 56. 1898. 4⁰.
Mémoires couronnées in 8⁰. Tom. 48, Vol. 2; 55 et 57. 1898. 8⁰.
Tables générales des Mémoires. 1772—1897. 1898. 8⁰.
Bulletin. a) Classe des Lettres 1899, No. 6—10; b) Classe des Sciences 1899, No. 6—10. 8⁰.
Collection des Chroniques belges. a) Chartes de l'Abbaye de St. Martin de Tournai. Tome 1. b) Cartulaire de l'église St. Lambert de Liège. Tome 3. 1898. 8⁰.
Biographie nationale. Tome XIV, 2, XV, 1. 1897—98. 8⁰.
Inventaire des Cartulaires conservés en Belgique. 1897. 8⁰.
Commentario del Coronel Francisco Verdugo de la guerra de Frisa, publié par Henri Lonchay. 1897. 8⁰.
Edouard Poncelet, Le livre des fiefs de l'église de Liège. 1898. 8⁰.
Charles Duvivier, Actes et documents anciens intéressant la Belgique. 1898. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome 18, 3, 4. 1899. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tome X, Fasc. 4. 1899. 8⁰.

Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:

Bulletin. 1899, p. XXXIII—XCVI.
Annales. Tome 32. 1897, 1899. 8⁰.

Observatoire Royale in Brüssel:

Bulletin mensuel de magnetisme terrestre. Januar—März, Mai—August 1899. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Almanach. 1899. 8⁰.
Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftl. Mittheilungen.) Band 28, Heft 3, 4. Band 29, Heft 1, 2. 1898—99. 8⁰.
Történettud. Ertekezések. (Historische Abhandlungen.) Band 17, Heft 9, 10; Band 18, Heft 1—6. 1898—99. 8⁰.
Monumenta Comitiorum Hungariae. Vol. XI. 1899. 8⁰.
Monumenta Comitiorum Transylvaniae. Vol. XXI. 1899. 8⁰.
Archaeologiai Értesitö. Neue Folge. Band 18, Heft 4, 5; Band 19, Heft 1, 2. 1898/99. 4⁰.
Tarsadalmi Értekezések. (Staatswissensch. Abhandlungen.) Band 12, Heft 3. 1899. 8⁰.
Nyelvtudomán. Értekezések. (Sprachwissenschaftl. Abhandlungen.) Band 17, Heft 1, 2. 1898—99. 8⁰.
Monumenta Hungariae historica. Sectio I, Vol. 30. 1899. 8⁰.

Mathematikai Ertesitö. (Mathemat. Anzeiger.) Band 16, Heft 3—5; Band 17, Heft 1, 2. 1898/99. 8⁰.
Mathematikai Közlemények. (Mathem. Mittheilungen.) Band 27, Heft 3. 1899. 8⁰.
Mathematische und naturwissensch. Berichte aus Ungarn. Band 15. 1899. 8⁰.
Rapport. 1898. 1899. 8⁰.
Beschreibender Katalog der ethnographischen Sammlung Ludwig Birós. 1899. 4⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Comunicaciones. Tomo I, No. 3, 4. 1899. 8⁰.
Anales. Tomo VI. 1899. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

E. de Wildeman, Prodrome de la Flore Algologique des Indes Néerlandaises. Batavia 1899. 8⁰.
Mededeelingen. No. XXXI—XXXV. Batavia 1899. 4⁰.
Verslag over het jaar 1898. Batavia 1899. gr. 8⁰.
Bulletin No. I, II. 1898. 4⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Publicatiunila. I—IV. 1899. 4⁰.
Publicatiunila. Octobre. 1899. 8⁰.
Analele. Ser. II. Tome 20. 1897/98 in 3 Voll. 1899. 4⁰.
Tome 21. Partea administrativa. 1899. 4⁰.
D. Brandza, Flora Dobrogei. 1898. 8⁰.
Sim. Fl. Marian Sĕrbătorile la Romanĭ. 2 Voll. 1898. 8⁰.
Basarabia in sec. XIX. de Zamfir C. Arbure. 1899. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1899. February—July and Annual Summary 1898. 1899. Fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. VI, part 5; Vol. X, part 3, 4; Vol. XI, part 1. Simla 1899. Fol.
Report on the Administration. 1898/99. Fol.
Memorandum on the snowfall of 1899. Simla 1899. Fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser., No. 931—948, 951—955. 1898—99 in 4⁰ und 8⁰.
Journal. No. 377—379, 381 and Extra-Number 1. 1899. 8⁰.
Proceedings. No. IV—VII (April—July). 1899. 8⁰.
Catalogue of printed Books and Manuscripts in Sanskrit in the Library of the Asiatic Society of Bengal. Fasc. I. 1899. 4.

Geological Survey of India in Calcutta:

General-Raport 1898—99. 1899. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass:

Bulletin. Band 32, No. 10; Band 33, 34; Band 35, No. 1—7. 1899. 8⁰.
Annual Report for 1898—99. 1899. 8⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

Annals. Vol. 23, part. 2. 1899. 8⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. X, part 3. 1899. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bullettino mensile. Nuova Ser., Fasc. 59, Aprile 1899. 8⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt i. J. 1898. Berlin 1899. 4⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Jahrbuch 1896. Jahrg. XIV, Abth. III; 1897, Jahrg. XV, Abth. I, II. 1898/99. 4⁰.

Academy of sciences in Chicago:

40th annual Report for the year 1897. 1898. 8⁰.
Bulletin. No. 2. 1897. 8⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 30—39. 1899. 8⁰.
The Birds of Eastern North America. Water Birds. Part I. By Charles B. Cory. 1899. 4⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. 10, No. 1. 1899. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. Vol. XIII, No. 7—11. 1899. 8⁰.

University of Chicago:

Bulletin. No. 6—10. 1899. 8⁰.
Zeitschrift „The Astrophysical Journal". Vol. X, No. 1—5. 1899. gr. 8⁰.

Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Forhandlinger 1898, No. 6. 1899, No. 1. 8⁰.
Skrifter. I. Mathem. Klasse 1898, No. 11, 12. 1899, No. 2—4; 6—7. II. Histor.-filos. Klasse 1898, No. 1, 6, 7. 1899, No. 1—4. 4⁰.
Oversigt 1898. 1899. 8⁰.
Schriften aus d. J. 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:

XXVIII. Jahresbericht. Jahrg. 1898. 1899. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. Neue Folge. Band 42. 1898/99. 1899. 8⁰.

Observatory in Cincinnati:

Publications. No. 14. 1898. 4⁰.

Academia nacional de ciencias in Cordoba (Republ. Argent.):

Boletin. Tomo XVI, 1. Buenos Aires 1899. 8⁰.

Franz-Josephs-Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Semester 1899/1900. 1899. 8⁰.
Uebersicht der akademischen Behörden i. J. 1899/1900. 1899. 8⁰.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Zeitschrift. Heft 41. 1900. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. 20, trimestre 2, 3. 1899. 8⁰.

K. sächsischer Alterthumsverein in Dresden:

Die Sammlung des k. sächs. Alterthumsvereins zu Dresden. Lief. II, III. 1899. 4⁰.

Jahresbericht 1898/99. 1899. 8⁰.
Neues Archiv für sächsische Geschichte 20. Band. 1899. 8⁰.

Generaldirektion der kgl. Sammlungen in Dresden:
Bericht während der Jahre 1896 u. 1897. 1898. Fol.

Royal Irish Academy in Dublin:
Proceedings. Ser. III, Vol. 5, No. 3. 1899. 8⁰.

Pollichia in Dürkheim:
Mittheilungen. Pollichia. 56. Jahrg. 1898. No. 12. 8⁰.

American Chemical Societx in Easton, Pa.:
The Journal. Vol. 21, No. 7—12. 1899. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:
Proceedings. Vol. XXII, part 441—536. 1899. 8⁰.

Geological Society in Edinburgh:
Transactions. Vol. VII, part 4. 1899. 8⁰.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:
Mansfelder Blätter. XIII. Jahrg. 1899. 8⁰.

Gesellschaft f. bildende Kunst u. vaterländische Alterthümer in Emden:
Jahrbuch. Band XIII. Heft 1, 2. 1899. 8⁰.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:
Jahrbücher. N. F. Heft XXV. 1899. 8⁰.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:
Schriften aus d. J. 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:
Atti. IV. Serie, Vol. XXII. 2. 1899. 8⁰.

Società Asiatica Italiana in Florenz:
Giornale. Vol. XII. 1899. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:
Abhandlungen. Band XXI, 4. 1899. 4⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:
Jahresbericht für 1897/98. 1899. 8⁰.
Walter König, Göthes optische Studien. 1899. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:
Helios. Band 16. Berlin 1899. 8⁰.
Societatum Litterae. Jahrg. XII, 5—12. 1898. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:
„Schau-ins-Land." Jahrlauf 26. 1899. Fol.

Kirchlich-historischer Verein in Freiburg i. Br.:
Freiburger Diöcesan-Archiv. 27. Band. 1899. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Freiburg i. Br.:
Schriften a. d. J. 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:
Index lectionum. Discours prononcé à l'occasion de l'inauguration des cours de l'année 1899—1900. 1899. 8⁰.
Collectanea Friburgensia. Fasc. VIII. 1899. 4⁰.
Behörden, Lehrer und Studirende. Winter-Semester 1899—1900. 1899. 8⁰.

Bibliothèque publique in Genf:

Compte-rendu pour l'année 1898. 1899. 8⁰.

Observatoire in Genf:

Resumé météorologique de l'année 1897 et 1898. 1898/99. 8⁰.

Universität in Genf:

Schriften aus d. J. 1898/99.

Museo civico di storia naturale in Genua:

Annali. Serie II, Vol. 19. 1899. 8⁰.

Universität in Giessen:

Schriften aus d. J. 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1899, No. VII—X. Berlin 1899. 4⁰.
Nachrichten 1) Philol.-histor. Klasse 1899. Heft 2, 3. 4⁰.
2) Mathem.-phys. Klasse 1899. Heft 2. 4⁰.
Geschäftliche Mittheilungen 1899. Heft 1. 4⁰.
Abhandlungen. Philol.-histor. Klasse. Neue Folge. Band III, No. 1. Berlin 1899. 4⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. IX, No. 2—4. 1899. 8⁰.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. XI, No. 4—8. 1898—99. 8⁰.

Universität in Graz:

Verzeichniss der Vorlesungen 1899/1900, 1899. 4⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Heft 46. 1898. 8⁰.
Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 29. Jahrgang. 1898. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Jahrg. 1898. 1899. 8⁰.

Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:

Th. Pyl, Nachträge zur Geschichte der Greifswalder Kirchen. 1900. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks, Deel VI, aflev. 3 und 4. 1899. 8⁰.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Sér. II, Vol. VI, partie 3. 1899. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Sér. II, Tom. 3, livre 1 u. 2. La Haye. 1899. 8⁰.
Oeuvres complètes de Christian Huygens. Vol. VIII. La Haye. 1899. 4⁰.

K. K. Obergymnasium zu Hall in Tyrol:

Programm für das Jahr 1898/99. Innsbruck 1899. 8⁰.

Kaiserlich. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 35, No. 6—11. 1899. 4⁰.
Nova Acta. Tom. 72, 74. 1899. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 53, Heft 2, 3 u. Register zu Band 41—50. Leipzig 1899. 8⁰.

Abhandlungen zur Kunde des Morgenlandes. Band XI, No. 2. Leipzig 1899. 8⁰.

Universität Halle:

Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Semester 1899/1900. 1899. 8⁰.

Schriften aus d. J. 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 72, Heft 1, 2. Stuttgart 1899. 8⁰.

Thüring.-Sächs. Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:

Neue Mittheilungen. Band 20, Heft 1, 2. 1899. 8⁰.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Schriften der Hamburgischen wissenschaftl. Anstalten für 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

Sternwarte in Hamburg:

Mittheilungen No. 1—5. 1895—99. 8⁰.

Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde in Hanau:

Bericht 1895/99. 1899. 8⁰

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrgang 1899. 8⁰.

Universität Heidelberg:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. IX, Heft 1. 1899. 8⁰.

Naturhistorisch-medicinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Band VI, Heft 2. 1899. 8⁰.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:

Bulletin. No. 6, 8. 1898/99. 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Acta societatis scientiarum Fennicae. Vol. XXIV. 1899. 4⁰.

Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 57. 1898. 8⁰.

Société de géographie de Finlande in Helsingfors:

Atlas de Finlande. 1899. Fol.

Fennia. Vol. XIV, XV, XVII. 1899. 8⁰.

Universität Helsingfors:

Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F., Band 29, Heft 1. 1899. 8⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mittheilungen. 48. Band. Jahrg. 1898. 1899. 8⁰.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeksunde in Hildburghausen:

Schriften. Heft 32, 33. 1899. 8⁰.

Voigtländischer Alterthumsverein in Hohenleuben:

67. u. 69. Jahresbericht. 1899. 8⁰.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 26. Jahrg. 1899. 8⁰.

Historischer Verein in Ingolstadt:

Sammelblatt. XXIII. Heft. 1898. 8⁰.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge. Heft 43. 1899. 8⁰.

Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. 24. Jahrg. 1897/98 u. 1898/99. 1899. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 3, No. 5–8. 1899. 8⁰.

Ostsibirische Abtheilung der Kaiserlich russischen Geographischen Gesellschaft in Irkutsk:

Iswestija. Tom. 30, No. 1. 1899. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Band IV, Lieferung 2. Text und Atlas.
Band VI, Lieferung 2. Text und Atlas.
Band VII, Lieferung 2. Text und Atlas. 1898. Fol.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Register zu Band 1—10. 1899. 8⁰.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte 1898. Dorpat 1899. 8⁰.

Verhandlungen. Band XX, 1. Dorpat 1899. 8⁰.

Centralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:

Jahresbericht des Centralbureaus für das Jahr 1898. 1899. 4⁰.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:

Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

Grossh. badische Staats-Alterthümersammlung in Karlsruhe:

Veröffentlichungen der grossh. badischen Sammlungen. 2. Heft. 1899. 4⁰.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Band 66, No. 5—6. 1899. 8⁰.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:

Zeitschrift. N. F. Band XXIV, 1. Hälfte. 1899. 8⁰.

Mittheilungen. Jahrgang 1898. 1899. 8⁰.

Quartalblätter 1895. 4. Vierteljahrsheft u. Register zu 1891/95. 1899. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Kassel:

Abhandlungen und Bericht XLIII. 1899. 8⁰.

Société mathématique in Kharkow:

Communications. 2ᵉ Série, Tome VI. No. 5, 6. 1899. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:

Sapiski (Annales) 1899. Band 4. 1899. 8⁰.

Annales 1899. Heft 2. u. 3. 8⁰.

F. A. Maslow, Eine Dissertation in russ. Sprache. 1899. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Register zu Band 1—20. 1899. 8⁰.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Band III, IV. 1899. 4⁰.

Sternwarte in Kiel:

Publikation X. Leipzig 1899. 4⁰.

K. Universität in Kiel:

Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4° und 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:

Schriften. Band XI, Heft 2. 1898. 8°.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der Universität in Kiew:

Schurnal. Vol. XXXI, 7. 1899. 8°.

Universität in Kiew:

Iswestija. Vol. 39, No. 3, 4, 6—8. 1899. 8°.

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht für 1898. 1899. 8°.
Carinthia I. 89. Jahrg. No. 1—6. 1899. 8°.

Stadtarchiv in Köln:

Mittheilungen. 29. Heft. 1899. 8°.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4° u. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1899. No. 2—5. 8°.
Skrifter. 6. Raekke, Naturvid. Afd. IX, 3. 1899. 4°.
Mémoires. a) Sections des Lettres. Tome 4, No. 6.
b) Sections des Sciences. Tome 9, No. 1, 2. Tome X, No. 1. 1899/1900. 4°.
Regesta diplomatica historiae Danicae. Series II, Tome II, 4. 1808/28. 1898. 4°.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger, II. Raekke. 14. Band, Heft 2, 3. 1899. 8°.
Mémoires. Nouv. Sér. 1898. 1899. 8°.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Sofus Elvius, Bryllupper og Dödsfeld i Danmark 1898. 1899. 8°.
Bitrag til Frederiksborg Latinskoles historie af G. J. L. Feilberg og Sofus Elvius. Hilleröd. 1899. 8°.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. 1899. Juni, Juli. 8°.
Biblioteka pisarzow polskich. No. 36. 1899. 8°.
Atlas geologiczny Galicyi. Liefrg. X. 1899. Fol.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série, Vol. 35, No. 132. 1899. 8°.
Observations météorologiques. Année 1898, XIIe année. 1899. 8°.

Kansas Academy of Science in Lawrence, Kansas:

Transactions. Vol. XVI. Topeka 1899. 8°.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

The Kansas University Quarterly. Vol. VIII, 2, 3. 1899. 8°.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie, Deel XIII, aflev. 2, 3. 1899. 8°.
D. C. Hesseling, Het Afrikaansch. 1899. 8°.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe, II. Serie, Theil XVII, Heft 1. 2. 1899. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Band XVIII, No. 5. 1899. 4°.

Abhandlungen der math.-phys. Classe. Band XXV, No. 3—5. 1899. 4°.
Berichte der philol.-hist. Classe. Band 51, No. II, III. 1899. 8°.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Band 51. Mathematischer Theil. No. IV, V. 1899. 8°.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Band 60, Heft 1—8. 1899. 8°.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Band 4. 1899. 8°.

Verein für Geschichte des Bodensees in Lindau:

Der „Bodensee-Forschungen" X. Abschnitt. 1899. 4°.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

57. Jahresbericht. 1899. 8°.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletin. 16ª Serie, No. 11. 1897. 8°.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XVI, 2. 1899. 4°.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. 15, part 3. 1899. 8°.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. 14, No. 45, 46. 1899. 8°.

Royal Society in London:

Year-book 1899. 8°.
Proceedings. Vol. 65, No. 416—421. 1899. 8°.
Philosophical Transactions. Series A. Vol. 191; Series B. Vol. 190. 1898. 4°.
List of Members. 30th Nov. 1898. 4°.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 59, No. 9, 10; Vol. 60, No. 1. 1899. 8°.
Memoirs. Vol. 52. 53. 1899. 8°.

Chemical Society in London:

Journal No. 441—446 (August 1899 — Januar 1900). 8°.
Proceedings. Vol. 15, No. 213—216. 1899. 8°.

Linnean Society in London:

Proceedings. Nov. 1897 to June 1898. Oct. 1899. 1898/99. 8°.
The Journal. a) Zoology. Vol. 26, No. 172; Vol. 27, No. 173—176, 178.
b) Botany. Vol. 33, No. 234; Vol. 34, No. 235—39. 1898/99. 8°.
The Transactions. a) Zoology. 2d Series. Vol. VII, part 5—8.
b) Botany. 2d Series. Vol. V, part 9, 10. 1899. 4°.
List 1898/99. 8°.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 82. 1899. 8°.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1899, part 4—6. 8°.

Zoological Society in London:

Proceedings. Vol. 1899, part 2. 3. 8°.
Transactions. Vol. XV, 3. 4. 1899. 4°.
A List of the Fellows. 1899. 8°.

Zeitschrift „Nature“ in London:
Nature. No. 1549—1574. 1899. 4°.

Academy of Science in St. Louis:
Transactions. Vol. VIII, No. 8—12; Vol. IX, No. 1—5, 7. 1899. 8°.

Missouri Botanical Garden in St. Louis:
10th annual Report. 1899. 8°.

Société géologique de Belgique in Lüttich:
Annales. Tome XXVI, 3. 1899. 8°.

Société Royale des Sciences in Lüttich:
Mémoires. Série III, Tome 1. Bruxelles 1899. 8°.

Section historique de l'Institut Royal Grand-Ducal in Luxemburg:
Publications. Vol. 46, 47, 49. 1898/1900. 8°.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:
Der Geschichtsfreund. Band 54. Stans 1899. 8°.

Université in Lyon:
Annales. Nouv. Série. I. Sciences, Médecine Fasc. 1, 2.
II. Droit, Lettres Fasc. 1, 2. Paris 1899. 8°.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:
Transactions. Vol. XII, 1. 1898. 8°.

The Government Observatory in Madras:
Report 1898/99. 1899. Fol.

R. Academia de la historia in Madrid:
Boletin. Tomo 35, cuad. 1—6. 1899. 8°.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:
Atti. Vol. 38, Fasc. 3. 1899. 8°.

Società Storica Lombarda in Mailand:
Archivio Storico Lombardo. Serie III, anno XXVI, Fasc. 22, 23. 1898. 8°.

Literary and philosophical Society in Manchester:
Memoirs and Proceedings. Vol. 43, part 4. 1899. 8°.

Universität in Marburg:
Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4° u. 8°.

Royale Society of Victoria in Melbourne:
Proceedings. Vol. XI, part 2. 1899. 8°.

Rivista di Storia Antica in Messina:
Rivista. Anno IV, Fasc. 3. 1899. 8°.

Académie in Metz:
Mémoires. Année 78. 1896/97. 1899. 8°.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:
Jahrbuch. X. Jahrgang 1898. 4°.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:
Boletin mensual. 1899, Febrero—Junio. 4°.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate“ in Mexico:
Memorias y Revista. Tomo XII, No. 4—10. 1899. 8°.

Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena:
Memorie. Serie III, Vol. 1. 1898. 4°.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Ser. III, Vol 16, Año 31, Fasc. 3. 1899. 8⁰.

Numismatic and Antiquarian Society of Montreal:

The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal. 3d Series. Vol. II. No 1. 1899. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Nouveaux Mémoires. Tome XVI, 2. 1899. gr. 4⁰.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matemat. Ibornik XX, 3. 1898. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 30. Jahrgang 1899, No. 7—9. 4⁰.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Preissverzeichniss der Zeitungen und Zeitschriften für 1900. I. und II. Abthlg. mit Nachträgen für 1899 und 1900. Fol.

Geographische Gesellschaft in München:

Aventins Karte von Bayern MDXXIII, hrsg. v. Hartmann. 1899. Fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Winter-Semester 1899/1900. 1899. 8⁰.
Bericht für das Jahr 1898/99. 1899. 4⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1899, No. 17—28. 8⁰.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1899 in 4⁰ und 8⁰.
Amtliches Verzeichniss des Personals. Winter-Semester 1899/1900.
Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Semester 1899/1900.
Jos. Bach, Ueber das Verhältniss von Arbeit und Bildung. 1899. 4⁰.

Historischer Verein in München:

Altbayerische Monatsschrift. Jahrg. I, Heft 3—6. 1899. 4⁰.

Landtags-Archivariat in München:

Die Verfassungsurkunde des Königreichs Bayern mit den hierauf bezüglichen Gesetzen. 1899. 8⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. 1899, No. 106—111. 4⁰.

Ausschuss der 71. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in München:

Festschrift, Die Entwickelung Münchens etc. 1899. 4⁰.

K. bayer. meteorologische Zentralstation in München:

Beobachtungen der meteorologischen Stationen des Königreichs Bayern. Jahrgang 20, No. 2, 3. 1899. 4⁰.

Reale Accademia di scienze morali e politiche in Neapel:

Atti. Vol. 30. 1899. 8⁰.
Rendiconto. Anno 37. 1898. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Serie 3, Vol. 5, Fasc. 6, 7. 1899. 8⁰.

Historischer Verein in Neuburg a. D.:

Neuburger Kollektaneen-Blatt. 62. Jahrgang. 1898. 8⁰.

Connecticut Academy of Arts and Sciences in New-Haven:
Transactions. Vol. X, part 1. 1899. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:
Journal. IV. Serie, Vol. 8, No. 43—48. 1899. 8⁰.

Observatory of the Yale University in New-Haven:
Report for the year 1898/99. 1899. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:
Annals. Vol. XI, part 3, 1898; Vol. XII, part 1. 1899. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:
Annual Report for the year 1898. 1899. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:
Bulletin. Vol. XXXI, No. 3, 4. 1899. 8⁰.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:
American Journal of Archaeology. Vol. III, No. 2, 3. 1899. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:
Abhandlungen. Band XII. 1899. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:
Sapiski. Tom. 22, Heft 2. 1898. 8⁰.
Sapiski (mathemat. Abthlg.). Tom. 16 u. 19. 1899. 8⁰.

Historischer Verein in Osnabrück:
Osnabrücker Urkundenbuch. Band III, Heft 2, 3. 1899. gr. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:
Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. I, part 1 u. 5. Ottawa 1885/98. 8⁰.

Royal Society of Canada in Ottawa:
Proceedings and Transactions. II[d] Series, Vol. 4. 1898. 8⁰.

Radcliffe Observatory in Oxford:
Observations, 1890/91. Vol. 47. 1899. 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:
Bullettino. Tomo VI, 4. 1899. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:
Rendiconti. Tomo 13, Fasc. 5, 6. 1899. 8⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:
Atti. Anno 1899. Gennajo — Giugno. 1899. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:
Bulletin. 1899, No. 27—45. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:
Comptes rendus. Tome 129, No. 1—26; Tome 130, No. 1. 1899. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:
Travaux et Mémoires. Tome IX. 1898. 4⁰.

Ministère de la Justice in Paris:
Le Bhâgavata Purâna. Tome V. 1898. Fol.

Moniteur Scientifique in Paris:
Moniteur. Livre 692—696, (Août — Déc.) 1899; 697 (Janvier 1900). 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Série. Tome IX, Fasc. 6; Tome X, Fasc. 1. 1898. 8⁰.

Société des études historiques in Paris:

Revue. 65ᵉ année. Nouv. Sér., Tome 1. Août, Sept., Déc. 1899, Janvier 1900. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus. 1899. No. 5, 6. 8⁰.
Bulletin. VIIᵉ Série, Tome 20, 2ᵉ et 3ᵉ trimestre 1899; Tome 18, 4ᵉ trimestre 1897. 1899. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 27, Fasc. 2, 3. 1899. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Byzantina Chronika. Tom. 6, Heft 1, 2. 1899. 8⁰.
Mémoires. a) Classe historico-phil. Série VIII, Tome III, 3—5.
b) Classe physico-mathém. Série VIII, Tome VII, 4; VIII, 1—5. 1898/99. 4⁰.
Bulletin. V. Série, Tome VIII, 5; IX, 1—5; X, 1—4. 1898/99. 4⁰.
Annuaire du Musée zoologique 1899. No. 1—3. 1899. 8⁰.

Kais. botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. XV, 2. 1898. 8⁰.
Historischer Abriss des kais. botan. Gartens 1873/98. 1899. 8⁰. (In russ. Sprache.)

Kais. Russische archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:

Sapiski. Tom. 9, No. 1, 2; Tom. X, No. 1, 2. 1897/98. 4⁰.
Trudy. (Orientalische Abtheilung.) Band XXII. 1898. 4⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie, Band 36, Lfg. 2; Band 37, Lfg. 1. 1899. 8⁰.
Materialien zur Geologie Russlands. Band XIX. 1899. 8⁰.

Physikalisch-chemische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 31, No. 5, 6. 1899. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Obosrenie 1899/1900. 1899. 8⁰.
Schriften aus d. J. 1898/99.

Nicolai-Hauptsternwarte in St. Petersburg:

Die Odessaer Abtheilung der Nicolai-Hauptsternwarte. 1899. 4⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Catalogue of duplicate books and pamphlets. 1899. 8⁰.
Journal. II. Series, Vol. XI, part 2. 1899. Fol.
Proceedings. 1899, part 1. 1899. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 22, No. 4; 23, No. 1—3. 1899. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 35, No. 7—12. 1899. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 38, No. 159. 1899. 8⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Serie IV, Tomo 10, Giugno—Ottobre. 1899. 8⁰.

Centralbureau der internationalen Erdmessung in Potsdam:

Verhandlungen der 1898 in Stuttgart abgehaltenen XII. allgemeinen Conferenz. Berlin 1899. 4⁰.

A. Ferrero, Rapport sur les triangulations. Florence 1899. 4⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:

Jahresbericht 1898/99. 1899. 8⁰.

Böhmische Kaiser Franz-Joseph-Akademie in Prag:

Rozprawy. Třída II. Ročník VII. 1898. 8⁰.
Historický Archiv. Číslo 13—15. 1898/99. 8⁰.
Věstník. Ročník VII. No. 1—9. 1898. 8⁰.
Bulletin international. No. 5 (2 Hefte). 1898. 8⁰.
Almanach. Ročník VIII. Almanach. Ročnik IX. 1899. 8⁰.
Památík na jubilea Františka Josefa I. 1848—1898. 1898. 4⁰.
Památík na oslavu Františka Palackého. 1898. 8⁰.
Spisy Jana, Amosa Komenského Číslo I (Schlussheft). 1898. 8⁰.
Repertorium literatury geologické. Díl I. 1898. 8⁰.
Sbírka pramenu etc. II, 4. 1898. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Rob. v. Weinzierl, Das La Tène-Grabfeld von Langugest in Böhmen. Braunschweig 1899. 4⁰.
Die deutsche Karl-Ferdinands-Universität in Prag. 1899. 4⁰.
J. E. Hirsch, Geologische Karte des böhmischen Mittelgebirges. Blatt II. Wien 1899. 8⁰.
Rich. Batka, Altnordische Stoffe und Studien in Deutschland. Abschnitt II (Sep.-Abdr.). Wien 1899. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht über das Jahr 1898. 1899. 8⁰.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Personalstand 1899/1900. 1899. 8⁰.
Ordnung der Vorlesungen. Winter-Semester 1899/1900. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mittheilungen. Jahrgang 37, Heft 1—4. 1898/89. 8⁰.

Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:

Közleményei. Neue Folge, Heft 10. 1899. 8⁰.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. Register zu Band 1—40. 1892. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario 1899. 8⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V. Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. 8. 1⁰ semestre, Fasc. 12; 2⁰ semestre, Fasc. 1—12. 1899. 4⁰.
Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Vol. 7, parte 2. Notizie degli scavi 1899. Febraio — Luglio 1899. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. VIII, Fasc. 5—8. 1899. 4⁰.
Rendiconto dell' adunanza solenne del 4 Giugno 1899. 1899. 4⁰.

Biblioteca Apostolica Vaticana in Rom:

Studi e documenti di storia e diritto. Anno XIV—XIX. 1897/98. 4⁰.

I Codici Capponiani della Biblioteca Vaticana da Gius Salvo-Cozzo. 1897. 4°.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1898, No. 4; 1899, No. 1—3. 8°.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 52, Sessione 5—7. 1899. 4°.

Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:

Mittheilungen. Band XIV, 2. 1899. 8°.

Kgl. italienische Regierung in Rom:

Opere di Galilei. Vol. IX. Firenze 1899. 4°.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XXII, Fasc. 1, 2. 1899. 8°.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4° und 8°.

Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte in Rotterdam:

Catalogus van de Bibliotheek. 1899. 8°.

R. Accademia degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 5, Fasc. 2. 1899. 8°.

Essex Institute in Salem:

Bulletin. Vol. 28, No. 7—12; Vol. 29, No. 7—12; Vol. 30, No. 1—12. 1896/98. 8°.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mittheilungen. 39. Vereinsjahr. 1899. 8°.

K. K. Staatsgymnasium in Salzburg:

Programm für das Jahr 1898/99. 1899. 8°.

Historischer Verein in St. Gallen:

Joh. Dierauer, Die Stadt St. Gallen im Jahre 1798. 1899. 4°.
Urkundenbuch der Abtei St. Gallen. Theil IV, Liefg. 5; 1402—11. 1899. 4°.
Joh. Häne, Der Auflauf zu St. Gallen i. J. 1491. 1899. 8°.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Anales. Sección 1ª. Observationes astronómicas Año 1893. Seccion 2ª, Anno 1898. 1899. Fol.
Almanaque náutico para 1901. 1899. 4°.

Californio Academy of Sciences in San Francisco:

Occasional Papers VI. 1899. 8°.
Proceedings. III^{d} Series. a) Zoology. Vol. 1, No. 11, 12. b) Botany. Vol. 1, No. 6—9. c) Geology. Vol. 1, No. 5—6. 1899. 4°.

Bosnisch-Herzegovinisches Landesmuseum in Sarajevo:

Wissenschaftl. Mittheilungen. Band VI. Wien 1899. 4°.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresberichte. 64. Jahrg. 1899. 8°.
Mecklenburgisches Urkundenbuch. Band XIX. 1899. 4°.

China Branch of the R. Asiatic Society in Shangai:

Journal. N. S., Vol. 30. 1895/96. 1899. 8°.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:
Bullettino di Archeologia. Anno 1899. No. 5—10. Mai—Oct. 8⁰.

K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:
Antiquarisk Tidskrift för Sverige. Band XIV, Heft 1. 1899. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:
Handlingar. N. F., Band 31. 1898/99. 4⁰.
Bihang til Handlingar. Band XXIV, afd. 1—4. 1899. 8⁰.

K. öffentliche Bibliothek in Stockholm:
Accessions-Katalog 1898. 1899. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:
Förhandlingar. Band 21, Heft 5, 6. 1899. 8⁰.

Institut Roal géologique in Stockholm:
Sveriges geologiska undersökning. Series Aa, No. 114; Ac, No. 34; Ba, No. 5; C, No. 162, 176—179, 181, 182. 1896/99. 4⁰ u. 8⁰.

Nordiska Museet in Stockholm:
Bidrag till Vår Odlings Häfder. No. 6, 7. 1899. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:
Monatsbericht. Tome 33, Fasc. 6—9 (Juni—Okt.). 1899. 8⁰.

Kais. Universitäts-Sternwarte in Strassburg:
Annalen. Band II. Karlsruhe 1899. 4⁰.

Kais. Universität Strassburg:
Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:
Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F. Jahrg. VIII, Heft 1—4. 1899. 8⁰.

K. Württemberg. statistisches Landesamt in Stuttgart:
Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landesgeschichte. Jahrg. 1898. Theil I, II und Ergänzungsband I. 1898/99. 4⁰.

Australasian Association for the advancement of science in Sydney:
Report of the 7th Meeting at Sydney 1898. 8⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:
Journal and Proceedings. Vol. XXXII. 1898. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:
Annual Report for the year 1898. 1899. Fol.
Records of the Geological Survey of New-South-Wales. Vol. VI, part 3. 1899. 4⁰.
Mineral Resources. No. VI. 1899. 8⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:
Boletín. Tomo 2, No. 5. 1899. Fol.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:
Mittheilungen. Band VII, Heft 2. 1899. 8⁰.

Kaiserliche Universität Tokyo (Japan):
The Journal of the College of Science. Vol. XI, part 3. 1899. 4⁰.

Canadian Institute in Toronto:
Proceedings. New Ser., Vol. 2, part 2. 1899. 4⁰.

University of Toronto:

Studies. History, 1st Series, Vol. 3. 1898. 8°.

Faculté des sciences in Toulose:

Annales. II. Série, Tome I, Fasc. 1. 1899. 4°.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XIV, Fasc. 2. 1899. 8°.

Kaiser Franz-Josef-Museum für Kunst und Gewerbe in Troppau:

Jahresbericht 1898. 1899. 8°.

Universität Tübingen:

Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4° und 8°.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 34, disp. 11—15. 1899. 8°.
Osservazioni meteorologiche 1898. 1899. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Ser. III, Vol. 18, Fasc. 1. 1899. 4°.

K. Universität in Upsala:

Eranos. Acta philologica Suecana. Vol. 3, No. 2—3. 1899. 8°.
Schriften der Universität aus d. J. 1898/99 in 4° u. 8°.

Redaction der Prace matematyczno-fizyczne in Warschau:

Prace matemat.-fizyczne. Tom. X. 1899—1900. 4°.

American Academy of Arts and Sciences in Washington:

Proceedings. Vol. 34, No. 15—20. 1899. 8°.

Volta-Bureau in Washington:

Marriages of the Deaf in America, by Edw. Allen Fay. 1898. 8°.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

North American Fauna, No. 15. 1899. 8°.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Annual Report for the year 1897. Parts 1 und 2. 1898. 4°.
Bulletin No. 37—39. 1899. 4°.

Smithsonian Institution in Washington:

Smithsonian Miscellaneous Collections, No. 1171. 1899. 8°.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report of the Superintendent for the year ending june 30, 1899. 1899. 8°.

Surgeon General's Office, U. S. Army in Washington:

Index-Catalogue. II. Series, Vol. 4. 1899. 4°.

United States Geological Survey in Washington:

Monographs. No. XXIX. XXXI Text u. Atlas) XXXV. 1898. 4°.
18th annual Report 1896/97. Part I. III. IV. 19th annual Report 1897/98. Part I. IV. VI and VI continuated. 1898. 4°.

Savigny-Stiftung in Weimar:

Zeitschrift für Rechtsgeschichte: a) Germanist. Abtheilung Band XX. b) Romanist. Abtheilung Band XX. 1899. 8°.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 32. Jahrg. 1899. 8°.

Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Classe. Band 138—140. 1898/99. 8⁰.
Mathem.-naturwissensch. Classe. 1898. 8⁰.
Abth. I. Bd. 107, No. 6—10.
„ IIa. „ 107, „ 3—10.
„ IIb. „ 107, „ 4—10.
„ III. „ 107, „ 1—10.
Archiv für österreichische Geschichte. Band 85, 1, 2; 86, 1, 2. 1898. 8⁰.
Fontes rerum Austriacarum. Abtheilg. II, Band 50. 1898. 8⁰.
Almanach. 48. Jahrg. 1898. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrgang 1898. Band 48, Heft 3 und 4; Jahrgang 1899. Band 49, Heft 1, 2. 1899. 4⁰.
Verhandlungen. 1899. No. 9, 10. 4⁰.
Geologische Karte der Oesterreichisch-Ungarischen Monarchie. Lief. I, II. 1899. Fol.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Verzeichniss der Bücher der Bibliothek. 1899. 8⁰.

K. K. Gradmessungs-Commission in Wien:

Protokolle über die Verhandlungen 1898. 1898. 8⁰.
Astronomische Arbeiten. Band X. 1898. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1899, No. 28—52; 1900, No. 1. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band XXIX, Heft 3—5. 1899. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 49, Heft 6—9. 1899. 8⁰.
Exhumirung Stephan Endlichers. 1899. 8⁰.
Enthüllung des Endlicher Denkmals. 1899. 8⁰.

K. K. militär-geographisches Institut in Wien:

Astronomisch-geodätische Arbeiten. Band XIII—XVI. 1899. 4⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band XIII, 4; XIV, 1, 2. 1898/99. 8⁰.

v. Kuffner'sche Sternwarte in Wien:

Publikationen. Band V. 1900. 4⁰.

K. K. Universität in Wien:

Programm der volksthümlichen Universitätsvorträge (10 Stück). 1896/99. 8⁰.
Bericht über die volksthümlichen Universitätsvorträge für d. J. 1898/99. 1899. 8⁰.
Oeffentliche Vorlesungen im Sommer-Semester 1899, Winter-Semester 1899/1900. 8⁰.
Uebersicht der akademischen Behörden für das Studienjahr 1899/1900. 1899. 8⁰.
Die feierliche Inauguration des Rektors für 1899/1900. 1899. 8⁰.

K. K. Universitäts-Sternwarte in Wien:

Annalen. Band XIII. 1898. 4⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. 39. Band. Jahr 1898/99. 1899. 8⁰.

Verein für Nassauische Alterthumskunde etc. in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 52. 1899. 8⁰.

Oriental Nobility Institute in Woking:

Vidyodaya. Vol. 28, No. 4—9. Calcutta 1899. 8⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Festschrift zur Feier ihres 50jährigen Bestehens. 1899. 4⁰.

Physikalische Gesellschaft in Zürich:

10. Jahresbericht. 1898. Uster-Zürich 1899. 8⁰.

Zeitschrift: Astronomische Mittheilungen in Zürich:

Astronom. Mittheilungen. Jahrg. No. 90. 1899. 8⁰.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde. Band I, Heft 1—3. 1899. 8⁰.

Sternwarte des eidgen. Politechnikums in Zürich:

Publikationen. Band II. 1899. 4⁰.

Universität in Zürich:

Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4⁰ und 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

P. Bachmetjew in Sofia:

Ueber die Temperatur der Insekten nach Beobachtungen in Bulgarien. Leipzig 1899. 8⁰.

Léon Bollack in Paris:

Grammaire abregée de la langue bleue, bolak-langue internationale pratique. 1899. 8⁰.

W. Borchers in Aachen:

Jahrbuch der Elektrochemie. IV, V. 1897/98. Halle 1898/99. 8⁰.
Zeitschrift für Elektrochemie. Jahrg. IV, V. 1897/98 und 1898/99. Halle. 4⁰.

Jul. W. Brühl in Heideberg:

Roscoe-Schorlemmer's ausführliches Lehrbuch der Chemie von Jul. Wilh. Brühl. VII. Band. Bearbeitet in Gemeinschaft mit Ossian Aschan und Edw. Hjelt. Braunschweig 1899. 8⁰.

Domenico Carutti in Turin:

Bibliografia Carloalbertina. 1899. 4⁰.

Margaritis G. Dimitsas in Athen:

Ὁ Ἑλληνισμός. 1900. 8⁰.

Wilhelm Goering in Dresden:

Die Auffindung der rein geometrischen Quadratur des Kreises. 1899. 8⁰.

Antonio de Gordon y de Acosta in Habana:

Consideraciones sobre la voz humana. 1899. 8⁰.
Declaremos en Cuba guerra á la Tuberculosis. 1899. 8⁰.

Anton Hacklin in Luleå:

Olavus Laurelius 1585—1670. 1896. 8⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Kunstformen der Natur. Lief. III. Leipzig 1899. Fol.

J. M. Hulth in Stockholm:

Öfversikt af Litteratur rörande Nordens Fåglar 1899. 4⁰.

Albert Jahn in Bern:

Biographie von Carl Jahn, Professor der Philologie in Bern. 1898. 8⁰.
Michael Psellos über Platons Phaidros. Berlin 1898. 8⁰.
Glossarium sive Vocabularium ad Oracula Chaldaica. Paris 1899. 8⁰.

A. Karpinsky in St. Petersburg:

Ueber die Reste von Edestiden und die neue Gattung Helicropion. 1899. 8⁰ mit 1 Atlas 4⁰.

R. W. O. Kestel in Port Adelaide:

Radiant Energy, a Working Power in the Mechanism of the Universe. 1898. 8⁰.

Jos. von Körösy in Budapest:

Zur internationalen Nomenclatur der Todesursachen. Berlin 1899. 4⁰.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinisches Archiv. Heft 2. Leipzig 1899. gr. 8⁰.
Byzantinische Zeitschrift. 8 Bd., 4. Heft. Leipzig 1899. 8⁰.

C. Mehlis in Neustadt a/H.:

Die Liguren-Frage. Braunschweig. 1899. 4⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Année 24. Tome 71, No. I—II. Sept.—Déc. 1899. Paris 1899. 8⁰.

D. H. Müller in Wien:

Die südarabische Expedition. 1899. 8⁰.

Alfred Nehring in Berlin:

Ueber Herberstain und Hirsfogel. 1897. 8⁰.

J. Praun in München:

Die Kaisergräber im Dome zu Speyer. Karlsruhe. 1899. 8⁰.

Verlagshandlung Dietrich Reimer in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. 4. Jahrg., 4. Heft. 1898. 4⁰.

Verlag von Seitz und Schauer in München:

Deutsche Praxis. 1899. No. 12—24. 8°.

Friedrich Schmidt in Ludwigshafen:

Geschichte der Erziehung der Bayerischen Wittelsbacher. Berlin 1892. 8°. I.
Geschichte der Erziehung der Pfälzischen Wittelsbacher. 1899. 8°. II.

Michele Stossich in Triest:

Strongylidae. Lavoro monografico. 1899. 8°.
La Sezione degli Echinostomi. 1899. 8°.
Appunti di elmintologia. 1899. 8°.
Lo smembramento dei Brachycoelium. 1899. 8°.

J. Schubert in Eberswalde:

Der jährliche Gang der Luft- und Bodentemperatur. Berlin 1900. 8°.

Wilhelm Thomsen in Kopenhagen:

Inscriptions de l'Orkhon. Helsingfors 1896. 8°.

Giacomo Tropea in Messina:

Studi sugli Scriptores historiae Augustae. No. I—III. 1899. gr. 8°.
La stele Arcaica del Foro Romano. 1899. gr. 8°.

Nicolaus Wecklein in München:

Euripidis fabulae. Vol. I, pars 1, 2. Editio altera. Lipsiae 1899. 8°.

Josef Weiss in Budapest:

Das 2000jährige Problem der Einschreibung des Siebeneckes. 1899. 8°.

Ed. v. Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie. 11. Bd, 3. Heft. Leipzig 1899. 8°.

Namen-Register.

Sach-Register.

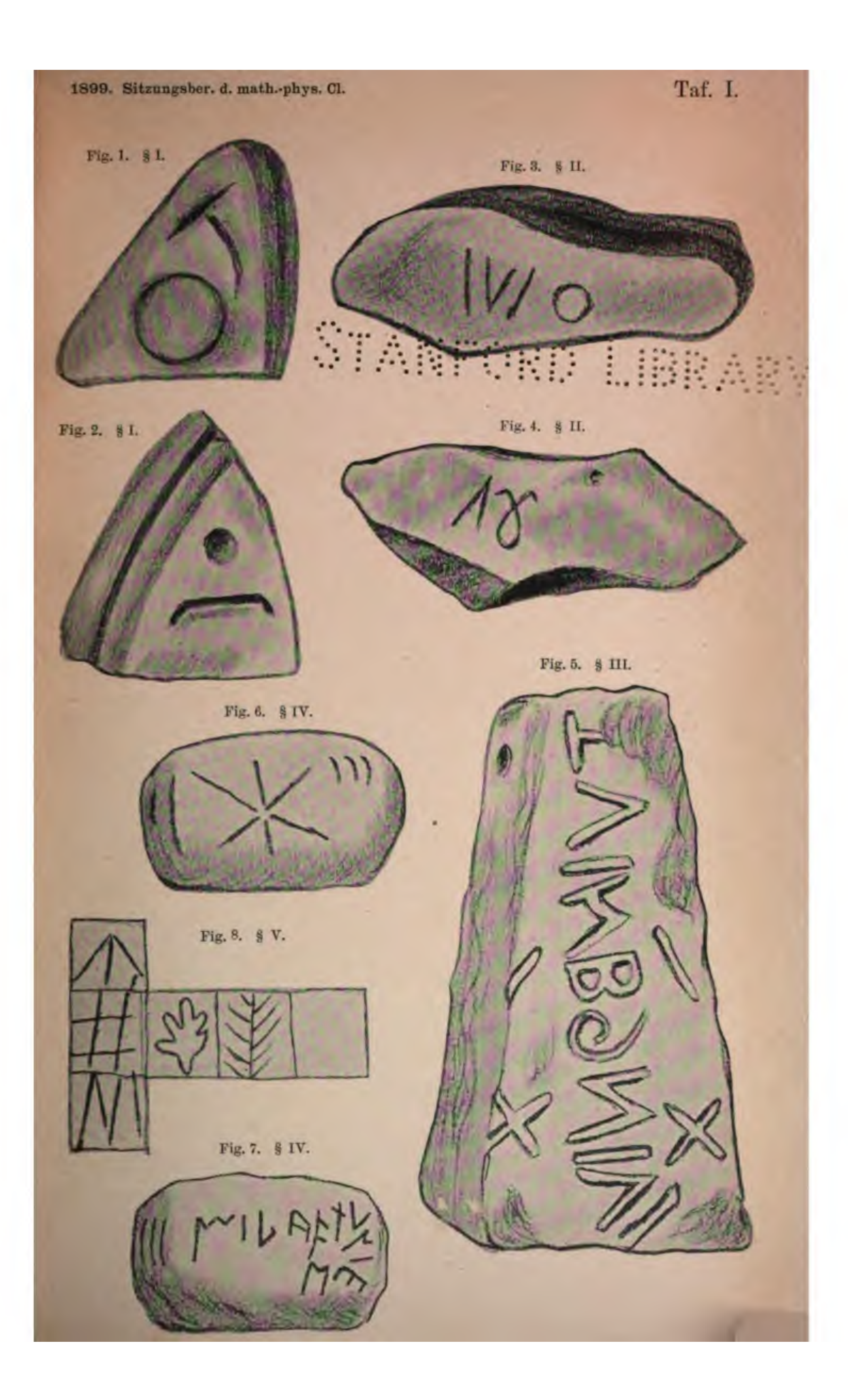


Fig. 1. § I.

Fig. 2. § I.

Fig. 3. § II.

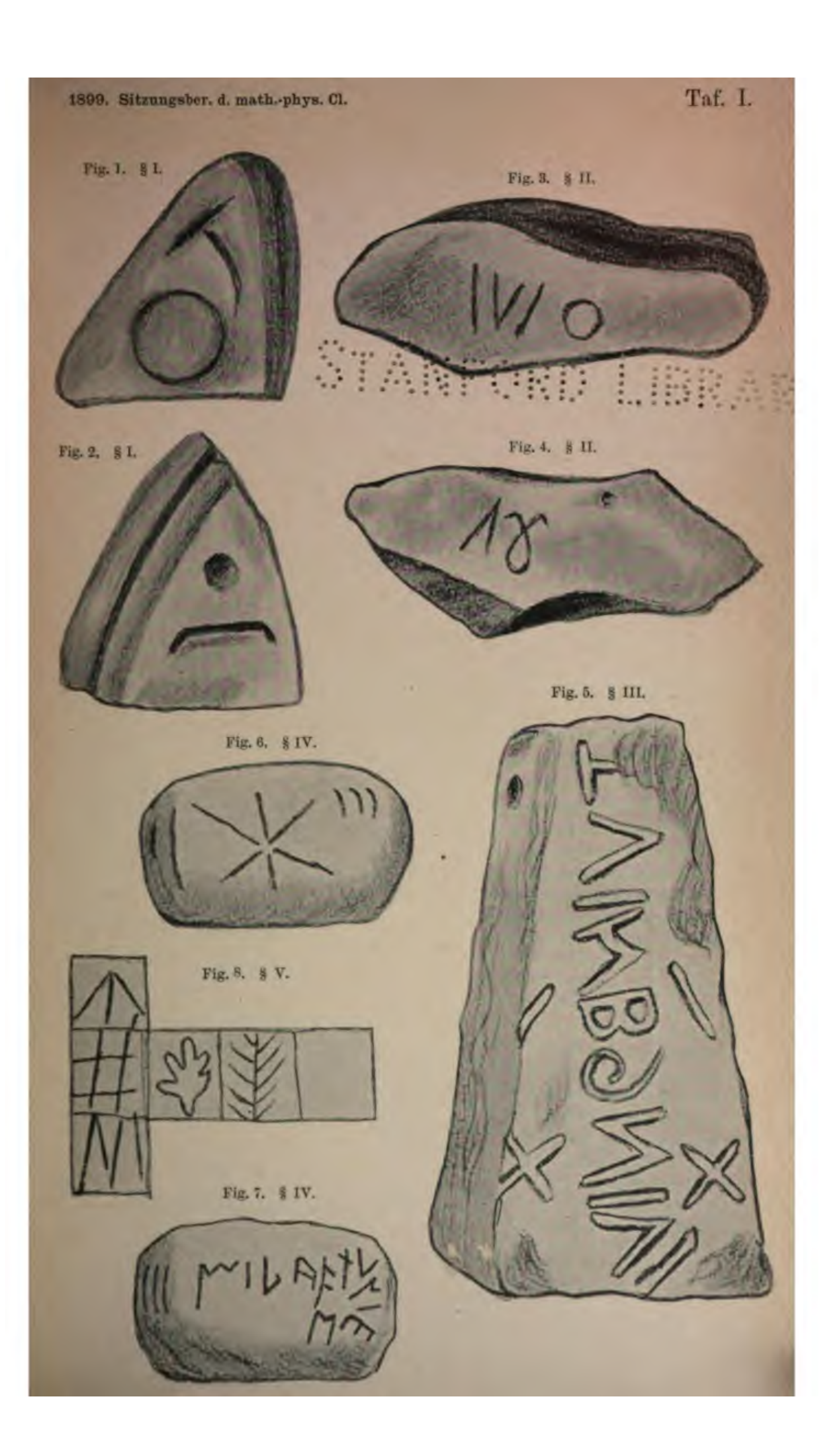
Fig. 4. § II.

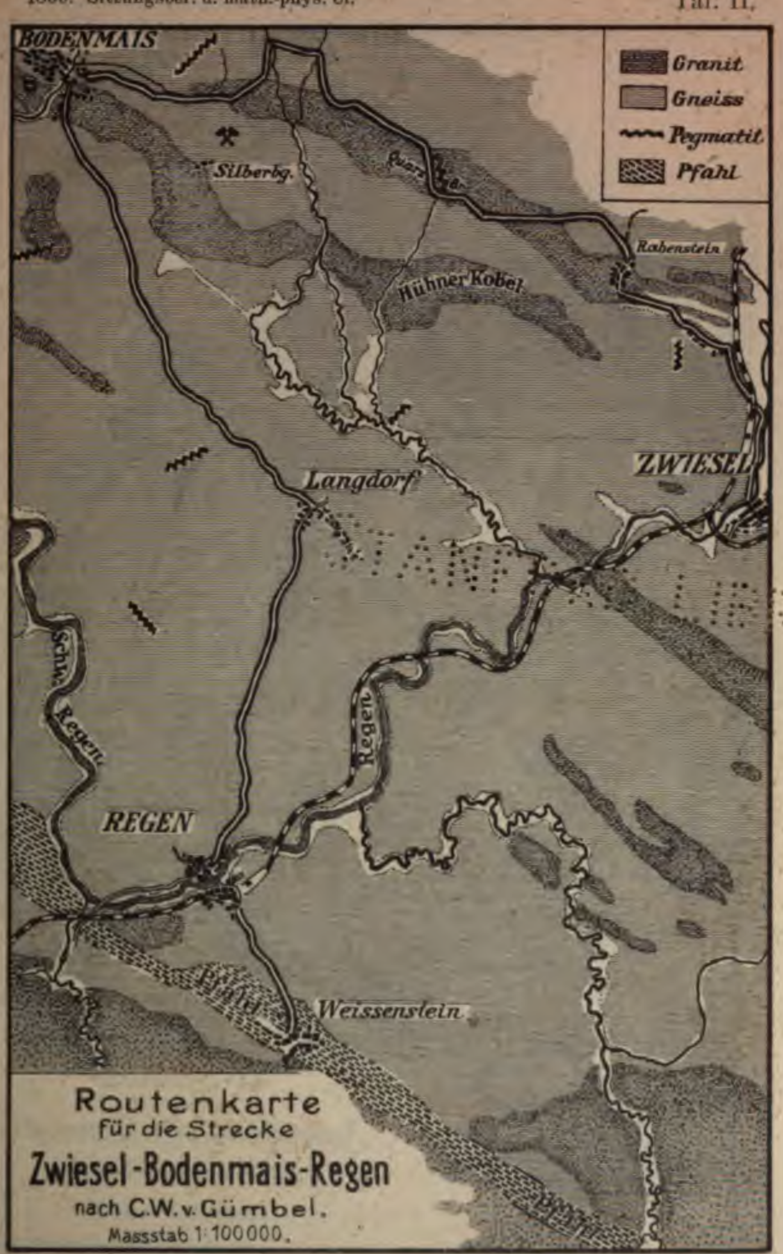
Fig. 5. § III.

Fig. 6. § IV.

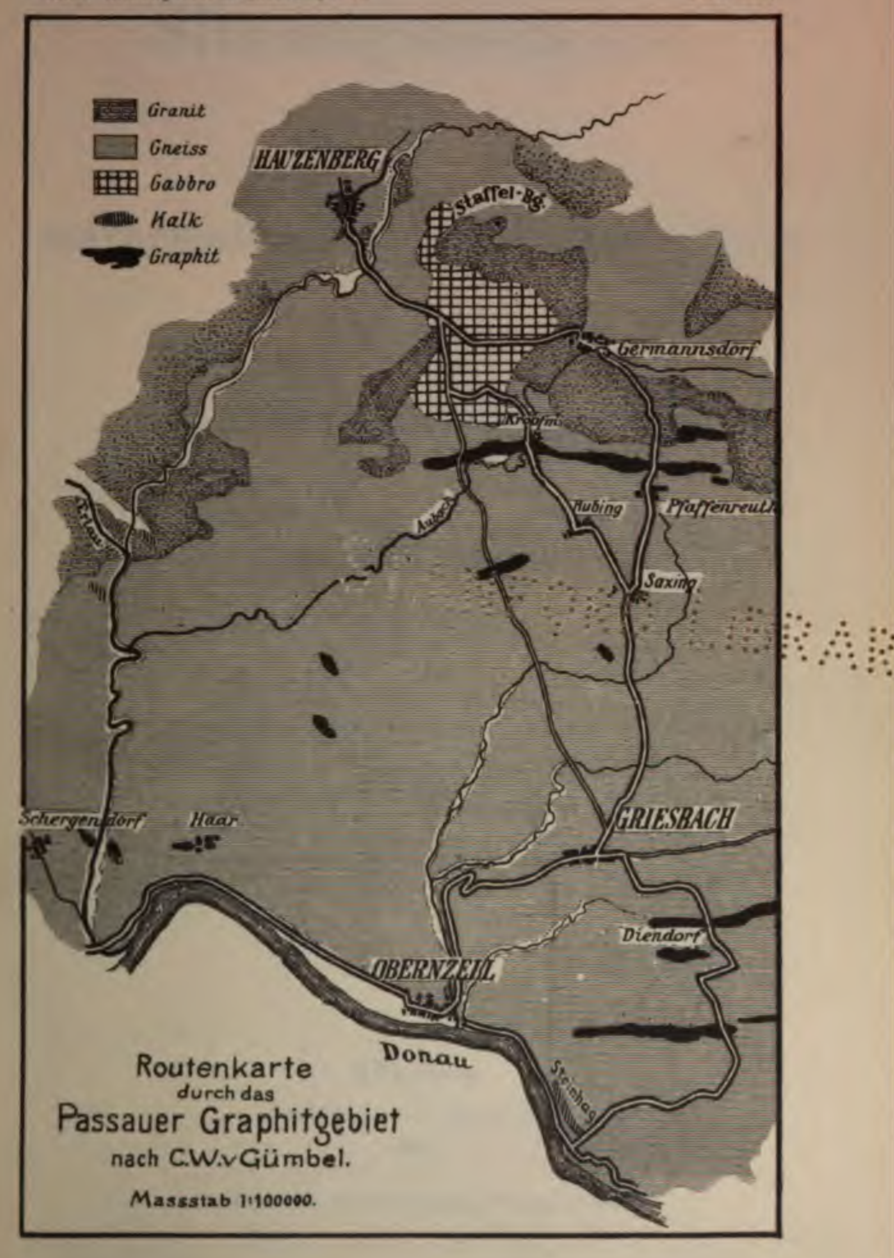
Fig. 7. § IV.

Fig. 8. § V.


Fig. 1. § I.
Fig. 2. § I.
Fig. 3. § II.
Fig. 4. § II.
Fig. 5. § III.
Fig. 6. § IV.
Fig. 7. § IV.
Fig. 8. § V.



Routenkarte
für die Strecke
Zwiesel-Bodenmais-Regen
nach C.W. v. Gümbel.
Massstab 1:100000.


Granit
Gneiss
Gabbro
Kalk
Graphit
HAUZENBERG
Staffel-Bg.
Germannsdorf
Kropfm.
Aubach
Rubing
Pfaffenreuth
Saxing
Schergendorf
Haar
GRIESBACH
Diendorf
OBERNZELL
Donau
Steinhag
Routenkarte
durch das
Passauer Graphitgebiet
nach C.W.v Gümbel.
Massstab 1:100000.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXX. Jahrgang 1900.

München.
Verlag der k. Akademie.
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXX
Jahrgang 1900.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 13. Januar 1900.

Sitzung vom 3. Februar 1900.

Sitzung vom 3. März 1900.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 141. Stiftungstages am 28. März 1900.

Sitzung vom 5. Mai 1900.

Sitzung vom 13. Juni 1900.

Sitzung vom 7. Juli 1900.

Sitzung vom 3. November 1900.

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 14. November 1900.

Sitzung vom 1. Dezember 1900.



Ueber eigenthümliche Deformationen jurassischer Ammoniten durch Drucksuturen und deren Beziehungen zu den Stylolithen.

Von **A. Rothpletz.**

(*Eingelaufen 28. Februar.*)

Für die hier in Betracht kommenden Druckerscheinungen habe ich 1886[1]) den Namen „Drucksuturen" gewählt. Unregelmässig verlaufende, unebene, zackige Flächen durchsetzen die Kalksteine, besonders häufig in stark aufgerichteten oder gefalteten Ablagerungen. Sie unterscheiden sich leicht von den Gangspalten, die niemals solche Auszackungen haben, während die Drucksuturen keine Ausfüllung durch Gangmineralien besitzen. Nur ein dünner, je nach der Farbe der Gesteine gelblicher, bräunlicher, rother oder schwarzer Thonbelag trennt die rauhen und mit ihren spitzen Vorsprüngen zahnartig ineinandergreifenden Seitenflächen.

Die Gangspalten sind aus Zerreissungen des Kalksteines entstanden. Wo diese Zerreissungen ein im Kalkstein eingeschlossenes Geröllе oder Petrefact mitbetroffen haben, findet man die zwei Theile derselben zu beiden Seiten der Spalte und wenn man dieselben wieder zusammenfügt, so erhält man das Object in seiner ursprünglichen Vollständigkeit. Wo hingegen ein solcher Körper von einer Drucksutur angeschnitten ist, da sucht man vergebens auf der anderen Seite der Sutur

---

[1]) Monographie der Vilser Alpen in Palaeontographica, Bd. 33, S. 68, Taf. XV, Fig. 11—16.

nach seiner ergänzenden Hälfte oder es findet sich davon nur noch ein kleiner Bruchtheil.

Der Gebirgsdruck hat auf der Suturfläche eine Auflösung des Kalksteines bewirkt, von der auch die eingeschlossenen Kalkgerölle und Petrefacten mitbetroffen worden sind. Nur die unlöslicheren Bestandtheile wie Thon, Eisen etc. sind zurückgeblieben und liegen als farbiger Besteg auf der Fläche. Das Wasser, wie es in den Gesteinen stets vorhanden ist, besitzt die Fähigkeit kohlensauren Kalk aufzulösen, besonders wenn es Kohlensäure enthält. Der Druck, welcher bei Gesteinsaufrichtungen eine enorm grosse Stärke erlangt, erhöht die Lösungsfähigkeit des Wassers und bedingt dadurch, dass auf allen Stellen im Gestein, zu denen das Wasser Zugang hat, Kalk in Lösung geht. Als solche Stellen kommen in erster Linie Druckrisse, Absonderungsklüfte und Schichtflächen in Betracht.

Der Betrag der Auflösung richtet sich aber nicht allein nach der Stärke des Druckes, der Menge und chemischen Beschaffenheit des Wassers und der Geschwindigkeit der Wasserbewegung, sondern auch nach der Löslichkeit des Kalksteines. Dieser kann selbst im gleichen Gestein sehr verschieden sein je nach der Grösse der Kalkkrystalle, deren chemischen Zusammensetzung und der Beimengung anderer Mineralien. Die Erfahrung lehrt, dass auch da, wo der Druck auf eine ursprünglich glatte Trennungsfläche gewirkt hat, dieselbe uneben wird, indem die Kalkkörner zu beiden Seiten nicht gleichmässig und gleich rasch aufgelöst werden. So entstehen die Rauhheiten und Vorsprünge, die in ihrer Mannigfaltigkeit oft erst unter dem Mikroskope genau erkannt werden können.

Die Breite der Kalkzone, welche auf diese Weise zwischen zwei Druckflächen aufgelöst worden und jetzt verschwunden ist, lässt sich in vielen Fällen bestimmen. Wo zwei Kalkgerölle sich ineinander gebohrt haben, gibt die Tiefe der dadurch erzeugten Eindrücke auf den Geröllen das Ausmass dafür an. Wo grössere Petrefacten von Drucksuturen angefressen sind, lässt sich durch deren fehlende Theile wenigstens ein Minimal-

betrag für die Auflösungszone berechnen, der zuweilen auf mehrere Centimeter ansteigt.

Zieht man die Häufigkeit der Drucksuturen in Betracht, so ergibt sich, dass durch sie in stark aufgerichtetem Kalkgebirge ungeheure Massen der ursprünglichen Kalksedimente in Lösung gegangen sein müssen. Sie mögen zum Theil mit den Quellwassern den Meeren oder anderen Gebieten zugeführt worden sein, aber ein guter Theil derselben ist im Gebirge selbst zurückgeblieben, nur auf anderer Lagerstätte, indem er sich als Calcit auf den stets vorhandenenen Gangspalten oder in sonstigen Hohlräumen wieder ausschied.

Den bis 1886[1]) von mir beschriebenen Fällen habe ich 1894[2]) und 1899[3]) weitere hinzugefügt, welche zeigen wie Foraminiferen, Belemniten und Ammoniten von den Drucksuturen angefressen erscheinen und dadurch äusserliche Deformationen erleiden.

Der Fall hingegen, den ich in diesem Aufsatze beschreiben will, gehört zu mehr innerlicher Deformation. Oppel hat 1866 bei Ruhpolding, südlich von Traunstein, aus rothem jurassischem Kalk einen Ammoniten erhalten, der sich gegenwärtig in der paläontologischen Staatssammlung befindet. Soweit er von der Gesteinshülle befreit ist, trägt er die äussere Form eines Ammoniten deutlich zur Schau und an einigen Stellen des letzten Umganges kann man die Lobenlinien noch theilweise erkennen. Merkwürdiger Weise erscheint der Ammonit jedoch wie seitlich zusammengedrückt und zwar so, als ob der normal eingerollte letzte Umgang an einer Stelle einen Knick erhalten hätte.

Bei flüchtiger Betrachtung könnte man vermuthen, dass es sich um eine einfache Streckung handle, wie sie so häufig in thonigen Gesteinen anzutreffen ist, in denen die Ammoniten-Ausfüllungen dann in einer Richtung in die Länge gezogen sind, während die Schale selbst entweder zertrümmert oder

---

[1]) Siehe auch Zeitschrift der Deutsch. Geol. Ges. 1880, S. 191.
[2]) Geolog. Querschnitt durch die Ostalpen. S. 212—217, Fig. 96—98.
[3]) Die Entstehung der Alpen, im Bayer. Industrie- und Gewerbeblatt.

aufgelöst ist. Hier indessen liegt die Sache anders. Zwar fehlt die äussere Schale, aber die inneren Scheidewände sind theilweise noch vorhanden und die äussere Form zeigt keine Streckung nach einer bestimmten Richtung. Zu beiden Seiten des grössten Durchmessers beschreiben die Hälften des Umganges einen Bogen, der die jenem Durchmesser entsprechende Krümmung besitzt, so dass man eine Deformation überhaupt gar nicht vermuthen könnte, wenn beide Hälften isolirt wären. So aber stossen beide Bogenabschnitte auf der Ebene des grössten Durchmessers unter einem stumpfen Winkel zusammen, wie die Bögen zweier Abschnitte eines Kreises, die nach Entfernung des Kreis-Mittelstückes direct aneinander geschoben worden sind.

Berechnet man den Durchmesser des ganzen Gehäuses, welches diesen zwei Ammoniten-Hälften entsprechend ihrer Rundung bei normaler Ausbildung zukommen würde, so erhält man eine Länge von $10^1/_2$ cm, wo er jetzt nur $8^1/_2$ cm misst. Es macht so den Eindruck, als ob von dem ursprünglichen Ammoniten ein 2 cm breites Mittelstück verschwunden sei, und da sich in der That in dieser Richtung einige Drucksuturen hinziehen, so erschien es mir längst schon äusserst wahrscheinlich, dass dieselben eine Auflösung dieser fehlenden Mittelzone bewirkt haben möchten. Um jedoch eine wohlbegründete Ueberzeugung zu erlangen, war es nothwendig den Ammoniten der Symmetrieebene nach zu durchschneiden. Hierbei war mir Herr Dr. Grünling erfolgreich behülflich, wofür ich ihm meinen Dank ausspreche.

Die eine der so erhaltenen Schnittflächen ist in nebenstehender Figur abgebildet auf Grund einer photographischen Aufnahme, in welcher nur die Drucksuturlinien durch Ueberzeichnung stärker hervorgehoben sind. Der Kalk, welcher das Ammoniten-Gehäuse ausfüllt, ist roth, aber von verschiedener heller bis dunkler Färbung. Die Kammern sind nur noch zum Theil erkennbar, nemlich im letzten Umgang und einem kleineren inneren Theil. Das letzte Drittel des Umganges gehört zur Wohnkammer, weiter zurück liegen die stark convexen



Medianer Längsschnitt durch einen Ammoniten von Ruhpolding in natürl. Grösse nach photograph. Aufnahme. Nur die Drucksuturen und Septen sind durch Ueberzeichnung etwas deutlicher gemacht.

Septen, von denen aber nur zwei noch ganz intact sind. Die anderen zeigen mehr oder minder scharf ausgeprägte kleine Zacken, wie sie bei den Drucksuturen vorkommen. Die Füllmasse der Kammern ist durch hellrothe Färbung ausgezeichnet, in den Partien aber, wo die Septen verschwunden sind, herrscht dunkelrothe Farbe vor, d. h. der Kalk ist dort thon- und eisenreicher. Zugleich wird er von zahlreichen Suturflächen durchsetzt, die sich verzweigen und bald enger bald weiter schaaren. Während in den hellrothen Partien diese Suturen auf die Septen beschränkt sind und darum auch weit auseinanderstehen, liegen sie in den dunklen Theilen dicht geschaart aber zunächst mehr oder weniger zur längeren Axe parallel. Sie stehen aber keineswegs alle vertikal zur abgebildeten Symmetrie-Ebene und viele schneiden dieselbe unter sehr spitzen Winkeln.

Die Erhaltung und Sichtbarkeit der Kammern steht im umgekehrten Verhältniss zur Häufigkeit der Suturen. Im äusseren Umgang gehen diese Druckerscheinungen fast nur von den Septen aus, von denen blos zwei ihre glatte Fläche noch nicht eingebüsst haben. Der Druck hat hier also hauptsächlich die von der Natur schon gelieferten Trennungsflächen für seine chemische Thätigkeit ausgesucht.

Die inneren Umgänge zeigen ein viel engeres Netz von Suturen, das nur stellenweise noch eine Beziehung zu den Septen erkennen lässt. Doch liegen gewisse Partien inselartig darin eingeschlossen, die durch hellere Farbe hervortreten und die nur von wenigen Suturen durchzogen werden. Auch die Kammerung wird darin wieder sichtbar, während sie ringsum fast ganz verschwunden ist.

Die von Drucksuturen stark erfüllte Zone ist im Allgemeinen im oberen Theil der inneren Umgänge (oben im Sinne der beigegebenen Abbildung genommen) breiter als unten und, da die von ihnen ausgehende Auflösung somit oben ebenfalls stärker gewesen sein wird als unten, so ist die rechte Hälfte des Ammoniten (ebenfalls im Sinne der Zeichnung) nicht gleichmässig gegen die linke herangepresst worden, sondern

oben stärker als unten, d. h. die Bewegung ging wie um ein Scharnier, dessen Rolle die drei besonders stark zerfressenen Septen unten auf der Abbildung übernommen zu haben scheinen. Erst später, wohl lange nach diesen Druckvorgängen, ist eine Zerreissung — eine Gangspalte — inmitten des Ammoniten entstanden und zum Theil von weissem Calcit wieder ausgefüllt worden. Dass dies eine jüngere Bildung ist, geht daraus hervor, dass die Suturflächen alle an der Spalte enden und keine hindurchsetzt.

Durch das Zerschneiden des Ammoniten ist es also möglich geworden ein klares Bild des Vorganges zu erlangen, durch welchen die Deformation hervorgerufen worden ist. Gemäss der Anordnung der Drucksuturen hat die damit in Verbindung stehende Kalkauflösung hauptsächlich eine mittlere Zone betroffen, die dadurch verkürzt wurde und ein näheres Aneinanderrücken der äusseren Theile gestattete, wodurch der ganze Ammonit ein längliches Aussehen erlangte. Er ist aber nicht gestreckt und in die Länge gezogen, sondern vielmehr gestaucht und verschmälert worden.

Es ist die gegenwärtig kürzere Achse, welche verkürzt wurde, während bei den gestreckten Fossilien die grössere Achse die verlängerte ist.

Die Formveränderung unseres Petrefacten ist also keine äusserliche, sondern recht eigentlich eine innere. Die Masse im Innern hat sich verändert, ist geschwunden und dem hat sich dann die äussere Form angepasst. Aber allerdings sind die bewirkenden Drucksuturen nicht auf dem Ammoniten beschränkt geblieben. Zum Theil wenigstens setzen sie in das Gestein hinein fort und haben auch darin Deformationen hervorgerufen. Es ist das selbstverständlich, da ja die Druckkräfte auf das ganze Gebirge gewirkt haben und auch das den Ammoniten umgebende Gestein verändern mussten. Aber im blossen Gestein ist es schwer eine richtige Vorstellung von der Grösse der eingetretenen Veränderungen zu erlangen, weil die ursprüngliche Beschaffenheit desselben unbekannt ist, während die normale Form des Ammoniten in unserem Falle als

Massstab für den Grad der Formveränderungen und Auflösungen dient. Darin liegt der besondere Werth des abgebildeten Stückes.

Die Beziehungen der Drucksuturen zu den Stylolithen.

Zwei Jahre, nachdem ich den Namen „Drucksuturen“ aufgestellt hatte, schrieb Suess (Antlitz der Erde, Bd. II, S. 335), dass diese „Suturen“ nicht durch Druck entstanden, sondern wahre Stylolithenbildungen seien, d. h. zahlreiche Theilchen eines oberen Sedimentes wären zapfenförmig in das untere eingesunken.

Nach weiteren acht Jahren hingegen erklärte Th. Fuchs (Sitzber. d. Akad. d. Wissensch. Wien, Bd. 103, 1894 Ueber die Natur und Entstehung der Stylolithen), dass die Stylolithen eine besondere Form der Drucksuturen und wie diese nicht im weichen, sondern im bereits erhärteten Gestein durch mit chemischer Auflösung verbundenem Druck entstanden seien.

Bestimmend für die letzte Auffassung war wohl das kurz vorher erschienene Capitel über die Drucksuturen in meinem Querschnitt durch die Ostalpen, welches ausdrücklich darauf hinwies, dass diese Suturen nicht auf die Schichtgrenzen beschränkt bleiben, was durch eine Reihe von Abbildungen deutlich gemacht werden konnte, und dass ihre Entstehung nothwendig mit chemischer Auflösung des Kalkes verbunden gewesen sein muss. Ich glaube deshalb, dass es nicht nothwendig ist, hierauf nochmals zurückzukommen. Dahingegen bedarf ein anderer Punkt weiterer Aufklärung. Jene beiden eben angeführten Urtheile sind, obwohl sie sich in der genetischen Auffassung direct widersprechen, darin doch einig, dass den Drucksuturen und Stylolithen gleiche Entstehung zukomme. Nach Suess sind Drucksuturen wahre Stylolithenbildung, nach Fuchs sind die Stylolithenbänder nur eine besondere Form der Drucksuturen und er meint, dass ich die Identität beider Bildungen auszusprechen noch nicht gewagt habe, offenbar unter dem Einfluss der landläufigen Meinung

und vielleicht speciell unter dem Einflusse von Gümbels letzter Publication (von 1882).

Ich hatte nemlich 1894 (S. 213) ausdrücklich erklärt: „die Drucksuturen unterscheiden sich von den echten Stylolithen, wie sie Gümbel 1882 beschrieben und erklärt hat, dadurch, dass sie nicht auf die Schichtgrenzen beschränkt und nicht schon vor der Verfestigung des Kalksedimentes entstanden sind". Dass ich dabei besonders auf Gümbels Arbeit verwiesen habe, geschah deshalb, weil ich dadurch einer besonderen Begriffsumgrenzung für die Stylolithen enthoben wurde und es damals vermeiden wollte, auf gewisse Unzulänglichkeiten hinzuweisen, die unseren Erklärungen der Stylolithenbildung noch immer anhaften. Heute will ich dies nachholen.

Die morphologischen Unterschiede zwischen den Drucksuturen und Stylolithenbändern.

Die Auszackungen der Drucksuturflächen sind nie sehr hoch und schwanken zwischen Bruchtheilen eines Millimeters und etwa 1—2 cm. Sie sind niemals stielförmig, sondern mehr oder weniger konisch zugespitzt, dabei aber auf den Seitenflächen fein ausgezackt oder unregelmässig gerieft.

Die Vorsprünge auf den Stylolithenbändern hingegen erreichen gar nicht selten Höhen von mehreren cm bis 1 dm, manchmal sogar bis 3 dm. Ihre Seitenflächen sind von der Basis bis zum meist abgestumpften Ende zu einander parallel gerichtet oder doch nur schwach convergirend. Zugleich sind diese Wände deutlich gerieft, und zwar von untereinander parallelen, bald breiten und flachen, bald schmalen und tiefen Furchenstreifen, die von unten bis oben heraufgehen und dem ganzen Vorsprung Aehnlichkeit mit einem Holzpflock geben, der in der Richtung der Holzfaser geschnitten ist. Deshalb hat Eaton dafür den Namen Lignilites gewählt. Das Ende der Vorsprünge ist stets flach und entweder ziemlich eben von einer Thonschicht oder einem Petrefact begrenzt oder von kleineren Rauhigkeiten bedeckt. Die Seitenwände sind bald

kerzengerade, bald schwach gekrümmt, manchmal sogar so stark, dass ihr Ende der Basis sich zukehrt.

Der Körper dieser Vorsprünge ist sehr verschieden gestaltet. Häufig besitzt er einen mehr oder weniger kreisrunden bis polygonalen Querschnitt und damit zugleich eine ausgesprochene Pfeilerform. Das sind die auffälligsten Stylolithen und zugleich diejenigen, welche in den Sammlungen am meisten vertreten und oft genug allein bei Erklärungsversuchen berücksichtigt worden sind. Ebenso häufig sind aber solche Vorsprünge, deren Grundriss ganz unregelmässig ist und nicht selten in einer Richtung starke Verlängerung aufweist, so dass das Ganze nicht mehr zapfen-, sondern eher mauerförmig erscheint. Solche Mauern sind ebenso wie die Zapfen mit vollkommen senkrechten und parallel gestreiften Seitenwänden versehen, die aber in vielen Fällen eine Art von Terrassirung zeigen, indem die Seiten treppenartig von der Basis bis zur Oberfläche des Vorsprunges aufsteigen. Dabei sind die Oberflächen dieser Terrassen nicht gerieft, sondern nur ihre Wände.

Wo im Kalkstein eingeschlossene Fremdkörper, insbesondere Petrefacten, die Drucksuturen berühren, reichen sie gewöhnlich nicht von einer auf die andere Seite herüber, oder wenn dies doch der Fall ist, ergänzen sich die beiderseitigen Theile niemals vollkommen. Sie sind zusammen kleiner als das ursprüngliche ganze Petrefact. Wo die Sutur ein solches anschneidet, fehlt also die Ergänzung desselben auf der anderen Seite in der Regel vollständig. Bei den Stylolithen hingegen werden die Fremdkörper niemals durchschnitten, vielmehr richten sich die Wandungen der Zapfen sehr genau nach deren Form, so dass die das Ende derselben so häufig krönenden Schalen von Pecten, Lima oder die Gehäuse von Seeigeln und Asteriden nicht nur vollkommen erhalten sind, sondern dass sich auch die Umrisse der Zapfen ganz genau nach der Form dieser Petrefacten richten.

Die Drucksuturen sind von einer dünnen Thonhaut begleitet, deren Farbe jedoch stets von der des Kalksteines abhängig, in gelbem Kalk bräunlich, in röthlichem tiefroth, in

grauem schwärzlich ist. Auch die Stylolithenbänder lassen meist eine thonige Zwischenschicht erkennen, die aber in der Farbe nicht immer mit dem Kalkstein übereinstimmt, z. B. grünlich bei gelbem Kalkstein ist und in der Regel nur auf den flachen oberen Enden der Zapfen liegt, während die längsgerieften Seitenwände frei davon zu sein pflegen.

Die Drucksuturen sind eine weit verbreitete und sehr häufige Erscheinung in allen Kalksteinen aller Formationen, aber nur da, wo mehr oder weniger starke Aufrichtung und Faltung des Sediments stattgefunden hat. In den noch horizontal gelagerten Kalkbänken fehlen sie ganz oder sind doch nur äusserst selten.

Die Stylolithen hingegen kommen davon ganz unabhängig vor und die schönsten Exemplare sind gerade aus flachgelagerten Bänken bekannt geworden. Sie sind aber verhältnissmässig sehr selten, und auf bestimmte Bezirke und Horizonte beschränkt. Sie wurden bisher aus dem Silur-, Devon- und Carbon-Kalk Nord-Amerikas, dem Zechstein, Rogenstein, Muschelkalk, oberen Jura und der oberen Kreide Europas beschrieben. Sie gehen zumeist von Schichtflächen aus und zwar so, dass ihr Ende nach oben gerichtet ist, gleichgiltig ob sie gerade oder verbogen, vertikal oder schiefstehend sind. Seltener ist ihr Ende nach unten gerichtet und noch seltener entspringen sie nicht den Schichtflächen, sondern nehmen ihren Anfang inmitten einer Kalkbank, wobei die Zapfen dann mehr oder weniger horizontal liegen. Die Drucksuturen durchsetzen im Gegensatz dazu die Bänke in allen möglichen Richtungen und sind ganz unabhängig vom Verlauf der Schichtflächen. Wo sie gleichwohl dieselben eine Strecke weit begleiten, beweisen sie ihre Unabhängigkeit dadurch, dass sie plötzlich aus dieser Fläche herausspringen und in eine andere Schichtfläche übergehen (s. Fig. 95, Ostalpen-Querschnitt, S. 212). Sodann durchkreuzen sie sich und verbinden sich miteinander ganz regellos, was bei den echten Stylolithenbändern bisher nicht beobachtet worden ist.

Die genetischen Unterschiede zwischen den Drucksuturen und den Stylolithenbändern.

Wenn wir zunächst noch berücksichtigen, dass die beiden Bildungen ausschliesslich auf Kalksteine und Dolomite beschränkt sind, so ergibt sich aus den morphologischen Eigenschaften mit Nothwendigkeit, dass die Drucksuturen erst längere Zeit nach Ablagerung der von ihnen betroffenen Sedimente entstanden sein können, als letztere bereits feste Gesteine geworden waren. Der Gebirgsdruck fand keine weiche, in sich bewegliche Masse mehr vor, wohl aber eine solche, die gegenüber der lösenden Kraft der unter hohem Druck stehenden Gesteinsfeuchtigkeit keinen vollkommenen Widerstand leisten konnte. Die chemische Wirkung des Bodenwassers bethätigte sich natürlich am stärksten auf den Druck- und Schichtflächen und von da aus sehen wir denn auch die Auflösung des Kalkes ausgehen. Langsam werden die Wände angefressen und, wo Petrefacten im Kalk liegen, werden auch sie angegriffen und allmählich aufgezehrt. Da aber die Widerstandsfähigkeit gegen die lösende Kraft nicht überall eine gleichmässige ist, so ist es auch die Auflösung nicht — es bleiben kleinere Partien erhalten, die als Vorsprünge auf den Flächen stehen bleiben, während andere Partien rasch verschwinden und Vertiefungen zurücklassen. So muss man sich denken, dass das zackige Ineinandergreifen der Suturflächen entstand. Aber nur der kohlensaure Kalk war löslich — nicht der Thon, das Eisen und manche andere Substanzen, die jeder Kalkstein in mehr oder minder grossen Mengen einschliesst und denen er zum Theil seine Farbung verdankt. Diese bleiben also auf den Drucksuturen zurück, wo sie sich zu einer dünnen aber intensiv gefärbten Haut ansammeln.

Die Stylolithen lassen [illegible] was auf eine [illegible] und [illegible] gegen [illegible] Zacken ver- [illegible] voll-

kommen erhalten wie andere im normalen Kalkstein eingeschlossene. Es ist mir kein Fall bekannt, wo grössere Petrefacten von den Stylolithenbändern durchschnitten oder gar angefressen wären. Wenn wir die gewöhnlichste Form der aufrecht stehenden Stylolithen zunächst ins Auge fassen, so erscheint es so, als ob die untere Bank Zapfen in die obere Bank entsende, aber die kleinen Thonkappen der Zapfen sind nur abgerissene Theile einer allgemeinen dünnen Lettenlage, welche die zwei Kalkbänke trennt. Dies beweist, dass nicht eigentlich die Zapfen von unten heraufgetrieben worden, sondern nur stehen geblieben sind, während die obere Bank durch ihr eigenes Gewicht und das der noch weiter aufgelagerten Sedimente die untere Bank zusammengepresst und ihre Oberfläche um mindestens Zapfenlänge heruntergedrückt hat. Damit dies aber ohne chemische Auflösung, die dabei keine Rolle gespielt hat, möglich war, muss die Masse noch weich oder, vielleicht besser ausgedrückt, noch locker gewesen sein. Dieser Zustand kann aber nur verhältnissmässig kurze Zeit nach Entstehung des Kalkabsatzes bestanden haben, so lange das Meereswasser mit seinen leicht löslichen Salzen noch den Kalksand und Schlamm durchdrängte und die kleinen Kalkkörner sich noch nicht fest aneinander angeschlossen hatten, so wie das jetzt der Fall ist. Später war eine wirkliche Stylolithenbildung nicht mehr möglich.

Wenn auf diese Weise eine lockere Schicht um einige Centimeter zusammengedrückt wurde, so konnte dies doch nur dann in ganz gleichmässiger Weise geschehen, wenn die Festigkeit derselben überall gleich gering war. Hatten sich aber irgendwo schon Verfestigungen vielleicht durch Ausscheidung eines krystallinen Bindemittels oder durch concretionäre Bildungen eingestellt, dann trat dort keine Compression oder doch nur eine geringere als ringsherum ein, und diese Theile blieben dann als Zapfen stehen, während daneben die obere Schicht heruntersank und mit ihren festeren Kalkkörnern die Wände der Zapfen in der Richtung der Bewegung, also vertikal abwärts in ähnlicher Weise riefte, wie das auf glatten Flächen

(Rutschflächen) bei Verwerfungen häufig geschieht. Wenn also eine Asteride auf einen fünfkantigen Pfeiler mit fünf einspringenden Nischen oder ein Seeigel auf einen cylinderförmigen Pfeiler zu stehen gekommen ist, so ist anzunehmen, dass diese Petrefacten bei Entstehung der Stylolithen zufällig einen etwas festeren Theil der Kalkbank unter sich hatten, der aber heute, wo die ganze Bank erhärtet ist, als solcher nicht mehr erkannt werden kann.

Natürlich ist aber nicht nur diese eine Bank von der Compression betroffen worden sondern auch die darüber liegende, und wenn in dieser ebenfalls festere Theile sich befanden, so konnte der Gegendruck der unteren Bank an diesen Stellen nicht so wirksam sein und es erklärt sich daraus warum, wenn auch viel seltener, Zapfen vorkommen, die von oben nach unten gerichtet sind, wie das von verschiedenen Forschern beobachtet und beschrieben worden ist.

Der Druck der auflastenden Massen erzeugt in lockeren Massen aber nicht nur eine Bewegung in vertikaler Richtung, da ja die Compression nach jeder Richtung möglich ist, und so ist es denkbar, dass bei verschiedenartiger Festigkeit der einzelnen Theile der Sedimentlager auch Zapfen in schräger oder sogar horizontaler Richtung entstanden, wenn schon dieselben nicht so häufig eintreten konnten, weil die Schwerkraft dabei nicht mehr mitwirkte. So wird es begreiflich, warum auch schiefgestellte, gebogene und umgekrümmte neben den senkrechten und geraden Zapfen vorkommen und warum auch innerhalb der Kalkbänke selbst ganz horizontal liegende Stylolithen angetroffen werden, die also nicht von den Schichtflächen ausgehen. Bei letzteren, deren Vorhandensein schon Schmid 1846[1]) und Thurmann 1856 ausdrücklich behaupten, scheinen Thon- und Petrefactenkappen zu fehlen, was auch ganz begreiflich ist.

Während die Compression tieferer Sedimente durch die

---

[1]) Schmid und Schleiden. Die geognost. Verhältnisse des Saalthales bei Jena, 1846, S. 47.

darüber entstehenden jüngeren Ablagerungen wohl ein ziemlich allgemein verbreiteter Vorgang war, blieb die Bildung von Stylolithen nur auf solche Fälle beschränkt, wo die Erhärtung der noch lockeren Schichten nicht gleichmässig vor sich ging. Wir begreifen deshalb leicht, warum die Stylolithen verhältnissmässig selten und, wo sie vorkommen, gewöhnlich nur auf bestimmte Bänke oder Horizonte beschränkt sind, dort aber oft eine grosse Häufigkeit haben.

Wir sind somit zu dem Ergebniss gelangt, dass Drucksuturen und Stylolithen zwei morphologisch und genetisch recht verschiedene Erscheinungen sind — die ersteren Wirkungen des Gebirgsdruckes auf festen Kalkstein, die letzteren Wirkungen des Druckes der Sedimentdecke auf noch grösstentheils unverfestigte Kalkablagerungen.

Zur Erforschungsgeschichte der Stylolithen und Drucksuturen.

Ein reiches Verzeichniss der Stylolithen-Literatur hat 1872 H. Eck in den Abhandl. z. geolog. Spezialkarte Preussens, Bd. 1, S. 81, gegeben. Dass es jedoch auf Vollständigkeit keinen Anspruch machen kann, geht schon daraus hervor, dass die amerikanischen Arbeiten ganz darin fehlen. Ich will keineswegs versuchen ein vollständiges Verzeichniss hier zu geben, sondern nur die hauptsächlichsten Ergebnisse dieser Forschungen, soweit sie mir bekannt sind und von allgemeinerer Bedeutung erscheinen, zusammenstellen.

Stylolithen sind beschrieben aus Kalk- und Dolomitbänken des Silur, Devon, Carbon, Zechstein, Buntsandstein (Rogenstein), Muschelkalk, weissen Jura und der oberen Kreide.

Drucksuturen sind erwähnt aus Silur, Carbon, Trias, Jura und Kreide.

Gewöhnlich wird Freiesleben als derjenige erwähnt, der die Stylolithen zum ersten Mal 1807 beschrieben habe (Geognost. Arbeiten I, S. 69). Aber nach dem Auszug, den H. Eck 1872 (l. c.) gegeben hat, gebührt diese Ehre Mylius,

der in seinen Physikal. Belustigungen, Berlin 1751, aus den Rüdersdorfer Brüchen Schwielen, welche die Arbeiter Mahle nennen, „wie versteinert Holz" schildert, was sich wohl nur auf die dort, wie Quenstedt sagt, zu Millionen vorkommenden Stylolithen beziehen kann. In Amerika hat sie Eaton (in Report on the district adjoining the Erie Canal S. 134) 1824 unter dem Namen Lignilites (wegen der Aehnlichkeit mit Holzfaser) beschrieben. In Deutschland gab Klöden 1828 (Beiträge z. min.-geognost. Kenntniss der Mark Brandenburg) für die Rüdersdorfer Vorkommnisse den Namen Stylolithes sulcatus, während Vanuxem 1842 (Geology of New-York, Part III, S. 107) den Namen Epsomites aufstellte. Gegenwärtig hat sich die Klöden'sche Bezeichnung Stylolith allgemein auch in Amerika eingebürgert. Thurmann hat dafür 1856 (Essai d'orographie jurassique) das Wort diapérasmes gebildet, abgeleitet von διαπεραω, durchdringen.

Von den Drucksuturen hat Hall 1843 (Geol. of New-York, Part IV) eine charakteristische Abbildung (Fig. 53, Seite 131) gegeben. Eingehend hat sie Thurmann (l. c.) 1856 beschrieben unter dem Namen: syncollèmes diaclivaires und thlasmes diaclivaires, worauf ich nachher noch zurückkomme. Ich habe sie dann als Drucksuturen 1886, 1894 und 1899 benannt und gedeutet und Th. Fuchs hat sie (l. c.) 1894 als Stylolithenbänder bezeichnet. Trotz ihrer ungemeinen Häufigkeit sind die Lehrbücher der Geologie und Petrographie bisher stillschweigend an ihnen vorübergegangen.

Die Deutung der Stylolithen hat den Scharfsinn der Forscher auf die verschiedensten Wege geführt. Nicht weniger als sieben Theorien sind aufgestellt worden.

1. Die Petrifications-Theorie ist die älteste, die von den anderen aber bald aus dem Feld geschlagen und dann gänzlich aufgegeben worden ist. Eaton (1824) sah in den Stylolithen fossile Corallen und Klöden (1828) Abdrücke von Quallen, wofür er auch noch 1834 (die Versteinerungen der Mark Brandenburg) eintrat.

2. Die Krystallisations-Theorie hat in Amerika die vorhererwähnte alsbald abgelöst und bis 1867 die Meinungen beherrscht. Vanuxem (l. c. S. 107) betrachtet 1842 die Krystallisation von Magnesiumsulphat in dem noch weichen Sediment als die Ursache der cylindrischen Zapfen. J. Hall (l. c. 1843) glaubt, dass auch Kochsalz und Emmons (Geol. of New-York, Part II, 1842, S. 111) dass Strontium-Sulphat gleiche Erscheinungen erzeugen konnten, während aber die Coelestinkrystalle noch erhalten sind, seien die Bittersalzkrystalle aufgelöst worden und hätten nur ihre Eindrücke hinterlassen. Hunt stellte deshalb für diese Bildungen 1863 (Geology of Canada, S. 632) den Namen Crystallites auf.

In Deutschland hat sich diese Anschauung ebenfalls, aber ganz unabhängig von Amerika entwickelt, wie es scheint sogar in Unkenntniss der dortigen Arbeiten. Rossmässler und Cotta (Grundriss der Geognosie 1845—46, S. 128) brachten die Stylolithen in Verbindung mit den stängeligen Eiskrystallen, die sich im Winter im feuchten Schlamm bilden, und H. von Meyer (N. Jahrb. 1862) hält sie für Gruppen von nadelförmigen Krystallen, hauptsächlich von Gyps, die meist von demselben Gestein ausgefüllt seien, in welchem sie sich entwickelt haben.

Diese Theorie ist durch Marsh 1867 in Amerika erfolgreich widerlegt worden, in Deutschland hat sie überhaupt niemals allgemeineren Anklang gefunden.

3. Die Exhalations-Theorie mag hier nur der Vollständigkeit und der Curiosität wegen einen Platz finden. Alberti nimmt 1858 (Württemb. Jahreshefte d. Naturw., Bd. 14, S. 292) aufsteigendes Petroleum, Zelger, der den Stylolithen sogar einen langen Aufsatz im N. Jahrb. (S. 833, Bd. 22, 1870) widmete, entweichendes Gas als die causa movens an.

4. Die Regen-Theorie wurde 1852 von Quenstedt eingeführt (Handb. der Petrefactenkunde, I. Aufl.) und 1853 (Württemberg. Jahresb., Bd. 9, S. 71) eingehender besprochen. Er wurde dazu verführt durch die Aehnlichkeit der kleinen Erdpyramiden, welche der Regen unter gewissen Bedingungen

an vegetationslosen Böschungen erzeugt. Wie bei den grossen Erdpyramiden liegt auch da nicht selten ein grösseres Steinchen als Schutz obendrauf. Die Deckelschalen der Stylolithen wurden damit verglichen, und obwohl Quenstedt selbst die Schwierigkeiten erkannte, welche dieser Auffassung entgegenstehen, so hat er sie doch mit den Worten eingeführt: „alle anderen Ansichten darüber sind falsch“, und selbst dann noch, nachdem er 1861 eine ganz andere und jedenfalls viel richtigere Erklärung mit den Worten abgeschlossen hatte „dies nach langem Schwanken meine jetzige Ansicht“, hat er seine frühere Auffassung wörtlich in der Petrefactenkunde 1867 in der II. und 1885 in der III. Auflage wiederholt. Für eben solche Entstehung hat auch E. Weiss 1868 (N. Jahrb., S. 729) das Wort ergriffen.

5. Die Contractions-Theorie. Schon 1849 schrieb Strombeck (Zeitschr. Deutsch. Geol. Ges. S. 178) „eine gewisse ungleichförmige Contraction des Gesteines, die nach seiner Ablagerung erfolgte, ist die Hauptbedingung gewesen“. Aber erst 1852 hat Plieninger (Württemberg. naturw. Jahresh., Bd. 8, S. 78) dieser Vorstellung eingehendere Aufmerksamkeit gewidmet. Nach Ablagerung und Trockenlegung sollen sich im Kalkschlamm Trockenrisse gebildet haben, die durch niederrieselndes Regenwasser gestreifte Wände erhielten und aus denen dann bei der Gesteinserhärtung die gerieften Stylolithenwände wurden.

Dass diese Theorie so wenig wie eine der vorher besprochenen im Stande ist, die Entstehung der Stylolithen in zufriedenstellender Weise zu erklären, steht heutigen Tages wohl fest.

6. Die Druck-Theorie bleibt somit als einzige Zuflucht übrig und sie erfreut sich ja auch gegenwärtig allgemeinster Anerkennung, wenn schon im Einzelnen die Meinungen auch da recht weit auseinandergehen. Zuerst ist sie von Quenstedt 1837 (Wiegmanns Archiv f. Naturgesch., Bd. 2, S. 223) angedeutet worden. „Stylolithen sind durch organische Wesen geleitete Absonderungen.“ Die Muschelschalen

unterbrachen den Zusammenhang der noch weichen Gesteinsmasse in vertikaler Richtung, in der sich diese Masse zusammenzog und niedersetzte, und machten eine schnellere Zusammenziehung der aufrecht darunter oder darüber liegenden Gesteinsmassen möglich, was dann die seitlichen Absonderungen dieser Masse von dem sich langsamer setzenden Nebengestein bedingte.

So bedeutsam diese Aeusserung auch wirkte, da sie der Klöden'schen Theorie den Todesstoss versetzte, so begreift man doch leicht, dass sie nicht einmal ihren Autor auf die Dauer befriedigen konnte. Schon 1843 suchte Quenstedt (Flötzgebirge Württembergs) nach einer besseren Begründung. Er nahm an, die „leitenden Versteinerungen" hätten ein anderes specifisches Gewicht wie der sie umgebende Schlamm gehabt und wären, je nachdem dasselbe grösser oder kleiner war, langsam niedergesunken oder aufgestiegen, wobei der zurückgelegte Weg durch die vertikale Streifung im Schlamm markirt worden sei. Mit guten Gründen wurde diese Erklärung von Plieninger (l. c. 1852) bekämpft und alsbald auch von Quenstedt selbst aufgegeben, der sich inzwischen der Regentheorie zugewandt hatte. Dann aber machte er 1861 (Epochen der Natur S. 200) einen neuen Versuch, der bisher den meisten Anklang gefunden hat. Wenn zwei Kalkschichten übereinander abgelagert, aber von einer dünnen Thonschicht von einander getrennt waren, so „mochte schon der verschiedenzeitige Niederschlag gewisse Differenzen in der Härte der oberen und unteren Masse hervorbringen. Als nun die darauf lagernde Masse immer mehr drückte, riss die Lettenschicht, die untere Kalkbank drang in die obere und umgekehrt."

Diese Erklärung war nicht neu, wenn schon sie von den meisten als solche hingenommen worden ist. Neu war darin nur, dass auf das Zerreissen der Thonschicht ein besonderer Werth gelegt wurde, als ob dieselbe härter oder fester wie der Kalk gewesen wäre, was doch bei dem vorausgesetzten weichen und durchfeuchteten Zustand der Ablagerungen gar nicht der Fall sein konnte. Nach Mittheilung von H. Eck (l. c. 1872) soll Beyrich eine ähnliche Erklärung mündlich schon früher mit-

getheilt haben. Ganz sicher ist aber jedenfalls, dass Thurmann die literarische Priorität hat (l. c. 1856). Die Stylolithen sind ihm die cannellirten Zähne, mit denen die Kalkmassen im weichen Zustande ineinanderdrängen, wenn local sich Massen gegenüberliegen, die sich in ihrer Widerstandsfähigkeit gegen Druck verschiedenartig verhalten. Die einsinkende Masse wird durch die Bewegung an den Seitenwänden gerieft. Der Druck ist meist vertikal nach unten, manchmal auch horizontal gerichtet, durch ersteren entstehen die vertikalen Stylolithen auf den Schichtflächen, durch letzteren horizontale, in den Bänken von den Kluftflächen ausgehende. Wie weit Beyrich und Quenstedt durch diese Ideen Thurmanns beeinflusst waren, ist nie bekannt geworden. Dass aber auch in der ganzen späteren Stylolithen-Literatur der Arbeit dieses vortrefflichen Beobachters, die erst nach seinem Tode veröffentlicht worden ist, keine Erwähnung gethan wird, ist sehr merkwürdig, erklärt sich jedoch zum Theil aus ihrer Schwerfälligkeit und einigen Absonderlichkeiten, auf die ich weiterhin zurückkommen werde. Unter allen Umständen gebührt aber Thurmann das Verdienst, die erste physikalisch wohl begründete Erklärung der Stylolithen oder, wie er sie nennt, Diasperasmen, als Druckerscheinungen gegeben zu haben.

O. C. Marsh veröffentlichte 1867 (Proc. Americ. Assoc. Sciences, Vol. 16, S. 135—143) einen Aufsatz „on the origin of the so called Lignilites or Epsomites“, indem er auf Grund eingehender Studien über die Stylolithen Deutschlands und Nord-Amerikas die Krystallisations-Theorie bekämpfte und der Druck-Theorie in Amerika erfolgreichen Eingang verschaffte. Er lehnte sich vollständig an die Auffassung Quenstedts von 1861 an, ergänzte sie aber in mehreren Punkten. Freilich legt auch er das Hauptgewicht auf die gedeckelten Stylolithen und nennt den Deckel geradezu den Schlüssel des Mysteriums. Er meint, dass eine Schale unter der dünnen Thonschicht zwischen zwei weichen Kalklagen dem Druck von oben, der die untere Lage im Ganzen hinunterdrückt, grösseren Wider-

stand leisten müsse, so dass sie sich langsamer als die übrige Oberfläche senke und meist wie eine Säule stehen bleibe. Als Ursachen dieser grösseren Widerstandskraft zählt er auf 1. dass nach oben gewölbte Schalen wie Keile die Cohäsion der aufliegenden Massen überwunden haben, 2. dass das Gewicht des Deckels die Masse unter ihm bereits verdichtet habe, 3. dass die organische Substanz des Deckels im Kalkschlamm darunter bereits Kalkconcretionen veranlasst habe, deren Zustandekommen nach oben die hangende Thonschicht verhinderte. Liegen die Schalen statt unter über der Thonschicht, dann bilden sich Zapfen nach unten aus. Wo solche Deckel fehlen, kann die Ursache in anderweitigen Ungleichheiten der Dichtigkeit in der plastischen Kalkmasse liegen, aber die Säulen werden dann nicht so regelmässig geformt.

Der Ueberzug von Calcit-, Dolomit-, Gyps- oder Coelestin-Krystallen, der sich öfters auf den gerieften Wänden der Zapfen findet, sei nicht primär, sondern erst nachträglich durch Infiltration entstanden.

Gümbel hat sich 1882 (Z. D. geol. Ges., Bd. 34, S. 642) über diesen Gegenstand geäussert. Er schliesst sich ausdrücklich an die Auffassung von Beyrich und Quenstedt an, verräth aber in keiner Weise eine Kenntniss der wichtigen Arbeiten von Thurmann und Marsh.

Er gibt zunächst eine genaue Beschreibung der Stylolithen, in der besonders auffällt, dass er das Vorkommen horizontaler Stylolithen bezweifelt. Den Vorgang der Entstehung schildert er folgendermassen: „Die Stylolithen sind innerhalb mehrerer aufeinander lagernder, in Form eines Kalkschlammes abgesetzter, durch thonige oder mergelige Zwischenlagen abgetrennter Schichten dadurch entstanden, dass bei dem ungleichen Verhalten, bei dem Austrocknen oder Verfestigen die Thon- oder Mergellage sich zusammenzog, rissig wurde, in kleine Stückchen klüftete und dass dadurch die bisher bestehende Gleichgewichtslage der zwei aufeinanderruhenden Kalkschichten gestört wurde, die auflagernde Kalkmasse einen Druck auf die unterliegende ausübte, der bei dem Austrocknen entstandenen Raumvermin-

derung entsprechend sich senkte und dadurch einzelne kleinere, durch das Zersprengen der Thonlage abgetrennte Partien der unterliegenden Masse zu einer aufsteigenden Bewegung veranlasste. Die kleinere Masse wurde nemlich dadurch gezwungen, dem Druck der grösseren nachzugeben, was nur durch eine Bewegung nach aufwärts möglich war, da die Unterlage jede Bewegung in dieser Richtung verhinderte. Durch diese wechselseitige Bewegung, nemlich einer sich senkenden in der Hauptmasse und einer aufsteigenden in den zerstückelten kleinen Partien, entstand die zapfenförmige Verkeilung der Stylolithen mit dem einschliessenden Gestein und durch die Bewegung selbst nach dem Umriss der hierbei bahnbrechenden Schale oder Thonschieferscholle bildete sich die Cannellirung und Längsstreifung der Stylolithen. Das durch Zerreissung der unteren Thonlage abgetrennte Thonstück erscheint als die Kappe des Stylolithen, die während des Aufsteigens sich abtrennenden Thontheilchen als thoniger Ueberzug des Stylolithen." Gümbel hat diesen Vorgang experimentell nachzuahmen versucht, indem er eine mit Löchern versehene Bleiplatte zwischen zwei plastische aus Thon und Malerkreide gemischte Lagen einschaltete. Durch den Druck der Platte wurden dann stylolithenähnliche Zapfen der unteren Masse heraus- und in die obere Masse hineingepresst.

Nach Gümbel läge also das Ursächliche in dem Vorhandensein einer trennenden Thonschicht und deren Zerreissen in Folge der Austrocknung. Im Experiment soll deshalb die Bleiplatte die Rolle der zerrissenen Thonschicht spielen. Auf das Mangelhafte dieser Veranstaltung hat bereits Th. Fuchs (1894) hingewiesen, wenn schon er hierbei in einer Hinsicht Gümbel Unrecht that, nemlich mit Bezug auf „die niemals fehlende Thonkappe", die ja auch bei Gümbels Experiment erhalten wurde. Viel anfechtbarer als das Experiment erscheint mir die physikalische Begründung. Der dünnen Thonlage wird hier eine Rolle zugeschrieben, die sie gar nicht spielen konnte. Wenn die aufliegende noch weiche plastische Kalkmasse einen „grossen Druck" ausübte, so konnte die dünne

Thonschicht nicht zerreissen, höchstens zusammengepresst werden, was aber in diesem Falle gerade das Gegentheil von Zerreissen bedeutet. Auch brauchte die obere Kalkmasse keineswegs auf ein Zerreissen der Thonschicht zu warten, um auf die untere Kalkmasse einen Druck auszuüben, der sich ja durch die dünne Thonschicht hindurch längst fortgepflanzt hatte. Ein weiterer Mangel dieser Auffassung besteht auch darin, dass sie die horizontalen Stylolithen nicht erklären kann. Bereits 1883 habe ich Gümbel horizontale Stylolithen überbracht, die ich in Begleitung von Eb. Fraas beim Aufstieg von Spaichingen nach der Dreifaltigkeitskirche im weissen Jura β anstehend getroffen hatte. Auf seinen Wunsch überliess ich ihm das eine der zwei Stücke, welche einem vertikal die Kalkbank durchsetzenden Stylolithenband entnommen waren. Die Zapfen haben zum Theil eine Länge von 1 Zoll und zeigen scharfe Cannellirung. Aber erst 1888 (Zeitschr. D. geol. Ges. S. 187) gab Gümbel seinen Zweifel am Bestehen horizontaler Stylolithen auf, als er solche im Jurakalk von Burglengenfeld in der Oberpfalz aufgefunden hatte. Er suchte gleichwohl seine frühere Erklärung aufrecht zu erhalten, indem er annahm, ursprünglich vertikale Zapfen seien durch Ablenkung nach vorhandenen Spalten in horizontale Richtung gebracht worden. Wie freilich in dem weichen plastischen und noch nicht ausgetrockneten Kalkschlamm, der unter hohem Druck stand, Spalten bestehen konnten, darüber gibt er uns keine Aufklärung.

Die beste, auch heute noch stichhaltige Erklärung, ist jedenfalls diejenige Thurmanns. Liegen zwei Kalkschichten in weichem (pelomorphem) Zustand übereinander, so drückt die obere auf die untere, einerlei ob eine thonige Zwischenschicht vorhanden ist oder nicht. Ist die untere Schicht irgendwo stärker comprimirbar als sonst ringsum, oder wird ein stärkerer Druck auf sie ausgeübt, so sinkt die obere Masse dort zapfenförmig ein und erhält dabei seitliche Striemung. Die horizontalen Stylolithen sind durch Seitendruck entstanden, der aber gewöhnlich zu schwach war oder erst eintrat, als das

Gestein nicht mehr plastisch genug war, so dass diese Stylolithen sich nicht so häufig und wohl charakterisirt entwickeln konnten.

Auffällig erscheint dabei nur, dass Thurmann den vertikalen Druck und den seitlichen als von einander unabhängig und auch zeitlich getrennt ansieht und nicht die Consequenz zog, dass vertikaler Druck im Gestein von so weicher und plastischer Beschaffenheit sich auch in seitlicher Richtung fortpflanzen muss.

Darüber, warum die Massen an einigen Stellen nicht so stark oder stärker comprimirbar waren, finde ich bei Thurmann keine weiteren Angaben, und diejenigen, welche Marsh gegeben hat, sind gewiss ungenügend und erklären für die deckelfreien Stylolithen gar nichts.

7. Die Auflösungs-Theorie. So weit die bisher besprochenen Ansichten auch unter sich auseinandergehen, so haben sie alle doch das gemeinsame, dass sie die Stylolithenbildung in eine Zeit versetzen, in der die Kalksteine noch nicht ihre heutige feste Beschaffenheit besassen, sondern noch weich und plastisch waren.

Th. Fuchs ist der einzige, der ihre Entstehung in festem Gestein vor sich gehen lässt und zwar in der gleichen Weise, wie sich die Drucksuturen bilden, durch Druck und chemische Auflösung, eine Annahme, die mir aus den schon früher erwähnten Gründen nicht haltbar erscheint.

Die Drucksuturen-Literatur ist sehr viel kleiner als die über Stylolithen. Hall hat 1843 eine Abbildung derselben gegeben (l. c. Fig. 53), sie aber zu den Ligniliten oder Epsomiten gestellt und ebenso wie bei diesen in Krystallisationen ihre Entstehung gesucht.

Thurmann hingegen hat sie sehr eingehend beschrieben und abgebildet, aber in einer recht merkwürdigen Weise erklärt, die in der späteren Literatur fast keine weitere Beachtung gefunden hat, zum Theil wohl deshalb, weil sie niemanden recht einleuchten wollte, zum Theil auch, weil seine Darstellung,

wie schon erwähnt, recht schwerfällig war und man sich, um sie überhaupt zu verstehen, erst mühsam in die ihr eigenthümlichen Bezeichnungsweisen hineinarbeiten muss.

Gleichwohl ist seine erst postum erschienene Arbeit so voll von feinen Beobachtungen und Gedanken, dass es sich wohl der Mühe lohnt, sie kennen zu lernen und das um so mehr, als sie nicht ohne Einfluss auf die später von A. Heim aufgestellte Hypothese der latenten Plasticität gewesen zu sein scheint.

Thurmann geht davon aus, dass alle Sedimente nach ihrer Ablagerung sich, ehe sie ihre heutige feste Beschaffenheit erlangten, in einem pelomorphen Zustand befunden haben.

Der Pelomorphismus (πηλος Schlamm) ist dadurch bedingt, dass der feine, aus nicht wahrnehmbaren Molecülen bestehende Kalkschlamm mit Meereswasser vermischt blieb. Diese Masse ist vollkommen dehnbar und plastisch, beweglich wie Gallerte, fähig und geneigt bei geringster Erschütterung auf glatten Spalten zu zerreissen und diese Spalten wieder zu schliessen, Wasser zu verlieren, sich dadurch zusammenzuziehen und dabei auf Spalten mit rauher und zackiger Oberfläche auseinander zu reissen. Durch Druck verliert diese Masse Flüssigkeit und nimmt an Volumen ab. Gegen eine freie Oeffnung gepresst lässt sie sich in dieselbe hineinpressen, wobei sie eine der Oeffnung entsprechende Form annimmt. Durch Seitendruck wird sie gefaltet, durch vertikalen Druck von unten aufgebogen, wobei die der pelomorphen Masse etwa beigemengten lithomorphen (d. h. festen, wasserfreien) Körper, wie z. B. Muschelschalen oder Belemniten-Rostren zerbrechen oder defigurirt werden können.

Die Dauer dieses pelomorphen Zustandes war sehr lang, aber verschieden lang bei den verschiedenartigen Sedimenten, von denen einige wie z. B. die Cementmergel auch schon im noch feuchten Zustand fest werden konnten. Lithomorphe Körper, wie Oolithe, Schalen, Gehäuse und Skelettheile von Thieren, Sandkörner und Gerölle wurden bereits während der

Sedimentbildung von der pelomorphen Masse eingeschlossen, andere bildeten sich darin nachher während des pelomorphen Zustandes, wie z. B. Gänge, Nester und Geoden von Calcit, Quarz, Schwefeleisen etc. Je grösser die Menge der lithomorphen Körper war, um so geringer der Pelomorphismus.

Alle Veränderungen, die durch den pelomorphen Zustand bedingt sind, heissen Pelomorphosen, die obere und untere Grenzfläche der Schichten oder Bänke Epicliven und Hypocliven, alle anderen Spaltflächen Diacliven. Die normalen, d. h. rechtwinkelig zu den Schichtflächen stehenden und die anormalen, damit einen kleineren Winkel bildenden Diacliven sind Pelomorphosen, doch gibt es daneben auch noch unregelmässige lithomorphe Diacliven, die erst nach Beginn der Verfestigung der Sedimente entstanden sind. Die glatten pelomorphen Epicliven nennt Thurmann galenisch oder Galenien (γαληνη Meeresstille), agalenisch heissen sie, wenn sie durch Druck, Reibung und Zerreissungen entstellt sind.

Hauptdiacliven (diaclives principales) durchsetzen mehrere Schichten und gehören zwei rechtwinkelig sich kreuzenden Systemen an; Nebendiacliven (d. secundaires) setzten nur durch eine Schicht und heissen accessorisch, wenn sie anormal sind.

Die Diacliven sind entweder klaffend und leer, oder mit Calcit, niemals aber mit pelomorpher Substanz ausgefüllt, weil sie erst später entstanden sind als die von ihnen nicht mehr betroffene hangende Gesteinsschicht. Sie klaffen manchmal, wenn auch selten, bis 1 dm weit, zuweilen sind sie aber auch wieder ganz zusammengegangen (recollement). Den Volum-Schwund, welcher die Diacliven erzeugt hat, berechnet Thurmann für den von ihm untersuchten Theil des Juragebirges auf ein Zehntausendstel. Er ist bedingt durch die innere Wärme, welche das Wasser austreibt und schreitet von unten nach oben fort.

Thlasmen (θλάω quetschen, zerdrücken) heissen die Rauhigkeiten der Diacliv-Wände. Es sind ausgezogene Spitzen,

Splitter (esquilles), die beim Auseinanderreissen der pelomorphen Masse entstehen. Bei den Epicliven kommen sie nicht vor.

Schliessen sich die thlasmirten Wände (thlasmées) der Diacliven wieder zu, so können sich — und es ist dies besonders bei den secundären Diacliven der Fall — die beiderseitigen Thlasmen wieder so genau ineinander fügen, dass diese Contractionsrisse sehr leicht der Beobachtung entgehen. Es sind das Syncollemen (*συγκολλαω* zusammenleimen), und es unterliegt mir keinem Zweifel, dass damit die echten Drucksuturen gemeint sind.

Fügen sich die Thlasmen beim Schliessen der Diacliven aber nicht mehr genau ineinander, so zerdrücken sie sich gegenseitig, die Wände werden eben, glatt, wellig oder auch gestreift, und diese Oberflächenformen heissen dann Tripsen (*τριψις* Reibung). Es gibt sowohl tripsirte Diacliven als auch Epicliven.

[Ein Theil dieser Tripsen sind die wohlbekannten Rutschstreifen.]

Die tripsirten Diacliven können aber nochmals auseinandergerissen werden und es entstehen dann die Xecollemen (von *ξεκολλημα*, décollement, abgeleitet, ein Wort, das aber selbst Passow unbekannt ist und wohl *ἐκκολλημα* heissen sollte).

Die Rauhigkeiten dieser xecollirten Wände unterscheiden sich von denen der thlasmirten Wände dadurch, dass sie stärker hervortreten, aber weiter von einander abstehen. [Mir scheint, dass diese Formverschiedenheiten Wirkungen des auf den Kluftflächen zirkulirenden Wassers sind.]

Als Diaperasmen endlich werden die Stylolithen bezeichnet, wie schon weiter oben eingehender dargestellt wurde.

Der pelomorphe Zustand hat nach Thurmann im Jura noch existirt, als schon die heutigen Thäler eingeschnitten waren, denn es finden sich häufig an den Thalgehängen Felsabrutschungen mit tripsirten Wänden. Auch die grossen Verwerfungen gingen im pelomorphen Gebirge vor sich, weil die Spaltenwände gestreift sind. Die Gerölle der tertiären Nagel-

fluh waren noch pelomorph, als sie ihre gegenseitige Eindrücke erhielten (galets tripsés), mithin sind sie auch aus Zerstörung pelomorpher Juragesteine entstanden, woraus auf einen sehr raschen Abrollungsprocess geschlossen wird. Selbst die tertiären Lithodomen fanden pelomorphe Küstenfelsen vor, in die sie ihre Löcher bohrten. Lithomorphe Körper, wie z. B. Molluskengehäuse, konnten natürlich keine Pelomorphosen erleiden, wo pelomorph umgewandelte (comprimirte oder in die Länge gezogene) Steinkerne solcher Gehäuse gefunden werden, muss man annehmen, dass diese Umformung erst nach Auflösung der Schale eingetreten ist.

Vier grosse Perioden werden endlich von Thurmann unterschieden: die erste umfasst die Sedimentation der hoch pelomorphen Massen, in der zweiten öffnen sich in Folge seismischer Oscillationen die Diacliven, in der dritten treten die grossen Dislocationen (Gebirgsbildung) ein und in der vierten beginnt die Solidification des Gesteins. In allen diesen Perioden nahm der Pelomorphismus langsam aber stetig ab.

Marsh (l. c.) hat 1867 die von Hall abgebildete Drucksutur zu den unvollkommenen Stylolithen gestellt und er weist darauf hin, dass gerade solche undeutliche Säulenbildungen und Riefungen, die längs Rissen oder auch mitten im Kalkstein auftreten, recht häufig sind. Wo sie schräg zur Bankung verlaufen, schreibt er sie der Wirkung seitlichen Druckes zu, ohne indessen zu sagen, wie derselbe entstand.

Dass diese Drucksuturen nicht in dem noch weichen, sondern im bereits verfestigten Gestein und nicht in Folge von Contraction der Gesteinsmasse, sondern von Pressung und damit verbundener chemischer Auflösung entstanden sind, habe ich 1886 nachgewiesen und 1894 weiter ausgeführt. Daraufhin hat dann Th. Fuchs (l. c.) noch 1894 ebenfalls und mit besonderer Bezugnahme auf Halls Abbildungen für die Stylolithen und Drucksuturen gleiche Entstehungsart gefordert, aber im Gegensatz zu Hall und Marsh beide als Druckerscheinungen mit chemischer Auflösung in festem Gestein aufgefasst. Er gibt als besondere Begründung dieser

Vereinigung noch folgendes an: „Dass die Stylolithen nicht in weichem, nachgiebigem, sondern in bereits verfestigtem Gestein entstanden, scheint mir übrigens bereits aus der feinen, scharfen, parallelen Riefung hervorzugehen, welche die Seiten derselben zeigen und welche ein ganz charakteristisches Merkmal der Stylolithen darstellen. Ueberdies erscheinen diese Seiten oft wie polirt und bieten ganz das Bild einer Rutschfläche oder eines Harnisches dar.

Derartige Oberflächenzeichnungen können sich meiner Ansicht nach nur auf festem Gestein bilden und scheint mir die Bildung geriefter, glänzender Rutschflächen auf einer weichen teigartigen Masse nicht gut denkbar.“

Wir sehen, dass zwei Forscher dieselbe Erscheinung zu gerade entgegengesetzten genetischen Schlussfolgerungen benutzt haben.

Thurmann schliesst aus dem Vorhandensein von Riefungen und Rutschflächen auf den weichen — Fuchs auf den harten Zustand des Gesteines während deren Entstehung. In Wirklichkeit können sich dieselben sowohl im weichen wie im festen Gestein bilden. Als 1887 hinter dem Bad Sulz bei Peissenberg ein grösserer Bergrutsch eintrat in Folge der Ueberlastung eines lehmreichen Gehänges durch eine Steinbruchhalte, trat eine sehr scharfe seitliche Trennung zwischen der bewegten und der in Ruhe gebliebenen Gebirgsmasse ein. Erstere hatte sich mit allem was darauf stand, Büschen, Bäumen und Häusern, langsam abwärts bewegt, und als ich über zwei Jahre später die Stelle besuchte, waren die Rutschstreifen, die sich dabei auf der seitlichen Abrissspalte im Lehm genau in der Richtung der Bewegung gebildet hatten, noch vollkommen deutlich erhalten. Selbst einige Jahre später fand ich sie nach Entfernung des Rasenbodens immer noch sichtbar. Die Weichheit des Gesteines kann also nicht als Hinderniss für die Entstehung der Streifen auf den Stylolithen gelten, eher die Härte. Auf den Drucksuturen findet man allerdings auch eine Art von Streifung, aber sie ist ganz anders ausgebildet. Kurze riefenartige Vertiefungen wechseln mit einander ab und

geben der Oberfläche mehr ein zerhacktes als ein gestreiftes oder cannellirtes Aussehen. Chemische Auflösung kann so lange und regelmässige Furchen, wie sie die Zapfen der Stylolithen zeigen, nicht erzeugen, denn dazu gehörte, dass an den Vertiefungen immer das Nebengestein, an den Erhöhungen immer das Gestein der Zapfen widerstandsfähiger gegen Auflösung geblieben wäre, ein Zufall, der in solcher Häufigkeit und Beständigkeit nicht eingetreten sein kann.

Sitzung vom 3. Februar 1900.

1. Herr Hermann Ebert legt eine in seinem Laboratorium von den Herren Hugo Freitag und Georg Heinrich ausgeführte Arbeit: „Ueber die magnetische Susceptibilität organischer Verbindungen“ vor.

2. Herr Richard Hertwig hält einen Vortrag: „Ueber die Bedeutung der Befruchtung bei Protozoen“. Derselbe wird anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

3. Herr Alfred Pringsheim macht eine Mittheilung: „Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenz-Kreise“.

Ueber das magnetische Verhalten von Alkoholen.

Von **Gg. Heinrich.**

(Eingelaufen 10. Februar.)

Bei den Untersuchungen kam die Quincke'sche Steighöhenmethode in der Modifikation von Gust. Jäger (Sitzungsber. d. Wiener Ak. d. Wiss. Math.-nat. Kl. CVI. Abt. II) zur Anwendung.

Jeder Alkohol wurde bei 5 verschiedenen Feldstärken (von 7500 bis 11500 Kraftlinien pro cm^2) untersucht und für jede Feldstärke wurden 6 Einzelbeobachtungen gemacht.

Wir bezeichnen mit k die magnetische Susceptibilität, M das Molekulargewicht, $k \cdot M$ den Molekularmagnetismus, $\mathfrak{H}$ die Feldstärke.

Es fanden sich folgende Resultate:

1) Sämtliche Alkohole sind diamagnetisch.

2) Der Molekularmagnetismus $k \cdot M$ ist für eine Substanz nicht konstant, sondern von der magnetischen Feldstärke abhängig. Dabei nimmt der Diamagnetismus mit steigender Feldstärke ab und zwar in dem Maasse, dass in ziemlicher Annäherung für eine Substanz $k \cdot M \cdot \mathfrak{H}$ als Konstante betrachtet werden kann.

3) Für gleich hohe Alkohole, d. h. für Alkohole, die dieselbe Anzahl von Atomen, aber in verschiedener Bindung, enthalten, zeigte sich $k \cdot M \cdot \mathfrak{H}$ abhängig von der chemischen Konstitution. Die magnetischen Eigenschaften sind also für Alkohole nicht rein additiver Natur, sondern nach der Konstitution verschieden.

Die Endzahlenwerte für die untersuchten Alkohole sind:

			$k \cdot M \cdot \mathfrak{H}$
$C\,H_3\,OH$:	Methyl-Alkohol		-0.185 ± 0.004
$C_2H_5\,OH$:	Aethyl-Alkohol		-0.296 ± 0.003
$C_3H_7\,OH$:	Propyl-Alkohol.	Normal	-0.392 ± 0.009
"	"	Iso.	-0.409 ± 0.007
$C_4H_9\,OH$:	Butyl-Alkohol.	Normal	-0.520 ± 0.009
"	"	Iso.	-0.541 ± 0.008
"	Trimethylcarbinol		-0.482 ± 0.014
$C_5H_{11}\,OH$:	Amyl-Alkohol.	Iso.	-0.599 ± 0.014
"	Dimethylaethylcarbinol		-0.563 ± 0.011.

Ueber die magnetische Susceptibilität organischer Substanzen der aromatischen Reihe.

Von **Hugo Freitag**.

(Eingelaufen 10. Februar.)

Die Untersuchung wurde nach der von G. Jäger und St. Meyer in den Wiener Ak. Berichten, math.-nat. Kl. CVI, Abteilung II, angegebenen Methode ausgeführt und ergab folgende Resultate:

1) Der Molekularmagnetismus ist für die untersuchten Präparate keine rein additive Eigenschaft, sondern von der chemischen Konstitution abhängig.

2) Sämtliche untersuchte Flüssigkeiten zeigten sich diamagnetisch.

3) Der Diamagnetismus nimmt mit wachsender Feldstärke ab.

4) Zwischen dem Molekularmagnetismus k_m und der Feldstärke $\mathfrak{H}$ besteht mit guter Annäherung die Beziehung:

$$k_m\,\mathfrak{H} = \text{konst.}$$

Als Zahlenwerte dieses konstanten Produkts wurden gefunden:

		$k_m \cdot \mathfrak{H}$
C_8H_{10}:	Orthoxylol	-0.734 ± 0.006
"	Metaxylol	-0.718 ± 0.010
"	Paraxylol	0.685 ± 0.014
"	Aethylbenzol	0.675 ± 0.006
C_9H_{12}:	Pseudocumol	-0.823 ± 0.010
"	Mesitylen	-0.773 ± 0.011.

Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 2. April.)

Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, die noch für die Stellen $X = R \cdot e^{\vartheta i}$ des Convergenzkreises im allgemeinen convergirt, ist zwar unter gewissen Einschränkungen[1]) allemal eine Fourier'sche Reihe. Immerhin ist man bei der Beurtheilung der Convergenz von $\mathfrak{P}(R e^{\vartheta i})$ nicht ausschliesslich auf diejenigen Ergebnisse angewiesen, welche die allgemeine Theorie der Fourierschen Reihen liefert. Abgesehen von den elementaren Kriterien für unbedingte oder bedingte Convergenz, kommt als ein der Potenzreihe als solcher eigenthümliches Hülfsmittel das Verhalten von $\lim \mathfrak{P}(x)$ bei speciellem oder beliebigem Grenzübergange $\lim x = X$ in Betracht. In § 1 der folgenden Mittheilung wird zunächst in ganz elementarer Weise untersucht, in wieweit aus der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ auf die Convergenz von $\mathfrak{P}(X)$ geschlossen werden kann. Die Cauchy'sche bezw. Fourier'sche Integral-Darstellung der Reihen-Coefficienten führt sodann in § 2 zu einem Kriterium für die absolute Convergenz von $\mathfrak{P}(X)$. Daran schliessen sich (§ 3) Betrachtungen über Potenzreihen, welche auf dem Convergenzkreise ausnahmslos und doch nicht absolut convergiren. Schliesslich (§ 4) werden weitere Anhaltspunkte zur Beurtheilung von $\mathfrak{P}(X)$ aus dem Umstande gewonnen, dass $\mathfrak{P}(X)$ durch Trennung des Reellen und Imaginären in zwei von einander abhängige, in ihren Convergenz-Eigenschaften sich gegenseitig bedingende Fourier'sche Reihen zerfällt.

[1]) Vgl. Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 337 ff.

§ 1. Der Abel'sche Grenzwerth-Satz und seine Umkehrungen.

1. Es sei:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^{\infty} a_\nu x^\nu \qquad (a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i) \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit **endlichem** Convergenz-Bereiche, d. h. einem mit einem *gewissen* Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreise. Da man, sofern nicht schon $R = 1$ ist, $\mathfrak{P}(x)$ mit Hülfe der Substitution $x = Ry$ in die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(y) = \sum_1^{\infty} (a_\nu R^\nu) \cdot y^\nu$ mit dem Convergenz-Radius $|y| = 1$ transformiren kann, so dürfen wir, ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, im folgenden ein für allemal als Convergenz-Radius von $\mathfrak{P}(x)$ den Werth $|x| = 1$ annehmen. Ist dann $\sum a_\nu$ **convergent** und bedeutet ϱ eine reelle positive Zahl < 1, so besagt der bekannte **Abel'sche** Grenzwerth-Satz, dass:

$$\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^{\infty} a_\nu, \tag{2}$$

und daraus folgt unmittelbar, dass auch:

$$\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X) = \sum_1^{\infty} a_\nu X^\nu, \tag{3}$$

falls X eine beliebige Stelle auf dem Convergenzkreise bedeutet, für welche $\sum_1^{\infty} a_\nu X^\nu$ **convergirt**.

Es liegt auf der Hand, dass dieser Satz **nicht** ohne weiteres **umkehrbar** ist. Denn für die Convergenz von $\sum_1^{\infty} a_\nu x^\nu$ an irgend eine einzelne Stelle X der Peripherie ist nicht nur das Verhalten von $\mathfrak{P}(x)$ in der Nähe dieser speciellen Stelle X, sondern dasjenige in der Nähe des gesammten Convergenzkreises maassgebend. So würde z. B. schon das Vorhandensein **einer einzigen** Stelle X', für welche $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X')$

von der ersten oder höherer Ordnung unendlich wird, die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ für alle übrigen Stellen X definitiv ausschliessen. Auch folgt aus der Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ für irgend ein bestimmtes X nicht nur die Existenz der Beziehung (3), sondern, auf Grund einer zuerst von Herrn Stolz[1]) bewiesenen Verallgemeinerung jenes Abel'schen Satzes, die weitere Beziehung:

$$(4) \qquad \lim_{x=X} \mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu X^\nu,$$

falls x auf einem beliebigen Strahle der Stelle X zustrebt; während andererseits aus der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ keineswegs ohne weiteres auf diejenige von $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ in dem eben angegebenem Sinne geschlossen werden kann (Beispiel: $\mathfrak{P}(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$ bei $x = 1$).[2])

Ja sogar, wenn auch $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ im obigen Sinne für jede Stelle X einen bestimmten endlichen Werth besitzt, so braucht darum $\mathfrak{P}(X)$ für keinen einzigen Werth X zu convergiren $\left(\text{Beispiel: } \mathfrak{P}(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-1}}\right)$.[3])

2. Es giebt einen einzigen, besonders einfachen Fall, in welchem der in Gl. (2) bezw. (3) enthaltene Satz ohne weiteres umkehrbar ist. Um denselben zu erledigen, schicken wir zunächst den folgenden Satz voraus:

Wenn $\sum a_\nu$ *eigentlich* divergirt, so ist $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \infty$ (d. h. $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = +\infty$). Dabei soll $\sum a_\nu = \sum(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ eigentlich divergent heissen, wenn mindestens eine

1) Zeitschr. f. Math. Bd. 20 (1875), p. 370. Vgl. auch: Sitz.-Ber. Bd. 27 (1897), p. 374.

2) Vgl. auch § 2, Nr. 2.

3) Vgl. Math. Ann. Bd. 44 (1894), p. 54.

der beiden Reihen $\sum \alpha_\nu$, $\sum \beta_\nu$ **eigentlich** d. h. nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergirt).[1])

Beweis. Es sei etwa, um irgend eine Festsetzung zu treffen, $\sum_1^\infty{}' \alpha_\nu = +\infty$. Setzt man:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu = \sigma_\nu,$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Abel'schen Transformation:

$$(5) \quad \sum_1^n a_\nu \varrho^\nu = \sum_1^{m-1}{}' (\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1}) \sigma_\nu + \sum_m^{n-1}{}' (\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1}) \sigma_\nu + \sigma_n \varrho^n \quad (n > m).$$

Da $\lim_{\nu=\infty} \sigma_\nu = +\infty$, so besitzen die σ_ν für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ eine endliche **untere Grenze** g_1 (die eventuell auch negativ sein könnte). Bedeutet dann allgemein g_m die **untere Grenze** von $\sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \ldots$, so folgt aus (5):

$$\sum_1^\infty{}' a_\nu \varrho^\nu > g_1 (\varrho - \varrho^m) + g_m \cdot \varrho^m,$$

und daher, wegen $\varrho < 1$:

$$(6) \quad \sum_1^\infty{}' a_\nu \varrho^\nu \begin{cases} > g_1 - g_m \varrho^m, & \text{wenn } g_1 < 0, \\ > g_m \varrho^m, & \text{wenn } g_1 > 0. \end{cases}$$

---

[1]) Es würde nicht genügen, anzunehmen, dass lediglich:

$$\sum_1^\infty{}' (\alpha_\nu - \beta_\nu) = \infty,$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \sum_1^n{}' (\alpha_\nu - \beta_\nu) = -\infty.$$

Denn aus

$$\lim_{n=\infty} (A_n - B_n) = -\infty$$

folgt noch nicht einmal, dass eine der Zahlenfolgen A_n, B_n den Grenzwerth $-\infty$ haben müsste. Es könnte auch

$$\overline{\lim_{n=\infty}} A_n = \infty, \quad \overline{\lim_{n=\infty}} B_n = \infty,$$

dagegen

$$\underline{\lim_{n=\infty}} A_n, \quad \underline{\lim_{n=\infty}} B_n$$

endlich sein.

Unterwirft man ϱ der Bedingung:

$$(7) \qquad \varrho \geqq \frac{m}{m+1},$$

so wird:

$$\varrho^m \geqq \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m} > \frac{1}{e} \text{ für jedes (noch so grosse) } m,$$

und somit:

$$(8) \qquad \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu > g_1 + \frac{1}{e}\cdot g_m \text{ bezw. } > \frac{1}{e}\cdot g_m.$$

Da, wegen $\lim\limits_{m=\infty} \sigma_m = +\infty$, auch $\lim\limits_{m=\infty} g_m = +\infty$, so kann man m so fixiren, dass g_m, also auch $g_1 + \frac{1}{e}\cdot g_m$ eine beliebig gross vorgeschriebene positive Zahl G übersteigt. Alsdann wird aber nach Ungl. (8):

$$(9) \qquad \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu > G$$

für jedes $n > m$ und jedes $\varrho > \frac{m}{m+1}$. Mithin ergiebt sich:

$$(10) \qquad \lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = +\infty$$

und schliesslich:

$$(11) \qquad \lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu + \beta_\nu i)\cdot\varrho^\nu = \infty, \quad \text{d. h. } \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \infty,$$

ohne dass über die β_ν eine weitere Voraussetzung gemacht zu werden braucht. — Analog im Falle

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu = -\infty, \text{ bezw. } \sum_1^\infty{}^\nu \beta_\nu = \pm\infty. —$$

Ersetzt man wiederum noch a_ν durch $a_\nu X^\nu$, so folgt:

Ist $\sum a_\nu X^\nu$ *eigentlich* divergent, so wird:

$$\lim_{\varrho=\infty} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty.$$

3. Hieraus kann man zunächst den folgenden Schluss ziehen:

Besitzt für irgend eine Stelle X (auf dem Convergenzkreise) $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ einen bestimmten Werth, so kann $\sum a_\nu X^\nu$ nur *convergiren* oder *uneigentlich divergiren*.

Da aber die uneigentliche Divergenz definitiv ausgeschlossen erscheint, wenn die reellen wie die imaginären Bestandtheile der $a_\nu X^\nu$, zum mindesten von einem bestimmten Index $\nu = n$ ab, unter sich gleichbezeichnet sind, so gewinnt man den Satz:

Besitzt $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho e^{\vartheta i})$ für irgend eine Stelle $e^{\vartheta i}$ einen bestimmten Werth, und sind (zum mindesten für $\nu \geqq n$) die Terme $(\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta)$ unter sich, ebenso die Terme $(\alpha_\nu \sin \nu\vartheta + \beta_\nu \cos \nu\vartheta)$ unter sich *gleichbezeichnet*, so ist $\sum a_\nu e^{\nu\vartheta i}$ *convergent*.

Dabei gestattet die auf die Vorzeichen der Reihenglieder bezügliche Bedingung noch eine kleine Verallgemeinerung, die auf der Bemerkung beruht, dass der Convergenz-Charakter einer Reihe durch Multiplication mit einem Factor von der Form $e^{\lambda i}$ in keiner Weise geändert wird. Da die Bedingung, dass die reellen, sowie imaginären Bestandtheile der $a_\nu X^\nu$ für $\nu \geqq n$ unter sich gleichbezeichnet sein sollen, geometrisch gesprochen den Sinn hat, dass die Punkte $a_\nu X^\nu$ (abgesehen von einer endlichen Anzahl) durchweg im Innern und auf der Begrenzung eines einzigen der vier von den Axen gebildeten rechten Winkel liegen, und da andererseits durch Multiplication mit $e^{\lambda i}$ jeder Punkt lediglich eine Drehung um den Winkel λ erleidet, so kann die geometrische Bedeutung jener verallgemeinerten Bedingung dahin ausgesprochen werden: die Punkte $a_\nu X^\nu$ müssen (zum mindesten für $\nu \geqq n$) im Innern und auf der Begrenzung eines durch irgend zwei vom Nullpunkte ausgehende Strahlen gebildeten rechten Winkels liegen.

4. Sieht man von dem eben betrachteten Falle ab, so muss zu der Existenz eines endlichen $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$, falls man daraus auf die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ schliessen will, noch irgend eine andere Bedingung hinzukommen, welche in geeigneter Weise von dem Gesammtverhalten des Grenzwerthes $\lim_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ für alle möglichen X und jeden beliebigen Grenzübergang abhängen muss. Als einfachste Form einer solchen Bedingung, die sich ja auch unmittelbar als nothwendig für die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ erweist, würde sich zunächst die Prämisse $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ ergeben. Dieselbe scheint indessen nicht hinreichend zu sein, um daraus in Verbindung mit der Existenz eines endlichen $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ zu erschliessen. Dagegen hat Herr Tauber gezeigt,[1] dass eine andere für die Convergenz von $\sum a_\nu$ nothwendige Bedingung, nämlich: $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}^\nu \, \nu \, a_\nu = 0$, in Verbindung mit der hierzu gleichfalls nothwendigen Existenz eines endlichen $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho)$, stets auch die Convergenz von $\sum a_\nu$ zur Folge hat. Ich möchte dieses mir bemerkenswerth erscheinende Resultat hier gleichfalls ableiten und zunächst einige auch an sich nützliche Betrachtungen voranschicken, die ich gleich etwas allgemeiner fasse, als für den Zweck des fraglichen Beweises nothwendig wäre.

5. Setzt man:

$$(12) \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n = s_n, \quad 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n = s_n',$$

so folgt der Satz, dass für die Existenz eines endlichen $\lim_{n=\infty} s_n$, also für die Convergenz von $\sum u_\nu$, die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n'}{n} = 0$$

nothwendig erscheint aus einem etwas allgemeineren, zuerst

[1]) Monatsh. f. Math. und Phys. Jahrg. 8 (Wien 1897), p. 273.

von Kronecker bewiesenen[1]) Satzes (s. weiter unten Gl. (19)). Dieses Resultat lässt sich indessen auch in sehr einfacher Weise aus einem bekannten Cauchy'schen Grenzwerth-Satze[2]) ableiten. Darnach ist nämlich (mit einer unerheblichen Abweichung in der Formulirung):

$$(13) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_n}{n} = \lim_{\nu=\infty} (A_n - A_{n-1}),$$

falls der rechts auftretende Grenzwerth existirt. Substituirt man hier:

$$\begin{aligned} A_n &= s_1 + s_2 + \ldots + s_n \\ &= n \cdot u_1 + (n-1) \cdot u_2 + \ldots + 1 \cdot u_n \end{aligned}$$

und multiplicirt die betreffende Gleichung mit:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \text{ so wird:}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} (n \cdot u_1 + (n-1) u_2 + \ldots + 1 \cdot u_n) = \lim_{n=\infty} s_n,$$

falls $\lim_{n=\infty} s_n$ überhaupt (d. h. als endlich oder in bestimmter Weise unendlich) existirt. Ist aber $\lim_{n=\infty} s_n$ zugleich endlich, also $\sum u_\nu$ convergent, so kann man die letzte Gleichung durch die folgende ersetzen:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ u_1 + u_2 + \ldots + u_n - \frac{n u_1 + (n-1) \cdot u_2 + \ldots + 1 \cdot u_1}{n+1} \right\} = 0$$

d. h. man findet (wenn man noch der Symmetrie zu Liebe den Nenner $n+1$ durch n ersetzt):

$$(14) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{s_n'}{n} = 0.$$

Geht man statt von dem Cauchy'schen Satze (13) von dessen Stolz'scher[3]) Verallgemeinerung aus, nämlich:

$$(15) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{M_n} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{M_n - M_{n-1}}$$

[1]) Comptes rendus, T. 103 (1886), p. 980.

[2]) Analyse algébr., p. 59.

[3]) Math. Ann. Bd. 14 (1879), p. 232.—Allg. Arithm. Bd. 1, p. 178.

(wo die M_ν mit ν monoton in's Unendliche wachsen und wiederum die Existenz des rechts auftretenden Grenzwerthes vorausgesetzt wird) und substituirt:

$$(16)\left\{\begin{aligned} &\frac{A_\nu - A_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = s_{\nu-1}, \\ \text{also:}\quad &\lim_{n=\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{M_n - M_{n-1}} = \lim_{n=\infty} s_{n-1} = \lim_{n=\infty} s_n, \end{aligned}\right.$$

so wird:

$$A_\nu - A_{\nu-1} = (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1}$$

und, wenn man $\nu = 2, 3, \ldots n$ setzt und die betreffenden Gleichungen addirt:

$$(17) \qquad A_n = A_1 + \sum_2^n{}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1}.$$

Durch Einführung der Beziehungen (16), (17) in Gl. (15) nimmt daher der betreffende Grenzwerthsatz, wenn man noch beachtet, dass: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_1}{M_n} = 0$, zunächst die folgende Form an:

$$(18) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{M_n} \sum_2^n{}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1} = \lim_{n=\infty} s_n,$$

sofern $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ überhaupt existirt. Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich aber noch in folgender Weise transformiren:

$$\begin{aligned} \sum_2^n{}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1} &= \sum_2^n{}^\nu M_\nu s_{\nu-1} - \sum_1^{n-1}{}^\nu M_\nu s_\nu \\ &= \sum_2^n{}^\nu M_\nu (s_{\nu-1} - s_\nu) - M_1 s_1 + M_n s_n \\ &= M_n s_n - \sum_1^n{}^\nu M_\nu u_\nu \end{aligned}$$

(wegen: $s_1 = u_1$ und für $\nu > 1$: $s_\nu - s_{\nu-1} = u_\nu$), sodass Gl. (18) in die folgende übergeht:

$$\lim_{n=\infty} \left(s_n - \frac{1}{M_n} \sum_1^n{}^\nu M_\nu u_\nu \right) = \lim_{n=\infty} s_n.$$

Ist jetzt wiederum noch $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ eine bestimmte Zahl, d. h. $\sum u_\nu$ **convergent**, so folgt schliesslich:

$$(19)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{M_1 u_1 + M_2 u_2 + \ldots + M_n u_n}{M_n} = 0.\ ^{1)}$$

Diese Beziehung bildet also, geradeso wie die speciellere (14) eine **nothwendige** Bedingung für die **Convergenz** von $\sum u_\nu$. Dass die Bedingung (14) für die Convergenz von $\sum u_\nu$ **nicht hinreichend** ist, folgt unmittelbar aus der Bemerkung, dass es divergente Reihen mit positiven Termen $u_\nu > \nu$ giebt: so genügt z. B. die Reihe $\sum \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}$ der Bedingung (14), obschon sie **divergirt**. Was sodann die Bedingung (19) betrifft, so gelten im Falle $u_\nu > 0$ die folgenden, ohne besondere Schwierigkeit zu beweisenden Sätze:

> **Wie stark** auch $\sum u_\nu$ **divergiren** mag, so lassen sich stets monoton in's Unendliche wachsende Folgen M_ν angeben, derart dass die Relation (19) erfüllt ist.[2)]
>
> **Wie schwach** auch $\sum u_\nu$ **divergiren** mag, so lassen sich stets solche M_ν angeben, für welche der Grenzwerth (19) von Null verschieden ausfällt.

Daraus folgt dann schliesslich:

> Genügen die u_ν wo $u_\nu > 0$ bei jeder Wahl der M_ν der Beziehung (19), so ist $\sum u_\nu$ convergent.

In diesem Sinne kann also die Bedingung (19) als [illegible] für die Convergenz von $\sum u_\nu$ gelten. —

Nebenbei bemerke ich noch, dass nach dem [illegible] Satze [illegible]

[illegible]

[illegible]

sobald der rechts stehende Grenzwerth existirt. Somit ist die Beziehung (14) allemal erfüllt, wenn:

$$(20) \qquad \lim_{n=\infty} n \cdot u_n = 0$$

(aber nicht umgekehrt). Entsprechend ergiebt sich aus dem verallgemeinerten Cauchy'schen Satze (Gl. (15), dass die Relation (19) sicher besteht, wenn:

$$(21) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{M_n}{M_n - M_{n-1}} \cdot u_n = 0.$$

6. Hülfs-Satz I. Convergirt $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ für $|x| < r \leqq 1$, so gelten für $|x| < r$ die Transformationen:

$$(A) \quad \mathfrak{P}(x) = (1 - x) \cdot \sum_1^\infty {}^\nu s_\nu x^\nu$$

$$(B) \quad \mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot s'_\nu x^\nu + (1 - x) \cdot \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu + 1} \cdot s'_\nu x^\nu$$

wo:

$$s_\nu = \sum_1^\nu {}^\lambda a_\lambda, \quad s'_\nu = \sum_1^\nu {}^\lambda \lambda \cdot a_\lambda.$$

Beweis. Die Formel (A) ist sehr bekannt, wird jedoch zumeist unter wesentlich engeren Voraussetzungen abgeleitet. Sie wird hauptsächlich, nach dem Vorgange von Dirichlet,[1]) zum Beweise des Abel'schen Grenzwerthsatzes (Gl. (1)) benützt, also unter der Voraussetzung, dass $\sum a_\nu$ convergirt, d. h. $\lim_{n=\infty} s_n$ eine bestimmte Zahl vorstellt. Da in diesem Falle offenbar $\lim_{n=\infty} s_n x^n = 0$, so resultirt die Formel (A) ohne weiteres aus der Abel'schen Transformations-Gleichung:

$$(22) \qquad \sum_1^n {}^\nu a_\nu x^\nu = (1 - x) \cdot \sum_1^{n-1} {}^\nu s_\nu x^\nu + s_n x^n,$$

wenn man n in's Unendliche wachsen lässt. Wird aber die obige auf $\lim s_n$ bezügliche Annahme nicht gemacht, so müsste,

[1]) Journ. de Math. (2), T. 7 (1863), p. 253. — Ges. Werke, Bd. II, p. 305.

um von Gl. (22) zur Formel (A) zu gelangen, erst feststehen, dass $\lim_{n=\infty} s_n x^n = 0$ für $|x| < r$. Dies lässt sich in der That, auf Grund der vorausgesetzten Convergenz von $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| < r$, ohne Schwierigkeit direkt nachweisen. Noch einfacher gelangt man jedoch, ohne den Weg über die Transformation (22) zu nehmen, zur Formel (A) mit Hülfe der unmittelbar für $|x| < r \leq 1$ als richtig erkannten Beziehung:

$$(23) \qquad \frac{1}{1-x}\cdot \mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty{}^\nu x^\nu \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu s_\nu x^\nu .$$

Die Vergleichung mit (22) lehrt dann zugleich, dass allemal: $\lim_{n=\infty} s_n x^n = 0$ für $|x| < r$, sofern nur die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ einen von Null verschiedeneren Convergenz-Radius r besitzt, mag s_n im übrigen auch mit n beliebig stark in's Unendliche wachsen.

Zum Beweise der Formel (B) bemerke ich zunächst, dass gleichzeitig mit $\mathfrak{P}(x)$ auch die Reihe $x\cdot\mathfrak{P}'(x) = \sum_1^\infty{}^\nu \nu\cdot a_\nu x^\nu$ für $|x| < r$ convergirt. Daraus folgt aber auf Grund der soeben gemachten Bemerkung, dass auch:

$$(24) \qquad \lim_{n=\infty} s'_n x^n = 0, \quad x\cdot\mathfrak{P}'(x) = \sum_1^\infty{}^\nu s'_\nu x^\nu \quad \text{für:} \quad |x| < r.$$

Man hat sodann:

$$s'_\nu - s'_{\nu-1} = \nu\cdot a_\nu, \quad \text{also } a_\nu = \frac{s'_\nu - s'_{\nu-1}}{\nu} \; (\nu = 2, 3, 4, \ldots),$$

und diese Beziehungen gelten auch noch für $\nu = 1$, wenn man s'_0 die Bedeutung von 0 beilegt. Hiernach ergiebt sich:

$$(25) \qquad \begin{aligned} \sum_1^n{}^\nu a_\nu x^\nu &= \sum_1^n{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu}\cdot x^\nu - \sum_0^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1}\cdot x^{\nu+1} \\ &= \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1}\left(\frac{\nu+1}{\nu} - x\right)\cdot x^\nu + \frac{1}{n} s'_n x^n \\ &= \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)}\cdot x^\nu + (1-x)\cdot \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1}\cdot x^\nu + \frac{1}{n}\cdot s'_n\cdot x^n, \end{aligned}$$

und hieraus, mit Rücksicht auf Gl. (24) und die Convergenz von $\sum s'_\nu x^\nu$ (aus welcher a fortiori diejenige der beiden rechts auftretenden Reihen resultirt):

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu(\nu+1)} \cdot s'_\nu x^\nu + (1-x)\cdot\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu+1}\cdot s'_\nu x^\nu, \text{ q.e.d.}$$

Zusatz. Für $x = 1$ resultirt aus (25) die späterhin zu benützende Beziehung:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu = \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} + \frac{s'_n}{n}. \tag{26}$$

7. Hülfs-Satz II. Ist $\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$ (wo wiederum: $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$), so hat man:

$$\lim_{\varrho=1}(1-\varrho)\cdot\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = 0. \text{ [1]} \tag{27}$$

Beweis. Es ist:

$$\mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu + \sum_{n+1}^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu$$

$$= \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu - s_n \varrho^{n+1} + \varrho^{n+1}\left(s_n + \sum_1^\infty{}^\nu a_{\nu+n}\varrho^{\nu-1}\right).$$

Da andererseits:

$$s_n + \sum_1^\infty{}^\nu a_{\nu+n}\varrho^{\nu-1} = s_{n+1} + \sum_2^\infty{}^\nu a_{\nu+n}\varrho^{\nu-1}$$

$$= (1-\varrho)\cdot\sum_1^\infty{}^\nu s_{\nu+n}\varrho^{\nu-1} \quad \text{(mit Benützung der Formel (A))}$$

$$= \frac{1}{\varrho^n}(1-\varrho)\cdot\sum_{n+1}^\infty{}^\nu s_\nu \varrho^{\nu-1},$$

so folgt:

$$\mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu - s_n \varrho^{n+1} + \varrho(1-\varrho)\cdot\sum_{n+1}^\infty{}^\nu s_\nu \varrho^{\nu-1}, \tag{28}$$

und daher:

$$|\mathfrak{P}(\varrho)| < \sum_1^n{}^\nu |a_\nu| + |s_n| + (1-\varrho)\cdot\sum_{n+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{s_\nu}{\nu}\right| \cdot \nu\varrho^{\nu-1}. \tag{29}$$

---

[1]) Der Satz lässt sich leicht in folgender Weise verallgemeinern: Ist: $\lim_{\nu=\infty}\frac{s_n}{n^p} = 0$, so hat man: $\lim_{\varrho=1}(1-\varrho)^{1-p}\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = 0$.

Wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{s_\nu}{\nu} = 0$ lässt sich nun zu beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein n so fixiren, dass:

$$\left|\frac{s_\nu}{\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für: } \nu > n,$$

also, wenn man Ungl. (29) noch mit $(1-\varrho)$ multiplicirt:

$$(1-\varrho)\cdot|\mathfrak{P}(\varrho)| < (1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}' |a_\nu| + |s_n|\right\} + (1-\varrho)^2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sum_{n+1}^{\infty}\nu\,\varrho^{\nu-1}.$$

Da aber:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}' \nu\,\varrho^{\nu-1} < \sum_1^{\infty}{}' \nu\,\varrho^{\nu-1} = \frac{1}{(1-\varrho)^2},$$

so resultirt aus der letzten Ungleichung die folgende:

$$(30)\qquad |(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho)| < (1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}' |a_\nu| + s_n\right\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wird jetzt ϱ so eingeschränkt, dass:

$$(31)\qquad (1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}' |a_\nu| + s_n\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{d. h. } \varrho > 1 - \frac{\varepsilon}{2\left(s_n + \sum\limits_1^n{}' a_\nu\right)} \quad (\text{aber} < 1),$$

so ergiebt sich:

$$(32)\qquad |(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho)| < \varepsilon,$$

und, da ε jede noch so kleine Zahl > 0 bedeuten kann, schliesslich:

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho)\,\mathfrak{P}(\varrho) = 0. \text{ —}$$

Zusätze. (a) Ersetzt man wiederum a_ν durch $a_\nu X^\nu$, wo $|X| = 1$, so folgt:

Ist:

$$(33)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n}{n} = 0,$$

so hat man:

$$(34) \quad \lim_{\varrho=1} (1-\varrho)\cdot \mathfrak{P}(\varrho X) = \lim_{\varrho=1} (X - \varrho X)\cdot \mathfrak{P}(\varrho X) = 0.$$

(b) Die Bedingung (33) ist offenbar für jedes X mit dem absoluten Betrage $|X| = 1$ erfüllt, wenn:

$$(35) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|}{n} = 0.$$

In diesem Falle gilt also auch die Relation (34) für jedes X.

(c) Ist $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, so besteht (nach dem Cauchy'schen Satze, Gl. (13)) allemal auch die Beziehung (35) und somit wiederum auch Gl. (34) für jedes X.

8. Nunmehr beweise ich den oben erwähnten Satz des Herrn Tauber in der folgenden Fassung:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz von $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu$ besteht in den beiden Beziehungen:

$$(\mathrm{I}) \quad \lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = A \quad \text{(d. h. gleich einer bestimmten Zahl)}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \lim_{n=\infty} \frac{s'_n}{n} = 0 \qquad (\text{wo: } s'_n = 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + \ldots + n\cdot a_n).$$

Beweis. Die Nothwendigkeit der Bedingung (I) folgt aus der Stetigkeit der Potenzreihe, diejenige der Bedingung (II) aus Gl. (14), p. 44.

Um zu zeigen, dass diese Bedingungen auch hinreichen, transformire ich zunächst $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu$ mit Hülfe der Formel (B) p. 47, also:

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu\cdot(\nu+1)}\cdot \varrho^\nu + (1-\varrho)\cdot \sum_1^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1}\cdot \varrho^\nu.$$

Lässt man ϱ gegen 1 convergiren, so folgt mit Benützung der Voraussetzung (I) und des Hülfssatzes II (dessen Anwendbarkeit aus dem Zusatze c) und der Voraussetzung (II) folgt):

$$(36) \qquad A = \lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \varrho^\nu.$$

Da es hierbei gleichgültig ist, welche Folge monoton gegen 1 zunehmender Zahlenwerthe ϱ durchläuft, so hat man speciell:

$$(37) \qquad \begin{aligned} A &= \lim_{n=\infty} \sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \\ &= \lim_{n=\infty} \sum_1^n {}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu + \lim_{n=\infty} \sum_{n+1}^\infty {}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu. \end{aligned}$$

In Folge der Voraussetzung (II) kann man zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein n so fixiren, dass $\left|\frac{s'_\nu}{\nu}\right| < \varepsilon$ für $\nu > n$, also:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n+1}^\infty {}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \right| &< \frac{\varepsilon}{n+1} \cdot \sum_{n+1}^\infty {}^{\nu} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \\ &< \frac{\varepsilon}{n+1} \cdot \sum_1^\infty {}^{\nu} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu = \frac{n}{n+1} \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

d. h. es ist:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{n+1}^\infty {}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu = 0,$$

und man kann in Folge dessen die Beziehung (37) durch die folgende (nur noch von einem Grenzübergange abhängige) ersetzen:

$$(38) \qquad A = \lim_{n=\infty} \sum_1^n {}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu.$$

Man hat nun ferner, mit Benützung von Gl. (26)

$$(39) \qquad s_n = \sum_1^n {}^{\nu} a_\nu = \sum_1^n {}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} + \frac{s'_n}{n}$$

und daher in Folge der Voraussetzung (II) und Gl. (38):

$$(40) \qquad \lim_{n=\infty} (s_n - A) = \lim_{n=\infty} \sum_1^n {}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \right\}.$$

Da aber:

$$0 < 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\nu} < \frac{\nu}{n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

so wird:

$$\left| \sum_1^n {}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\nu} \right\} \right| < \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \left| \frac{s'_\nu}{\nu + 1} \right| < \frac{1}{n} \sum_1^n {}^{\nu} \left| \frac{s'_\nu}{\nu} \right|,$$

und da mit Rücksicht auf die Voraussetzung (II) und den Cauchy'schen Satz (Gl. (13)):

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \left| \frac{s'_\nu}{\nu} \right| = 0,$$

so geht Gl. (40) schliesslich in die folgende über:

$$(41) \qquad \lim_{n=\infty} (s_n - A) = 0,$$

d. h. man findet:

$$(42) \qquad \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu = A,$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

9. Substituirt man wiederum $a_\nu X^\nu$ für a_ν, so nimmt der eben bewiesene Satz die folgende Form an:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu x^\nu$ für irgend eine Stelle $x = X$, besteht in der Existenz eines endlichen $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ und der Beziehung:

$$(43) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (1 \cdot a_1 X + 2 \cdot a_2 X^2 + \ldots + n \cdot a_n X^n) = 0.$$

Ist insbesondere $\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$, also auch: $\lim_{n=\infty} n \cdot |a_n| = 0$, so hat man (s. die Bemerkung am Schlusse von Nr. 5, Gl. (20)) auch:

$$(44) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (1 \cdot |a_1| + 2 \cdot |a_2| + \ldots + n \cdot |a_n|) = 0,$$

und somit besteht in diesem Falle die Beziehung (43) für jedes X mit dem absoluten Betrage $|X| = 1$. Man gewinnt daher schliesslich noch den folgenden Satz:

> Ist $\lim\limits_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$, so convergirt $\mathfrak{P}(x) = \sum\limits_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ für *jede* Stelle X mit dem absoluten Betrage 1, für welche $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ einen endlichen Werth besitzt.

Es läge nahe aus den Sätzen in Nr. 8 und 9 durch Einführung der bekannten Integral-Form für die Coefficienten a_ν Convergenz-Bedingungen abzuleiten, welche lediglich von der Beschaffenheit der durch die Gleichung $f(x) = \lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ definirten Randfunction (vgl. den folgenden Paragraphen) abhängen. Es ist mir indessen nicht gelungen, auf diesem Wege weitere Bedingungen zu erhalten, als diejenigen, welche aus der Theorie der Fourier'schen Reihen bereits bekannt sind.

---

§ 2. Ein Kriterium für die absolute Convergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenz-Kreise.

1. Es sei wiederum:

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$$

eine Potenzreihe mit dem Convergenz-Radius $|x| = 1$. Dieselbe definirt dann zunächst für $|x| < 1$ eine eindeutige und stetige Function von x, die mit $f(x)$ bezeichnet werden möge. Für die Stellen $X = e^{\varphi i}$ auf dem Convergenz-Kreise soll sodann $f(x)$ definirt werden durch die Beziehung:

$$(2) \qquad f(X) = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X),$$

wo ϱ, wie früher, stets eine positive reelle Zahl, kleiner als 1 bedeutet. Für solche Stellen X, für welche ein (endlicher oder unendlich grosser) $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ nicht existirt,

mag $f(X)$ als undefinirt gelten. Die auf diese Weise für alle Stellen $|x| \leqq 1$ mit Ausnahme etwaiger Stellen der letztgenannten Art eindeutig definirte Function $f(x)$ soll schlechthin die zur Reihe $\mathfrak{P}(x)$ zugehörige Function und speciell $f(X)$ die zugehörige Randfunction heissen.

Es ist ohne weiteres klar, dass überall, wo $\mathfrak{P}(X)$ convergirt, die Beziehung $f(X) = \mathfrak{P}(X)$ besteht (nach dem Abel-schen Satze), und dass an allen Stellen X, über welche hinaus eine analytische Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x)$ existirt, $f(X)$ mit dieser analytischen Fortsetzung zusammenfällt. Ist ferner $\mathfrak{P}(x)$ die Reihen-Entwickelung eines gegebenen arithmetischen Ausdruckes $F(x)$, für welchen $F(X) = \lim_{\varrho = 1} F(\varrho X)$, so hat man offenbar $f(x) = F(x)$, $f(X) = F(X)$. In diesem Falle lässt sich im allgemeinen das Verhalten der Randfunction $f(X)$ aus der Natur des arithmetischen Ausdruckes $F(x)$ genau beurtheilen, und es handelt sich nun darum, aus diesem Verhalten bestimmte Schlüsse auf die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu X^\nu$ zu ziehen. Hierzu ist vor allem erforderlich, dass die Reihe $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(X)$ sich identisch erweist, was bekanntlich keineswegs ohne weiteres der Fall zu sein braucht, auch wenn für $f(X)$ wirklich eine convergente Fourier'sche Reihe existirt.

Wie ich bei früherer Gelegenheit gezeigt habe,[1] basirt aber das etwaige Zusammenfallen von $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourier-schen Reihe für $f(X)$ nicht allein auf der Beschaffenheit dieser Randfunction, d. h. auf dem Verhalten von $\lim_{\varrho=1} f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})$ als Function der reellen Veränderlichen ϑ, vielmehr auf dem Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung der Stellen X — wobei unter der „Umgebung" einer solchen Stelle X immer nur derjenige Theil der Gesammt-Umgebung zu verstehen ist, welcher dem Inneren und der Peripherie des Einheitskreises angehört.

[1] Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 346 ff.

2. Zur Kennzeichnung der eigenthümlichen Eventualitäten, welche bezüglich des Verhaltens von $f(x)$ in der Umgebung der Stellen X thatsächlich eintreten können, bemerke ich, dass aus der Stetigkeit von $f(x)$ längs eines etwa von den Punkten $X_0 = e^{\vartheta_0 i}$, $X_1 = e^{\vartheta_1 i}$ begrenzten Einheitskreis-Bogens und auf jedem Radius $\overline{OX'}$, wo X' jeden beliebigen Punkt jenes Bogens bedeutet,[1] noch keineswegs folgt, dass $f(x)$ in der Umgebung einer solchen Stelle X' stetig sein müsse oder dass daselbst auch nur $|f(x)|$ unter einer endlichen Grenze bleibe. Die hierin ausgesprochene Thatsache, dass nämlich aus der Stetigkeit einer (für ein zweidimensionales Continuum definirten) Function in zwei auf einander senkrechten Richtungen noch keineswegs deren Gebiets-Stetigkeit (im üblichen Sinne) resultirt, ist zwar für Functionen zweier reeller Variabeln längst bekannt.[2] Dass dieselbe aber auch an den Grenzstellen analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen vorkommen kann, ist meines Wissens bisher nicht bemerkt worden, und es mag daher nicht überflüssig erscheinen, die fragliche Erscheinung durch ein einfaches Beispiel zu illustriren.

Es sei zunächst für $|x| < 1$:

$$f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x-1}\right)^4}.$$

Für jedes von 1 verschiedene $X = e^{\vartheta i} (-\pi \leqq \vartheta \leqq +\pi)$, also für jedes von 0 verschiedene ϑ hat man auf Grund der zur Definition der Randfunction gegebenen Festsetzung:

$$f(e^{\vartheta i}) = \lim_{\varrho=1} e^{-\left(\frac{1}{\varrho e^{\vartheta i}-1}\right)^4} = e^{-\left(\frac{1}{e^{\vartheta i}-1}\right)^4},$$

und wegen:

---

[1] Die Stetigkeit von $f(X')$ in der Richtung des Radius, ist allemal da vorhanden, wo ein bestimmtes endliches $f(X')$ überhaupt existirt, da ja die definirende Existenz-Bedingung $f(X') = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X')$ mit der betr. Stetigkeits-Bedingung zusammenfällt.

[2] Vgl. Encyklopädie der Math. Wissensch. Bd. II, p. 48, Fussn. 254.

$$e^{\vartheta i} - 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} - e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}\right) = 2i \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \sin\frac{\vartheta}{2},$$

schliesslich:

$$f(e^{\vartheta i}) = e^{-\frac{1}{16} \cdot \frac{\cos 2\vartheta - i \sin 2\vartheta}{(\sin \frac{1}{2}\vartheta)^4}}$$

(für jedes ϑ ausser $\vartheta = 0$). Ferner wird:

$$f(1) = \lim_{\varrho = 1} e^{-\left(\frac{1}{\varrho - 1}\right)^4} = 0,$$

und andererseits auch:

$$\lim_{\vartheta = 0} f(e^{\vartheta i}) = 0,$$

sodass also $f(x)$ nicht nur für jede von $x = 1$ verschiedene Stelle, sondern auch noch für $x = 1$ in der Richtung des betreffenden Radius und längs der Peripherie stetig ist.

Zieht man jetzt aber solche Stellen x in Betracht, welche auf der die Punkte i und 1 verbindenden Geraden liegen, d. h. setzt man:

$$x = \xi + (1 - \xi) \cdot i \quad (0 < \xi < 1),$$

so folgt:

$$x - 1 = (\xi - 1)(1 - i),$$

und (wegen $(1 - i)^4 = -4$):

$$f(x) = e^{+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\xi - 1}\right)^4},$$

sodass also $f(x)$ für $\lim \xi = 1$, d. h. wenn x auf der Geraden $\overline{i1}$ der Stelle $x = 1$ zustrebt, unendlich gross (von unendlich hoher Ordnung) wird.

Die Function $f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x - 1}\right)^4}$ ist also für keine noch so kleine Umgebung der Stelle $x = 1$ stetig oder auch nur endlich,[1]) obschon sie auf jedem Radius und längs der Peripherie ausnahmslos stetig ist.

---

[1]) D. h. absolut genommen unter einer festen positiven Zahl bleibend.

Da man sich im übrigen solche Stellen, wie sie die eben betrachtete Function für $x = 1$ besitzt, auf dem Einheitskreise beliebig condensirt denken kann, so ist sogar die Möglichkeit vorhanden, dass eine im Einheitskreise convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ eine auf jedem Radius und längs der gesammten Peripherie endliche und stetige Randfunction $f(X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ besitzt, ohne dass $f(x)$ in der Umgebung irgend einer einzigen Stelle X stetig ist oder auch nur endlich bleibt.

3. Die Uebereinstimmung von $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourierschen Reihe für $f(X)$ hängt wesentlich und ausschliesslich davon ab, dass die Gleichung:

$$(3) \qquad \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_\varrho)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt \quad (|x| < \varrho),$$

wo C_ϱ einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis mit dem Radius ϱ bedeutet, noch richtig bleibt, wenn man diesen Integrations-Kreis durch den Einheitskreis C_1 ersetzt. Hierzu wäre offenbar hinreichend, dass $f(X)$ für jede einzelne Stelle X einen bestimmten endlichen Werth besitzt und $f(\varrho X)$ bei $\lim \varrho = 1$ durchweg gleichmässig gegen den betreffenden Werth $f(X)$ convergirt. Kann nun aber auch schon das Vorhandensein einer einzigen Stelle X', für welche die eben genannte Bedingung nicht erfüllt, die Existenz der Gleichung (3) für $\varrho = 1$ hinfällig machen, selbst wenn $f(X')$, wie in dem Beispiele von Nr. 2, einen bestimmten, den benachbarten Randwerthen stetig sich anschliessenden Werth besitzt, so ist andererseits jene Bedingung doch sehr weit davon entfernt, eine nothwendige zu sein, da sogar dann, wenn sie für unendlich viele Stellen X' nicht erfüllt ist, noch die Möglichkeit besteht, in der Gleichung (3) C_ϱ durch C_1 zu ersetzen. Diese Möglichkeit beruht nämlich (abgesehen von gewissen, sogleich anzugebenden Einschränkungen) nicht sowohl auf der Anzahl der etwaigen Ausnahmestellen X', als vielmehr auf dem besonderen Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung jener

Stellen X'. In dieser Hinsicht sind folgende zwei Eventualitäten vorhanden:

(I) $|f(x)|$ bleibt in der Umgebung von X' durchweg unter einer endlichen Grenze. Wie ich in der oben citirten Abhandlung gezeigt habe,[1]) wird durch das Auftreten einer solchen Stelle die Möglichkeit, in Gl. (3) den Integrationsweg C_ϱ durch C_1 zu ersetzen in keiner Weise alterirt (gleichgültig, ob $f(X')$ selbst einen bestimmten Werth besitzt oder nicht). Das gleiche gilt dann auf Grund bekannter Methoden der Integral-Theorie auch dann noch, wenn Stellen X' der bezeichneten Art, eine unausgedehnte Menge bilden.

(II) $|f(x)|$ nimmt in der Umgebung von X' beliebig grosse Werthe an (wobei es wiederum gleichgültig ist, ob $f(X')$ einen endlichen oder unendlich grossen Werth besitzt oder überhaupt nicht definirt ist). Auch in diesem Falle bleibt Gl. (3) noch für den Integrationsweg C_1 gültig, wenn $f(x)$ bis an die Stelle X' absolut integrabel ist, sobald der Integrationsweg dem Innern oder der Peripherie des Einheitskreises angehört, d. h. wenn das Integral $\int_{x_0}^{X'} |f(x)| \cdot dx$ für jeden solchen Weg gleichzeitig mit der Länge dieses Weges beliebig klein wird. Dieses zunächst für den Fall einer solchen Stelle geltende Resultat bleibt dann wiederum noch bestehen, wenn Stellen X' der bezeichneten Art eine reductible Menge bilden.[2])

Wenn nun $f(\varrho X)$ im allgemeinen, d. h. höchstens mit den soeben sub (I) und (II) als zulässig statuirten Ausnahmen, für $\lim \varrho = 1$ gleichmässig gegen die endlichen Randwerthe $f(X)$ convergirt, so wollen wir den hierdurch definirten Charakter von $f(x)$ durch den Ausdruck bezeichnen: Es sei $f(x)$ und $|f(x)|$ in und auf dem Einheitskreise gleichmässig integrabel. In diesem Falle darf man dann die Gleichung (3) auch durch die folgende ersetzen:

[1]) a. a. O. p. 346.
[2]) Vgl. Harnack, Math. Ann. Bd. 24 (1884), p. 224.

$$(4)\qquad \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_1)} \frac{f(t)}{t-x}\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(e^{\vartheta i})\cdot e^{\vartheta i}}{e^{\vartheta i}-x}\cdot d\vartheta \quad (|x|<1),$$

woraus dann weiter folgt, dass:

$$(5)\qquad a_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot e^{-\nu\vartheta i}\cdot d\vartheta.$$

Da andererseits zunächst:

$$\int_{(C_\varrho)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0 \quad \text{für jedes } \varrho<1 \text{ und } \nu=1,2,3,\ldots,$$

und in Folge der vorausgesetzten gleichmässigen Integrabilität von $f(x)$ und $|f(x)|$ auch:

$$\int_{(C_1)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = \lim_{\varrho=1}\int_{(C_\varrho)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0,$$

also:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot e^{\nu\vartheta i}\cdot d\vartheta,$$

so folgt, wenn man diese letzte Gleichung einmal zu Gl. (5) addirt, das andere Mal davon subtrahirt:

$$(6)\qquad a_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot \cos\nu\vartheta\cdot d\vartheta \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot \sin\nu\vartheta\cdot d\vartheta, \end{cases}$$

d. h. die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu\cdot e^{\nu\vartheta i}$ ist mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch.

4. Mit Hülfe dieses Ergebnisses und der Zerlegung:

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu e^{\nu\vartheta i} = \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu+\beta_\nu i)(\cos\nu\vartheta + i\cdot\sin\nu\vartheta)$$

$$= \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu\cos\nu\vartheta - \beta_\nu\sin\nu\vartheta) + i\sum_1^\infty{}^\nu (\beta_\nu\cos\nu\vartheta + \alpha_\nu\sin\nu\vartheta)$$

könnte man aus einem von Harnack[1]) bewiesenen Satze erschliessen, dass die Reihe $\sum(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)$, also: $\sum|a_\nu|^2$ convergirt, sobald zu den bereits gemachten Voraussetzungen noch die weitere hinzukommt, dass auch $|f(e^{\vartheta i})|^2$, d. h. $|f(X)|^2$ längs des Einheitskreises, integrabel ist.

Man kann indessen dieses Resultat mit den hier zu Gebote stehenden Hülfsmitteln in etwas einfacherer Weise ableiten, wenn man statt der gleichmässigen Integrabilität von $|f(x)|$ von vornherein diejenige von $|f(x)|^2$ voraussetzt.

Man hat für $\varrho < 1$:

$$\sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu+\beta_\nu i)\cdot\varrho^\nu\cdot e^{\nu\vartheta i} = f(\varrho\cdot e^{\vartheta i}), \tag{7}$$

und wenn

$$\sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu-\beta_\nu i)\cdot x^\nu = \overline{f(x)} \quad (|x|<1)$$

gesetzt wird:

$$\sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu-\beta_\nu i)\cdot\varrho^\nu\cdot e^{-\nu\vartheta i} = \overline{f(\varrho\cdot e^{-\vartheta i})}. \tag{8}$$

Berücksichtigt man, dass:

$$f(\varrho\cdot e^{\vartheta i})\cdot\overline{f(\varrho\cdot e^{-\vartheta i})} = |f(\varrho\cdot e^{\vartheta i})|^2,$$

so ergiebt sich durch Multiplication der Gleichungen (7) und (8):

$$\sum_1^\infty{}^\nu(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\cdot\varrho^{2\nu}+\sum_1^\infty{}^\nu\sum_1^\infty{}'^\mu(\alpha_\mu+\beta_\mu i)(\alpha_\nu-\beta_\nu i)\varrho^{\mu+\nu}\cdot e^{(\mu-\nu)\cdot\vartheta i} \tag{9}$$
$$= |f(\varrho\cdot e^{\vartheta i})|^2,$$

wobei der Accent bei dem Doppelsummen-Zeichen ausdrücken soll, dass die Combination $\mu=\nu$ wegzulassen ist. Da nun:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{(\mu-\nu)\cdot\vartheta i}\cdot d\vartheta = 0 \qquad \left(\mu,\nu=1,2,3,\ldots\ \mu\gtrless\nu\right),$$

so folgt aus (9) durch Multiplication mit $d\vartheta$ und Integration in den Grenzen $-\pi$ bis $+\pi$:

[1]) Math. Ann. Bd. 19 (1882), p. 255. — Serret-Harnack, Differential- und Integral-Rechnung, Bd. II, 1 (1885), p. 346.

$$(10)\qquad 2\pi \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \, |a_\nu|^2 \cdot \varrho^{2\nu} = \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta .$$

Da ferner, in Folge der vorausgesetzten **gleichmässigen** Integrabilität von $|f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|$:

$$\lim_{\varrho = 1} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta = \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta ,$$

so findet man zunächst:

$$\lim_{\varrho = 1} \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \, |a_\nu|^2 \cdot \varrho^{2\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta$$

und, da die betreffende Reihe ausschliesslich positive Glieder enthält, mit Rücksicht auf Nr. 3 des § 1, schliesslich:

$$(11)\qquad \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \, |a_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta ,$$

sodass also $\sum |a_\nu|^2$ als convergent erkannt wird.

Es besteht somit der folgende Satz:

> Ist die zur Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ zugehörige Function $f(x)$ nebst dem Quadrate ihres absoluten Betrages *in* und *auf* dem Convergenzkreise $|x| = 1$ gleichmässig integrabel,[1]) so convergirt die Reihe $\sum |a_\nu|^2$.

5. Um aus diesem Resultate weitere Schlüsse zu ziehen, formuliren wir zunächst den folgenden Hülfssatz:

[1]) Setzt man voraus, dass $|f(x)|$ für $|x| < 1$ durchweg unter einer endlichen Grenze bleibt, so folgt aus der gleichmässigen Integrabilität von $f(x)$ schon eo ipso diejenige von $|f(x)|$ und $|f(x)|^2$. In diesem Falle kann man auch statt der Integrale die von mir zur Darstellung der Mac Laurin'schen Reihen-Coefficienten angewendeten Mittelwerthe (vgl. Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 92; Math. Ann. Bd. 47 (1896), p. 157) einführen und das betreffende Resultat, mit Beibehaltung der im Texte benützten Schlussweise, lediglich mit den Hülfs-Mitteln der elementaren Functionen-Theorie ableiten.

Ist $\sum |a_\nu|^2$ convergent und bedeutet $\sum C_\nu^{-1}$ irgend eine convergente Reihe mit positiven Termen, so convergirt auch die Reihe $\sum C_\nu^{-\frac{1}{2}} \cdot |a_\nu|$.[1])

Derselbe ist lediglich eine besondere Form des auf der bekannten Ungleichung:

$$\sqrt{p_\nu \cdot q_\nu} \leq \tfrac{1}{2}(p_\nu + q_\nu) \quad (p_\nu > 0,\ q_\nu > 0)$$

beruhenden, schon bei anderer Gelegenheit[2]) von mir benützten Satzes, dass aus der Convergenz der beiden Reihen $\sum p_\nu$, $\sum q_\nu$ stets diejenige von $\sum \sqrt{p_\nu \cdot q_\nu}$ resultirt.

Aus dem obigen Hülfssatze folgt dann, dass unter den bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ gemachten Voraussetzungen jede Reihe von der Form $\sum C_\nu^{-\frac{1}{2}} \cdot |a_\nu|$, z. B. $\sum \frac{|a_\nu|}{\nu^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$, $\sum \frac{|a_\nu|}{\sqrt{\nu} \cdot \lg \nu}$ etc. convergiren muss.

Angenommen nun, es gehöre zu der Potenzreihe:

$$(12) \qquad \mathfrak{P}'(x) = \sum_1^\infty {}^\nu\, \nu\, a_\nu \cdot x^{\nu-1}$$

eine Function $f_1(x)$, welche, ebenso wie $|f_1(x)|^2$, in und auf dem Einheitskreise gleichmässig integrabel ist, so ergiebt sich aus dem Satze der vorigen Nummer zunächst die Convergenz von $\sum \nu^2 \cdot |a_\nu|^2$ und somit auf Grund des obigen Hülfssatzes diejenige jeder Reihe von der Form $\sum C_\nu^{\frac{1}{2}} \cdot \nu \cdot |a_\nu|$,

$$\text{z. B.} \qquad \sum \nu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot |a_\nu|, \quad \sum \frac{\sqrt{\nu}}{\lg \nu} \cdot |a_\nu|.$$

Daraus folgt dann a fortiori, dass $\sum |a_\nu|$ convergirt und somit $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem ganzen Einheitskreise absolut convergent ist.

[1]) Unrichtig wäre es, mit Harnack (Math. Ann. a. a. O.) aus der Convergenz von $\sum |a_\nu|^2$ auf das Verschwinden von $\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot |a_\nu|^2$ schliessen zu wollen (vgl. meine Bemerkungen Math. Ann. Bd. 35 (1890), p. 343 ff.).

[2]) Sitz.-Ber. Bd. 29 (1899), p. 263.

Die der Function $f_1(x)$ auferlegten Bedingungen sind aber sicher erfüllt, wenn die zu $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ eine Derivirte $f'(x)$ besitzt, welche in der Umgebung[1]) der Peripherie-Stellen X im allgemeinen[2]) stetig ist und deren Quadrat höchstens für eine reductible Menge von Stellen X' von der Ordnung $1 - \varepsilon$ oder doch von einer „hinlänglich“[3]) niedrigeren, als der ersten

$$(\text{z. B. wie } \frac{1}{x}\left(\lg \frac{1}{x}\right)^{-(1+\varepsilon)} \text{ etc. bei } x = 0)$$

unendlich wird. Denn für $|x| < 1$ hat man ohne weiteres $f_1(x) = f'(x)$ und sodann auf Grund der in Nr. 1 getroffenen Festsetzungen: $f_1(X) = \lim_{\varrho=1} f'(\varrho X) = f'(X)$. Man gewinnt auf diese Weise den folgenden Satz:

> **Besitzt die zur Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ eine in der Umgebung der Convergenzkreis-Stellen noch im allgemeinen stetige Derivirte, deren *Quadrat* höchstens für eine reductible Menge solcher Stellen von hinlänglich niedrigerer Ordnung als der *ersten* unendlich wird, so ist $\sum a_\nu x^\nu$ noch auf dem Convergenzkreise *absolut convergent*.**

6. Dieses Kriterium ist von erheblich grösserer Tragweite, als das bekannte, auf einer gelegentlichen Bemerkung des Herrn Lipschitz[4]) beruhende, welches die ausnahmslose Stetigkeit der ersten und ausserdem noch die eindeutige Existenz und Endlichkeit der zweiten Derivirten fordert.

---

[1]) Diese Bezeichnung ist wiederum nur in dem am Schlusse von Nr. 1 definirten Umfange zu verstehen.

[2]) D. h. mit eventueller Ausnahme einer unausgedehnten Menge, für welche $f'(X)$ endlich-unstetig wird, bezw. nicht existirt, aber in der Umgebung endlich bleibt.

[3]) D. h. in der Weise, dass $|f'(x)|^2$ integrabel bleibt.

[4]) Lehrbuch der Analysis, Bd. II, p. 492. Vgl. auch Math. Ann. Bd. 25 (1885), p. 425.

Die Convergenz-Theorie der Fourier'schen Reihen würde auf Grund der über $f''(x)$ gemachten Voraussetzungen nur den Schluss gestatten,[1]) dass $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem Convergenzkreise noch ausnahmslos convergirt.[2]) Daraus folgt aber noch keineswegs die absolute Convergenz dieser Reihe, wie im folgenden Paragraphen noch des näheren erörtert wird.

Das nämliche Resultat würde sich auch aus dem Satze am Schlusse von § 1 (p. 54) ergeben, wenn man berücksichtigt, dass aus der Integral-Darstellung der a_ν (Gl. (6)) durch partielle Integration (welche wegen der über $f''(x)$ gemachten Voraussetzungen gestattet ist) sich ergiebt:

$$a_\nu = \frac{1}{\nu\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(e^{\vartheta i}) \cdot \sin\nu\vartheta \cdot d\vartheta$$

und daher:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0. -$$

Einen Schluss auf die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ gestattet dagegen ein von Heine[3]) mitgetheilter Satz über die Art des Verschwindens der Fourier'schen Reihen-Coefficienten bei unendlich wachsendem Index. Darnach würde aus der Voraussetzung, dass $f'(e^{\vartheta i})$ nur von niedrigerer Ordnung als der $\frac{1}{2}$-ten unendlich werden darf, folgen, dass $\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{2}} \cdot a_\nu = 0$, woraus dann ohne weiteres die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ hervorgeht. Der betreffende Satz gilt indessen nur für den Fall, dass $f'(e^{\vartheta i})$ der Dirichlet'schen Bedingung genügt. Zwar behauptet Heine ausdrücklich seine Gültig-

[1]) S. z. B. Serret-Harnack a. a. O., p. 353. Um das betreffende Resultat anzuwenden, hat man nur zu beachten, dass aus:

$$f(e^{\vartheta i}) = F(\vartheta)$$

sich ergiebt:

$$F'(\vartheta) = i \cdot e^{\vartheta i} \cdot f'(e^{\vartheta i}).$$

[2]) Dabei bliebe übrigens Schlussweise und Resultat noch gültig, wenn $f'(x)$ selbst (nicht erst $f''(x)$) in der angegebenen Art unendlich wird.

[3]) Handbuch der Kugelfunctionen, Zweite Auflage, Bd. I, p. 63.

keit auch für den Fall, dass die Function an einzelnen Stellen, wo sie nicht unendlich wird, unendlich viele Maxima und Minima besitzt. Sein Beweis aber, wenn ich ihn anders richtig verstehe, scheint mir diesen Fall nicht zu umfassen, und ich möchte sogar den Satz selbst alsdann für unrichtig halten. Gerade durch das Auftreten unendlich vieler Maxima und Minima wird die Regelmässigkeit in der Abnahme der Reihencoefficienten im allgemeinen zerstört, und es tritt eben an die Stelle der Beziehung $\lim_{\nu=\infty} \nu^{1} \cdot a_\nu = 0$ lediglich die Convergenz der Reihe $\sum \nu^{1-\varepsilon} \cdot a_\nu$ (welche unmittelbar aus der Existenz jener Beziehung folgen würde, aber nicht umgekehrt).

Da alle Schwierigkeiten und Ausnahmefälle in der Theorie der Fourier'schen Reihen von dem eventuellen Vorkommen unendlich vieler Maxima und Minima herrühren, so scheint mir ein wesentlicher Vorzug des oben gegebenen Kriteriums gerade darin zu liegen, dass es in dieser Hinsicht nicht die geringste Einschränkung verlangt.

7. Im übrigen sind die in jenem Satze, bezüglich der Existenz und des Verhaltens von $f'(x)$ für die Stellen X, eingeführten Voraussetzungen sehr weit davon entfernt, für die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ nothwendige zu sein. Dies geht schon daraus hervor, dass dieselben ja nicht nur die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$, sondern sogar diejenige von $\sum \nu^{1-\varepsilon} \cdot a_\nu X^\nu$ nach sich ziehen. Man könnte darnach eine schärfere Form des fraglichen Kriteriums etwa dadurch erzielen, dass man statt der ersten Derivirten eine solche mit ächt gebrochenem Index[1]) in Betracht zieht: für seine praktische Anwendbarkeit würde indessen auf diese Weise kaum etwas gewonnen werden.

Andererseits lehrt ein Blick auf die bekannte Weierstrass'sche Function $\sum a_\nu \cdot x^{b^\nu}$ ($a < 1$, b eine ungerade ganze

[1]) Riemann, Ges. Werke, XIX, p. 332. — Hadamard, Journ. de Math. 4ième Série, T. 8 (1892), p. 154.

Zahl, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$), dass es Potenzreihen giebt, welche auf dem Convergenzkreise absolut convergiren, ohne für irgend eine Stelle desselben eine bestimmte Derivirte zu besitzen. Die Natur dieses Beispiels lässt zugleich deutlich erkennen, dass die Existenz eines im allgemeinen endlichen $f'(X)$ durch die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ in keiner Weise präjudicirt wird (ähnlich, wie etwa die Convergenz oder Divergenz von $\sum a_\nu$ über die Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ nicht das geringste aussagt). Bedeutet nämlich a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) irgend eine Folge reeller oder complexer Zahlen von der Beschaffenheit, dass $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$, $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} = 1$, so besitzt nicht nur die Potenzreihe: $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu X^\nu$, sondern auch jede aus ihr herausgehobene Potenzreihe: $\overline{\mathfrak{P}(x)} = \sum a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ den Convergenzradius 1. Die zu $\mathfrak{P}(x)$ gehörige Function $f(x)$ kann dann auf dem Convergenzkreise das denkbar einfachste Verhalten zeigen, nämlich für alle Stellen mit Ausnahme einer einzigen noch regulär sein, gleichgültig ob $\sum |a_\nu|$ convergirt oder divergirt. Andererseits lässt sich die Folge der natürlichen Zahlen m_ν allemal (auf unendlich viele Arten) so auswählen, dass $\sum |a_{m_\nu}|$ (also $\sum a_{m_\nu} X^{m_\nu}$ absolut) convergirt und zugleich der Convergenzkreis eine singuläre Linie für $\sum a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ bildet: bei passender Annahme der a_ν und m_ν kann man insbesondere erzielen, dass die zu $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ gehörige Function $\overline{f(x)}$ für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen X kein endliches $\overline{f'(x)}$ besitzt. Mit anderen Worten: Gerade derjenige Process, welcher hier die absolute Convergenz der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ auf dem Convergenzkreise zur Folge hat, nämlich das Herausheben der Theilreihe $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ aus der Reihe $\mathfrak{P}(x)$, zerstört in diesem Falle die Existenz einer im allgemeinen endlichen und stetigen Derivirten. Beispiel: Man setze $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, $m_\nu = 2^\nu$. Die Reihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{\nu} \cdot x^{\nu}$$

convergirt für $|x| = 1$ nur noch bedingt, ausser für die Stelle $x = 1$, wo sie eigentlich divergirt; für alle übrigen Stellen verhält sich die zugehörige Function regulär, besitzt also endliche Derivirte jeder Ordnung.

Andererseits convergirt die Reihe: $\overline{\mathfrak{P}(x)} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{2^{\nu}} \cdot x^{2^{\nu}}$ auf dem Convergenzkreise noch absolut, die zugehörige Function besitzt aber für alle Stellen $X = e^{(\frac{1}{2})^{n} \cdot m\pi i}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ keine endliche Derivirte, da die Reihe $\overline{\mathfrak{P}'(x)} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} x^{2^{\nu}}$ daselbst eigentlich divergirt und somit

$$\bar{f}'(\bar{X}) = \lim_{\varrho = 1} \overline{\mathfrak{P}'}(\varrho X) = \infty$$

wird (nach § 1, Nr. 2).

---

§ 3. Potenzreihen, welche auf dem Convergenzkreise ausnahmslos und dennoch nicht absolut convergiren.

1. Ich habe bei früherer Gelegenheit[1]) darauf aufmerksam gemacht, dass zwar alle bekannteren Potenzreihen, die auf dem Convergenzkreise noch bedingt convergiren, daselbst mindestens eine Divergenzstelle besitzen, dass es nichts destoweniger Potenzreihen giebt, welche auf dem Convergenzkreise ebenfalls nur bedingt, aber ausnahmslos convergiren. Nachdem ich a. a. O. einen allgemeinen Typus von Reihencoefficienten a_{ν} mitgetheilt, für welche $\sum a_{\nu} x^{\nu}$ die fragliche Eigenschaft besitzt, habe ich daran die Frage geknüpft, ob sich nicht auch im Einheitskreise analytische, durch geeignete Singularitäten auf der Peripherie charakterisirte Functionen angeben lassen, deren Mac Laurin'sche Entwickelung

[1]) Math. Ann. Bd. 25 (1885), p. 419.

auf der Peripherie ausnahmslos und doch nur bedingt convergirt. Diese Frage kann auf Grund derjenigen allgemeinen Betrachtungen, welche ich in einer anderen, oben bereits citirten Arbeit[1]) angestellt habe, und durch Angabe sehr einfacher Beispiele in bejahendem Sinne entschieden werden. Man setze etwa:

(1) $$f(x) = e^{\frac{x}{x-1}},$$

sodass also:[2])

(2) $$f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu,$$
$$\text{wo: } a_0 = 1 \text{ und für } \nu > 1 : a_\nu = \sum_0^\nu{}^\varkappa \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} (\nu - 1)_{\varkappa-1}.$$

Die Function ist auf der gesammten Peripherie des Einheitskreises noch regulären Verhaltens mit Ausnahme der Stelle $x = 1$. Hier wird:

(3) $$f(1) = \lim_{x=1} f(x) = 0,$$

und zwar allemal, wenn x auf einen beliebigen Strahl aus dem Innern der Stelle 1 zustrebt. Andererseits hat man:

(4) $$f(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2}} \left\{\cos\left(\tfrac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) - i\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right)\right\} \quad (\vartheta \lesseqgtr 0),$$

sodass also $f(e^{\vartheta i})$ bei $\vartheta = 0$ mit unendlich vielen Oscillationen endlich-unstetig wird. Die Fourier'sche Reihe für $f(e^{\vartheta i})$, welche in Folge der Bedingung (3) und des im übrigen durchweg regulären Verhaltens von $f(x)$, mit der Reihe $\sum a_\nu e^{\nu \vartheta i}$ zusammenfällt, ist alsdann für $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ ausnahmslos[3])

---

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 346.

[2]) A. a. O. p. 355.

[3]) Vermöge eines sinnentstellenden Druckfehlers heisst es a. a. O., dass die fragliche Reihe für $\vartheta = 0$, also für $x = 1$, divergirt. Dass es sich hierbei wirklich nur um einen Druckfehler handelt, geht daraus hervor, dass ich an anderer Stelle (Math. Ann. Bd. 44 (1894), p. 54, Fuss-

convergent. Sie kann indessen keinesfalls absolut convergiren, weil in diesem Falle die dargestellte Function $f(e^{\vartheta i})$ ausnahmslos stetig sein müsste. Somit ist die Potenzreihe $\sum' a_\nu x^\nu$ auf dem Convergenzkreise zwar ausnahmslos, jedoch lediglich bedingt convergent. Für $x = 1$ ergiebt sich dabei insbesondere, auf Grund der Beziehung (3) und des Abel-schen Satzes:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = 0. \quad (5)$$ [1]

Dieses Beispiel lässt zugleich deutlich erkennen, durch welche Art von Singularitäten $X' = e^{\vartheta' i}$ die fragliche Convergenz-Erscheinung hervorgebracht wird: es muss $\lim\limits_{x=X'} f(x)$ einen eindeutig bestimmten Werth besitzen, wenn x auf einem beliebigen Strahle von innen her der Stelle X' zustrebt; andererseits muss $f(e^{\vartheta i})$ bei $\vartheta = \vartheta'$ eine Unstetigkeit erleiden, welche immerhin noch die Convergenz der betreffenden Fourier'schen Reihe für $\vartheta = \vartheta'$ bestehen lässt, die aber dann eo ipso deren absolute Convergenz definitiv ausschliesst.[2])

note) ausdrücklich die Convergenz dieser Reihe (bezw. der damit gleichartigen:

$$e^{-\frac{1}{x}} = \sum' c_\nu (x-1)^\nu \quad \text{für } x = 0)$$

hervorgehoben habe. Die Convergenz für $\vartheta = 0$ folgt im übrigen aus den von Du Bois Reymond angestellten Untersuchungen über Fourier'sche Reihen (Abh. der Bayer. Akad. II. Cl. Bd. XII[2], p. 37. 44), etwas einfacher aus § 4, Nr. 4 dieses Aufsatzes. — Wie ich inzwischen bemerkt habe, hat Herr Saalschütz die Coefficienten der Reihe: $e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{e} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ zum Gegenstande einer sehr ausführlichen Untersuchung gemacht (Archiv der Math. und Phys. (2), Bd. 6 (1888), p. 305–350) und hierbei auch einen (mir freilich nicht ganz einwurfsfrei erscheinenden), auf asymptotischer Integration einer für die Coefficienten a_ν bestehenden Recursionsformel beruhenden Beweis für die Convergenz von $\sum' a_\nu$ mitgetheilt.

[1]) Uebereinstimmend mit dem von Herrn Saalschütz (a.a.O. p. 334) durch asymptotische Betrachtungen berechneten Resultate.

[2]) Vgl. auch § 4, Nr. 6.

2. Die von mir früher mitgetheilten, am Anfange dieses Paragraphen erwähnten Potenzreihen (mit ausnahmslos bedingter Convergenz für $|x| = 1$) sind von der Form:

$$\sum_1^\infty {}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu = \sum_1^\infty {}^{\nu}\, \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} \cdot x^\nu, \tag{6}$$

wo ε_ν in bestimmter Abwechselung die Werthe ± 1 besitzt, während die M_ν eine monoton in's Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen vorstellen, von der Beschaffenheit, dass zwar:

$$M_\nu > \nu \tag{7}$$

ist, dagegen $\sum \frac{1}{M_\nu}$ divergirt $\left(\text{z. B. } M_\nu = \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}\right)$. Ich will nun zeigen, dass man, bei etwas anders gewählter Anordnung jener Glieder-Vorzeichen ε_ν, Reihen von analogem Verhalten gewinnen kann, bei welchen die monotone Zunahme der M_ν nur in dem Maasse erforderlich ist, dass $\sum \frac{1}{M_\nu^2}$ convergirt, sodass also im wesentlichen[1]) nur

$$M_\nu > \sqrt{\nu}$$

zu sein braucht. Abgesehen davon, dass die in diesem Falle zulässige Wahl $M_\nu = \nu$ ein besonders einfaches Beispiel einer Reihe von der fraglichen Beschaffenheit giebt, so scheint mir das betreffende Resultat aus dem Grunde besonders lehrreich, weil es eine bemerkenswerthe Ergänzung zu dem Satze in Nr. 4 des vorigen Paragraphen liefern wird.

Ich setze, wie in Gl. (6):

$$\sum_1^\infty {}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu = \sum_1^\infty {}^{\nu}\, \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} \cdot x^\nu, \quad \text{wo: } \varepsilon_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}, \tag{8}$$

---

[1]) Genauer gesagt:

$$M_\nu \gtrsim \sqrt{\nu} \cdot m_\nu,$$

wo m_ν nur so in's Unendliche zu wachsen braucht, dass $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ convergirt (cf. Gl. (20)).

Dabei soll $[\sqrt{\nu}]$ die grösste in $\sqrt{\nu}$ enthaltene ganze Zahl bedeuten, und will darauf ausgehen, die schwächste monotone Zunahme der M_ν zu bestimmen, bei welcher die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für $x = 1$ noch ausnahmslos convergirt.

Damit dies zunächst an der Stelle $x = 1$ stattfinde, also $\sum a_\nu$ convergire, ist nach p. 46, Gl. (19) jedenfalls nothwendig, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{M_1 a_1 + M_2 a_2 + \ldots + M_n a_n}{M_n} = 0$$

d. h.

$$(9) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{M_n} = 0, \quad \text{wo: } \sigma_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n.$$

Die aus bestimmten Gruppen positiver und negativer Einheiten bestehende Summe σ_n nimmt bei successive wachsendem n unter anderen Werthen eine Reihe von Minimal- bezw. Maximal-Werthen an, welche allemal dann auftreten, wenn ε_n das Schlussglied einer Gruppe negativer bezw. positiver Einheiten bildet. Da $\varepsilon_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}$ und $[\sqrt{\nu}]$ jedesmal um 1 zunimmt, wenn ν gerade eine Quadratzahl m^2 erreicht, wobei dann also ε_ν das Vorzeichen wechselt, so sind jene Minimal- und Maximalwerthe von σ_n charakterisirt durch die Bedingung $n = m^2 - 1$: und zwar ist die betreffende Schlussglied ε_n ein negatives bezw. positives, der entsprechende Werth von σ_n also ein Minimum bezw. Maximum, je nachdem n gerade oder ungerade. Man hat nun für $n = (2\mu + 1)^2 - 1 = 4\mu^2 + 4\mu$:

$$\sigma_{4\mu^2+4\mu} = \sum_1^3 \varepsilon_\nu - \sum_4^8 \varepsilon_\nu + \sum_9^{15} \varepsilon_\nu - \sum_{16}^{24} \varepsilon_\nu + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{(2\mu-1)^2}^{(2\mu)^2-1} \varepsilon_\nu - \sum_{(2\mu)^2}^{(2\mu+1)^2-1} \varepsilon_\nu$$

$$= (3-5) + (7-9) + \ldots + (4\mu-1) - (4\mu+1)$$

$$(10) \qquad = -2\mu,$$

und für $n = (2\mu)^2 - 1 = 4\mu^2 - 1$:

$$\sigma_{4\mu^2-1} = (3-5) + (7-9) + \ldots + (4\mu-1)$$

$$(11) \qquad = 2\mu + 1.$$

Hieraus ergiebt sich zunächst, dass:

$$\text{(12)} \qquad \lim_{\mu=\infty} \frac{\sigma_{4\mu^2+4\mu}}{\sqrt{4\mu^2+4\mu}} = -1, \quad \lim_{\mu=\infty} \frac{\sigma_{4\mu^2-1}}{\sqrt{4\mu^2-1}} = ,$$

und da die Folge der $\sigma_{4\mu^2+4\mu}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ offenbar den unteren, die Folge der $\sigma_{4\mu^2-1}$ den oberen Limes von σ_n definirt, schliesslich:

$$\text{(13)} \qquad \underline{\lim}_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = -1, \quad \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = +1.$$

Daraus folgt aber, dass die nothwendige Bedingung (9) für die Convergenz von $\sum a_\nu$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn:

$$\text{(14)} \qquad M_\nu \succ \sqrt{\nu},$$

sodass man also setzen kann:

$$\text{(15)} \qquad M_\nu = \sqrt{\nu} \cdot m_\nu, \text{ wo: } \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty.$$

Man hat nun mit Hülfe der Abel'schen Transformation:

$$\sum_1^n {}^\nu a_\nu = \sum_1^n {}^\nu \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} = \sum_1^{n-1} {}^\nu \sigma_\nu \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}} \right) + \frac{\sigma_n}{M_n}$$

$$= \sum_1^{n-1} {}^\nu \frac{\sigma_\nu}{M_\nu} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} + \frac{\sigma_n}{M_n},$$

und daher, mit Berücksichtigung von Gl. (15) und (13):

$$\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{\nu}} \cdot \frac{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} - \sqrt{\nu} \cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} \cdot m_\nu}.$$

Daraus folgt, dass $\sum a_\nu$ gleichzeitig mit der rechts stehenden Reihe, also wegen: $\overline{\lim}_{\nu=\infty} \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{\nu}} = 1$, gleichzeitig mit der Reihe

$$\sum \frac{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} - \sqrt{\nu} \cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} \cdot m_\nu}$$

convergirt.

Man hat nun:

$$\frac{\sqrt{\nu+1}\cdot m_{\nu+1}-\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1}\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu}=\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot m_{\nu+1}-m_\nu}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{\vartheta_\nu}{2\nu}\right)\cdot m_{\nu+1}-m_\nu}{\vartheta'_\nu\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu}\quad \left(\text{wo: } \lim_{\nu=\infty}\vartheta_\nu=1,\ \lim_{\nu=\infty}\vartheta'_\nu=1\right)$$

$$(16)\qquad =\frac{1}{\vartheta'_\nu}\cdot\frac{m_{\nu+1}-m_\nu}{m_{\nu+1}\cdot m_\nu}+\frac{\vartheta_\nu}{2\vartheta'_\nu}\cdot\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}.$$

Da $\frac{m_{\nu+1}-m_\nu}{m_{\nu+1}\cdot m_\nu}$ das allgemeine Glied einer convergenten Reihe bildet, sofern nur überhaupt m_ν mit ν monoton (wenn auch beliebig langsam) in's Unendliche wächst,[1]) so wird die fragliche Reihe dann und nur dann convergiren, wenn $\sum\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}$ convergirt. Darnach ergiebt sich also zunächst:

Für die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu$, wo: $a_\nu=(-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}$ — ist *nothwendig*, dass $\lim_{\nu=\infty} m_\nu=\infty$, *hinreichend*, dass die m_ν monoton zunehmen und $\sum\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}$ convergirt.

3. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass alsdann gleichzeitig mit $\sum a_\nu$ auch $\sum a_\nu X^\nu$ für jedes von 1 verschiedene X mit dem absoluten Betrage $|X|=1$ convergirt. Man hat nämlich:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu X^\nu=\sum_1^{n-1}{}^\nu(a_\nu-a_{\nu-1})(X+X^2+\ldots+X^\nu)+a_n(X+X^2+\ldots+X^n),$$

also für jedes von 1 verschiedene X:

$$(17)\qquad \sum_1^n{}^\nu a_\nu X^\nu=\frac{X}{1-X}\cdot\sum_1^{n-1}{}^\nu(a_\nu-a_{\nu-1})\cdot(1-X^\nu)+a_n\cdot\frac{X(1-X^n)}{1-X}$$

[1]) Math. Ann. Bd. 35 (1890), p. 327.

und, wegen $\lim_{n=\infty} a_n = 0$, $\overline{\lim_{n=\infty}} \, | 1 - X^n | \leq 2$:

$$(18) \qquad \sum_1^\infty{}^{\nu} a_\nu X^\nu = \frac{X}{1-X} \sum_1^\infty{}^{\nu} (a_\nu - a_{\nu+1}) \cdot (1 - X^\nu).$$

Da für (jedes X und ν): $| 1 - X^\nu | \leq 2$, so convergirt die rechts stehende Reihe sicher, wenn $\sum | a_\nu - a_{\nu+1} |$ convergent ist. Da je zwei auf einander folgende Terme a_ν, $a_{\nu+1}$ gleiches Vorzeichen haben, ausser wenn:

$$\nu = (\lambda + 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda + 2), \ \nu + 1 = (\lambda + 1)^2 \ (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

so findet man:

$$\sum_1^\infty{}^{\nu} | a_\nu - a_{\nu+1} | = \sum_1^\infty{}'^{\nu} \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}} \right) + \sum_1^\infty{}^{\lambda} \left(\frac{1}{M_{\lambda(\lambda+2)}} + \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}} \right),$$

wo der Accent an dem ersten Summenzeichen der rechten Seite andeuten soll, dass die Werthe: $\nu = \lambda(\lambda + 2)$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ auszuschliessen sind: an die Stelle der betreffenden Glieder treten die in der zweiten Summe vereinigten. Setzt man diese letztere in die Form:

$$\sum_1^\infty{}^{\lambda} \left(\frac{1}{M_{\lambda(\lambda+2)}} - \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}} \right) + 2 \sum_1^\infty{}^{\lambda} \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}},$$

und fügt die Glieder der ersten Summe noch zu denjenigen der Summe $\sum'$, so wird:

$$(19) \quad \sum_1^\infty{}^{\nu} | a_\nu - a_{\nu+1} | = \sum_1^\infty{}^{\nu} \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}} \right) + 2 \sum_1^\infty{}^{\lambda} \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}},$$

sodass sich unmittelbar die Convergenz von $\sum | a_\nu - a_{\nu+1} |$ ergiebt, wenn man noch beachtet, dass nach Gl. (15):

$$M_{(\lambda+1)^2} = (\lambda + 1) \cdot m_{(\lambda+1)^2}$$

und sodann, wegen $m_{(\lambda+1)^2} > m_{\lambda+1}$:

$$M_{(\lambda+1)^2} > (\lambda + 1) \cdot m_{\lambda+1} > \lambda \cdot m_\lambda,$$

also $\sum \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}} < \sum \frac{1}{\lambda \cdot m_\lambda}$ d. h. convergent ist.

Man findet somit schliesslich:

Die Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu X^\nu$, wo: $a_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu} \cdot m_\nu}$ ist für $|X| = 1$ ausnahmslos convergent, wenn die m_ν monoton in dem Maasse zunehmen, dass $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ *convergirt*. Sie convergirt also nur *bedingt*, wenn andererseits die m_ν so angenommen werden, dass $\sum \frac{1}{\sqrt{\nu} \cdot m_\nu}$ *divergirt*. Man setze z. B.:

$$m_\nu = (\sqrt{\nu})^\varepsilon,\ m_\nu = (\lg \nu)^{1+\varepsilon},\ m_\nu = \lg \nu \cdot (\lg_2 \nu)^{1+\varepsilon},\ \text{etc.}\ (\varepsilon > 0).\text{[1]} \tag{20}$$

4. Da mit der Reihe $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ a fortiori auch $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu^2}$ convergirt und $|a_\nu| = \frac{1}{\sqrt{\nu} \cdot m_\nu}$, so folgt zunächst, dass bei den Reihen $\sum a_\nu x^\nu$ der betrachteten Art stets $\sum |a_\nu|^2$ convergent ist. Andererseits können aber die m_ν so langsam zunehmen (z. B. $m_\nu = (\lg \nu)^{1+\varepsilon}$), dass keine niedrigere Potenz, als das Quadrat der $|a_\nu|$ eine convergente Reihe liefert. Mithin erhält man das folgende Resultat:

---

[1]) Ein besonders einfaches, für Vorlesungszwecke geeignetes Beispiel resultirt, wie bereits oben bemerkt wurde, für:

$$m_\nu = \sqrt{\nu},\quad \text{also: } M_\nu = \nu.$$

Die Gleichung (19) nimmt in diesem Falle die Form an:

$$\sum_1^\infty {}^\nu\, a_\nu\, a_{\nu+1} = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu(\nu+1)} + 2 \sum_1^\sigma {}^\lambda \frac{1}{(\lambda+1)^2},$$

welche ohne weiteres die Convergenz der betreffenden Reihe erkennen lässt. Andererseits ergiebt sich die Convergenz von $\sum a_\nu$ hier unmittelbar aus der (durch einfache Rechnung leicht zu verificirenden) Bemerkung, dass die positiven und negativen Glieder sich zu Gruppen alternirenden Vorzeichens vereinigen lassen, deren Zahlenwerthe monoton gegen Null abnehmen.

Es giebt Potenzreihen $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu x^\nu$ mit dem Convergenzradius 1, welche für $|x| = 1$ noch ausnahmslos *bedingt* convergiren, während $k = 2$ der *kleinste* Exponent ist, für welchen $\sum |a_\nu|^k$ (also $\sum a_\nu^k X^\nu$ *absolut*) convergirt.

Die zur Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ besitzt hier für jede einzelne Stelle X der Peripherie einen bestimmten endlichen Werth (nämlich den Werth $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu X^\nu$). Da ferner die aus Gl. (17) durch Substitution von x für X resultirende Beziehung:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{x}{1-x} \sum_1^{n-1}{}^\nu (a_\nu - a_{\nu+1})(1 - x^\nu) + a_n x \cdot \frac{1-x^n}{1-x}$$

erkennen lässt, dass die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ gleichmässig convergirt im Innern und auf der Begrenzung desjenigen Bereiches, welcher entsteht, wenn man aus der Fläche des Einheitskreises eine beliebig kleine Umgebung der Stelle 1 ausscheidet, so folgt weiter, dass $f(x)$ nicht nur längs der gesammten Peripherie mit eventuellem Ausschlusse der Stelle 1, sondern in der Umgebung jeder von 1 verschiedenen Stelle X vollkommen stetig ist. In der Nähe der Stelle $x = 1$ kann dagegen $\sum a_\nu x^\nu$ (und speciell auch $\sum a_\nu X^\nu$) ungleichmässig convergiren (ich vermuthe, dass dies auch wirklich der Fall sein dürfte, obschon es mir andererseits bisher nicht gelungen ist, einen vollständigen Beweis dafür zu erbringen). In Folge dessen braucht auch $|f(x)|$, wiewohl für jede einzelne Stelle x (incl. X) einen bestimmten endlichen Werth besitzend, in der Umgebung der Stelle $x = 1$ nicht unter einer festen Grenze zu bleiben. Für das etwaige Anwachsen von $|f(x)|$ in der Nähe der Stelle 1 lässt sich leicht eine obere Grenze angeben. Da nämlich:

$$\left|\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \cdot (\varrho X)^\nu\right| < \sum_1^\infty{}^\nu |a_\nu| \cdot \varrho^\nu \quad \text{d. h.} \leq \sum_1^\infty{}^\nu \frac{\varrho^\nu}{\sqrt{\nu} \cdot m_\nu} = F(\varrho),$$

so kann der Werth von $|f(x)|$ für $x = \varrho \cdot e^{\vartheta i}$ niemals denjenigen von $F(\varrho)$ übersteigen. Dabei wird $F(\varrho)$ für $\lim \varrho = 1$ schwächer unendlich als $(1 - \varrho)^{\frac{1}{2}}$, ja sogar um so viel schwächer, dass nicht nur $F(\varrho)$, sondern auch $F(\varrho)^2$ für $\varrho \leqq 1$ integrabel bleibt.[1]) Hieraus kann nun zwar die Integrabilität von $|f(x)|^2$ auf jedem in den Punkt 1 von Innen her einmündenden Strahle erschlossen werden: ob aber diese Eigenschaft auch längs der Peripherie erhalten bleibt, ist auf diesem Wege nicht ohne weiteres zu erkennen.[2]) Es kann dies indessen aus der hier a priori feststehenden (absoluten) Convergenz der Reihe $\sum a_\nu^2$ durch Umkehrung der in § 2, Nr. 4 benützten Schlussweise gefolgert werden.

Hiernach genügt also $f(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ den sämmtlichen für die Gültigkeit des Satzes § 2, Nr. 4 geforderten Bedingungen und sogar noch den weiteren, für jede Stelle X einen endlichen Werth zu besitzen und, mit eventueller Ausnahme der einzigen Stelle $X = 1$, auch vollkommen stetig zu bleiben. Trotzdem giebt es, bei geeigneter Auswahl von m_ν, keinen Exponenten $k < 2$, derart dass $\sum |a_\nu|^k$ convergirt. Man kann darnach sagen, dass der fragliche Satz das äusserste leistet, was aus den ihm zu Grunde liegenden Voraussetzungen gefolgert werden kann.

---

[1]) Die Richtigkeit der ersten Behauptung folgt unmittelbar aus p. 49, Fussnote: die der zweiten aus einem ähnlichen, den Zusammenhang zwischen der Abnahme (bezw. Zunahme) der $|a_\nu|$ und dem Unendlichwerden von $\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu$ noch genauer präcisirenden Satze, den ich bei späterer Gelegenheit mittheilen werde.

[2]) Die gleichmässige Integrabilität von $f(x)$ selbst steht wegen der absoluten Convergenz der Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu + 1} \cdot a_\nu X^{\nu+1} = \int_0^X f(x)\, dx$ von vornherein ausser Frage.

§ 4. Zusammenhang zwischen dem reellen und imaginären Theile der Randfunction.

1. Man hat, mit Beibehaltung der bisher angewendeten Bezeichnungen:

$$f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}) = \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i)\, \varrho^\nu \cdot e^{\nu \vartheta i} \text{ für } \varrho < 1, \tag{1}$$

und daher, wenn:

$$f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}) = \varphi(\varrho, \vartheta) + i \cdot \psi(\varrho, \vartheta) \tag{2}$$

gesetzt wird:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(\varrho, \vartheta) &= \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta) \cdot \varrho^\nu, \\ \psi(\varrho, \vartheta) &= \sum_1^\infty{}^\nu (\beta_\nu \cos \nu\vartheta + \alpha_\nu \sin \nu\vartheta) \cdot \varrho^\nu, \end{aligned}\right. \qquad (\varrho < 1). \tag{3}$$

Für die Randwerthe $e^{\vartheta i}$ ergiebt sich sodann:

$$f(e^{\vartheta i}) = \varphi(\vartheta) + i \cdot \psi(\vartheta), \tag{4}$$

wenn $\varphi(\vartheta)$, $\psi(\vartheta)$ definirt werden durch die Beziehungen:

$$\varphi(\vartheta) = \lim_{\varrho=1} \varphi(\varrho, \vartheta), \quad \psi(\vartheta) = \lim_{\varrho=1} \psi(\varrho, \vartheta). \tag{5}$$

Es werde nun angenommen, dass $f(x)$ diejenigen (in § 2, Nr. 3 näher erörterten) Integrabilitäts-Eigenschaften besitzt, welche das Zusammenfallen von $\sum (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \cdot e^{\nu \vartheta i}$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ zur Folge haben. Alsdann wird nach Gl. (6), p. 60:

$$\begin{aligned} \alpha_\nu + \beta_\nu i &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\varphi(\eta) + i \cdot \psi(\eta)) \cdot \cos \nu\eta \cdot d\eta \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} (\varphi(\eta) + i \cdot \psi(\eta)) \cdot \sin \nu\eta \cdot d\eta, \end{aligned}$$

also:

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha_\nu = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\eta)\cdot\cos\nu\eta\cdot d\eta = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta)\cdot\sin\nu\eta\cdot d\eta, \\ \beta_\nu = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\eta)\cdot\sin\nu\eta\cdot d\eta = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta)\cdot\cos\nu\eta\cdot d\eta, \end{cases}$$

und:

$$(7)\qquad \lim_{n=\infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} \beta_n = 0.$$

Wenn die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für irgend eine Stelle $x = e^{\vartheta i}$ convergirt, so müssen die beiden Reihen:

$$(8)\quad \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta), \quad \sum_1^\infty{}^\nu (\beta_\nu \cos\nu\vartheta + \alpha_\nu \sin\nu\vartheta)$$

gleichzeitig convergiren — vice versa; und man hat sodann nach dem Abel'schen Satze:[1])

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi(\vartheta) = \lim\limits_{n=\infty} \sum_1^n{}^\nu (\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta), \\ \psi(\vartheta) = \lim\limits_{n=\infty} \sum_1^n{}^\nu (\beta_\nu \cos\nu\vartheta + \alpha_\nu \sin\nu\vartheta). \end{cases}$$

Zur Beurtheilung der Convergenz oder Divergenz dieser Reihen können dann zunächst die bekannten Kriterien aus der Theorie der Fourier'schen Reihen dienen, wobei also in der Reihe für $\varphi(\vartheta)$ die Coefficienten α_ν, β_ν als Functionen von $\varphi(\vartheta)$ erscheinen, und als Convergenz-Bedingungen gewisse Stetigkeits-Eigenschaften von $\varphi(\vartheta)$ resultiren (entsprechend sodann für $\psi(\vartheta)$). Da sich aber α_ν, β_ν nach Gl. (6) auch als Functionen von $\psi(\vartheta)$ darstellen lassen, so ergiebt sich hier auch noch die folgende, gänzlich ausserhalb der gewöhnlichen Theorie

[1]) Der Vollständigkeit halber bemerke ich, dass, wie ein Blick auf die Gleichungen (3) und (5) lehrt, das entsprechende Theilresultat auch erhalten bleibt, wenn nur eine der beiden fraglichen Reihen convergirt. Und man hat nach § 1, Nr. 2 auch: $\varphi(\vartheta) = +\infty$ bezw. $\psi(\vartheta) = \pm\infty$, wenn die betreffende Reihe eigentlich divergirt.

der Fourier'schen Reihen liegende Fragestellung: Welche Stetigkeits-Eigenschaften von $\psi(\vartheta)$ sind erforderlich oder hinreichend, damit die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ bei einem bestimmten Werthe ϑ überhaupt convergire?[1]) Die hierauf zu erzielende Antwort gilt dann in Folge der zwischen $\varphi(\vartheta)$ und $\psi(\vartheta)$ bestehenden Reciprocität (s. Gl. (9) und (6)) mutatis mutandis auch bezüglich der Convergenz der Reihe für $\psi(\vartheta)$.[2])

2. Setzt man:

$$(10) \qquad \sum_1^n{}^{\nu} (\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta) = \varphi_n(\vartheta),$$

so handelt es sich also um die Untersuchung von $\lim_{n=\infty} \varphi_n(\vartheta)$ unter der Voraussetzung, dass für α_ν, β_ν der zweite der in Gl. (6) angegebenen Integral-Ausdrücke eingesetzt wird. Man erhält auf diese Weise zunächst:

$$(11) \qquad \varphi_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \sum_1^n{}^{\nu} \sin \nu(\eta - \vartheta) \cdot d\eta,$$

und da:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \sin \nu\lambda = \frac{\cos \frac{1}{2}\lambda - \cos(n + \frac{1}{2})\lambda}{2 \sin \frac{1}{2}\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cot\frac{\lambda}{2} - \cos n\lambda \cdot \cot\frac{\lambda}{2} + \sin n\lambda\right)$$

so wird:

$$(12) \quad 2\pi \cdot \psi_n(\vartheta) = \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \cot\frac{\eta - \vartheta}{2} \cdot (1 - \cos n(\eta - \vartheta)) \cdot d\eta + \varDelta_n,$$

wo:

---

[1]) Dass ihre Summe alsdann stets den Werth $\varphi(\vartheta)$ hat, folgt wieder unmittelbar aus dem Abel'schen Satze (s. auch die vorige Fussnote).

[2]) Eine ähnliche Untersuchung des Herrn Tauber (Monatsh. f. Math. und Phys. Jahrg. 2 (1891), p. 79–118) beruht theilweise auf anderen Voraussetzungen und verfolgt im wesentlichen andere Ziele.

(13)
$$\begin{cases} \Delta_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \sin n(\eta - \vartheta) \\ \quad = \pi(\alpha_n \cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta) \end{cases}$$

also:

(14)
$$\lim_{n=\infty} \Delta_n = 0$$

und zwar gleichmässig für alle möglichen ϑ. Bezeichnet man das andere in Gl. (12) auftretende Integral mit $J_n(\vartheta)$, so ergiebt sich, indem man $\eta - \vartheta = a$ substituirt:

(15)
$$J_n(\vartheta) = \int_{-\pi-\vartheta}^{+\pi-\vartheta} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n\,a) \cdot d\,a,$$

und wenn man sodann das Integrations-Intervall durch Einschaltung des Theilpunktes $-\pi$ in zwei Theile zerlegt und beachtet, dass, mit Hülfe der Substitution: $a = a' - 2\pi$ und mit Rücksicht auf die Periodicität von $\psi(\vartheta)$:

$$\int_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n\,a) \cdot d\,a$$

$$= \int_{\pi-\vartheta}^{\pi} \psi(\vartheta + a') \cdot \cot\frac{a'}{2} \cdot (1 - \cos n\,a') \cdot d\,a',$$

so folgt:

(16)
$$\begin{aligned} J_n(\vartheta) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n\,a) \cdot d\,a \\ &= \int_{0}^{+\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot d a. \end{aligned}$$

Beder - **liebig kleine** positive Zahl und zerlegt **Integrale**:

(17) $$J_n(\vartheta) = J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) + J_{n,\varepsilon}(\vartheta),$$

wo:

(18) $$J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = \int_0^\varepsilon \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da,$$

(19) $$J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da,$$

so hat zunächst $J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$, in Folge der ausnahmslosen Stetigkeit von $\cot\frac{a}{2}$ für $\varepsilon < a \leq \pi$ und der vorausgesetzten Integrabilität von $\psi(\vartheta)$ und $|\psi(\vartheta)|$, nicht nur für jedes noch so grosse n einen bestimmten Werth, sondern es ist auch insbesondere:

(20) $$\lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da,$$

da nach einem bekannten Fundamentalsatze:

(21) $$\lim_{n=\infty} \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot \cos n a \cdot da = 0$$

wird. Diese Beziehungen gelten für jedes noch so klein angenommene constante $\varepsilon > 0$. Soll aber die Existenz von $\lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$ auch bei unbegrenzter Verkleinerung von ε erhalten bleiben, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass ausserdem noch $\lim_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ gleichzeitig mit ε verschwindet, d. h. durch Wahl einer oberen Schranke für ε beliebig klein gemacht werden kann. Und sollen die beiden Gleichungen (20), (21) für $\varepsilon = 0$ einen Sinn behalten, so ist des weiteren erforderlich, dass die beiden Bestandtheile von $\lim_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, nämlich:

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\varepsilon \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot da, \\ \displaystyle\lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot\cos na\cdot da, \end{cases}$$

einzeln genommen die eben angegebene Eigenschaft besitzen. In diesem Falle geht dann Gl. (20) in die folgende über:

$$(23)\qquad \lim_{n=\infty} J_n(\vartheta) = \int_0^\pi \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot da.$$

Dabei lässt sich noch das Integral $J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, wie auch jedes der Theil-Integrale (22), durch ein etwas einfacheres ersetzen. Da nämlich die identische Umformung besteht:

$$(24)\quad J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = 2\int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}(1-\cos na)\cdot da$$
$$+\int_0^\varepsilon \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}(1-\cos na)\left(\cot\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\cdot da,$$

und da:

$$(25)\qquad \cot\frac{a}{2}-\frac{2}{a} = \frac{a\cdot\cos\frac{a}{2}-2\sin\frac{a}{2}}{a\cdot\sin\frac{a}{2}} = -\frac{a}{6}-\ldots.$$

für $a=0$ verschwindet, so wird das letzte Integral in Gl. (24) gleichzeitig mit ε beliebig klein, und zwar unabhängig von n, insbesondere also auch für $\lim n=\infty$. Hiernach wird also $\lim\limits_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ allemal dann gleichzeitig mit ε gegen Null convergiren, wenn:

$$(26)\qquad \lim_{n=\infty}\int^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{}(1-\cos na)\cdot da$$

diese Eigenschaft besitzt, und das analoge gilt für die beiden Theil-Integrale (22).

Bemerkt man schliesslich noch, dass aus Gl. (12) die eigentliche Divergenz von $\sum(a_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta)$ resultirt, falls $\lim\limits_{n=\infty} J_n(\vartheta) = \pm\infty$ ist,[1]) so kann man das Ergebniss dieser Untersuchung in folgender Weise zusammenfassen:

Es ist:

$$(27)\quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\cdot\lim_{n=\infty}\int_0^\pi \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos na)\cdot da,$$

sobald dieser Grenzwerth *existirt;* d. h. die Reihe

$$\varphi(\vartheta) = \sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu \cos\nu\vartheta - \beta \sin\nu\vartheta)$$

ist *convergent* oder *eigentlich divergent,* je nachdem der obige Grenzwerth *endlich* oder *unendlich gross* ausfällt. Als nothwendig und hinreichend für die *Convergenz* ergiebt sich, dass:

$$(A)\quad \lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot(1-\cos na)\cdot da$$

gleichzeitig mit ε gegen Null convergirt. Besitzen schon die beiden Bestandtheile dieses Ausdruckes, nämlich:

$$(B)\quad \int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot da$$

$$(C)\quad \lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot\cos na\cdot da$$

---

[1]) **Hierfür ist wiederum hinreichend, wenn der Grenzwerth (26) für irgend ein $\varepsilon > 0$ unendlich gross ausfällt.**

diese Eigenschaft, so reducirt sich zugleich die Beziehung (27) auf die folgende:

$$(28)\quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot da.$$ [1]

3. Vergleicht man die Darstellungs-Formel (27) mit der gewöhnlichen (Dirichlet'schen) Summationsformel:

$$(29)\quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\lim_{n=\infty}\int_0^{\varepsilon}\{\varphi(\vartheta + a) + \varphi(\vartheta - a)\}\frac{\sin n a}{a}\cdot da,$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\varphi(\vartheta + 0) + \varphi(\vartheta - 0)\} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon} F(a)\cdot\frac{\sin n a}{a}\cdot da,$$

wo:

$$F(a) = \{\varphi(\vartheta + a) - \varphi(\vartheta + 0)\} + \{\varphi(\vartheta - a) - \varphi(\vartheta - 0)\},$$

so ergeben sich die folgenden fundamentalen Unterschiede:

1) Der Werth des Grenz-Ausdruckes (29) hängt lediglich von den Functionswerthen $\varphi(\vartheta)$ in unmittelbarer Nähe der betrachteten Stelle ϑ ab, derjenige des Ausdruckes (27) von der Gesammtheit der Werthe, welche $\psi(\vartheta)$ für $-\pi < \vartheta < +\pi$ annimmt.

2) Die Convergenz von (29) basirt auf dem Verhalten der Summe $\varphi(\vartheta + a) + \varphi(\vartheta - a)$, diejenige von (27) bezw. (A) auf dem Verhalten der Differenz $\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)$ in unmittelbarer Nähe der fraglichen Stelle ϑ.

3) Von den beiden für die Beschaffenheit der Grenz-Ausdrücke (29) und (27) bezw. (A) charakteristischen Integralen:

[1] Herr Tauber beweist die Gültigkeit von Gl. (28) auch unter der Voraussetzung, dass nur das Integral (B) der angegebenen Bedingung genügt und dass an die Stelle der auf (C) bezüglichen Bedingung die Convergenz der Reihe $\psi(\vartheta) = \sum(\beta_\nu \cos\nu\vartheta + \alpha_\nu \sin\nu\vartheta)$ tritt (a. a. O. p. 87).

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sin n a}{a} \, d a, \quad \int_0^\varepsilon \frac{1 - \cos n a}{a} \cdot d a$$

ist das erstere bei $\lim n = \infty$ convergent, das zweite dagegen divergent.

Nach alledem kommt die Convergenz des Ausdruckes (29) zu Stande, wenn $\varphi(\vartheta)$ sowohl rechts, als links von der betrachteten Stelle ϑ gewisse Stetigkeits-Eigenschaften besitzt, während dieselbe durch das Vorhandensein eines Sprunges zwischen $\varphi(\vartheta + 0)$ und $\varphi(\vartheta - 0)$ nicht alterirt wird. Dagegen würde das Auftreten eines Sprunges zwischen $\psi(\vartheta + 0)$ und $\psi(\vartheta - 0)$ die Convergenz des Grenzwerthes (27) bezw. (A) definitiv ausschliessen,[1]) während dieselbe allemal dann zu Stande kommt, wenn $\psi(\vartheta)$ zu beiden Seiten der Stelle ϑ sich symmetrisch oder doch nahezu symmetrisch verhält, mögen dabei die Werthe von $\psi(\vartheta \pm a)$ bei unbegrenzt abnehmendem a auch über alle Grenzen wachsen oder unendlich viele Oscillationen mit beliebig grosser Amplitude aufweisen.

Eine hinreichende Bedingung für die Convergenz des Integrals (C) bildet offenbar diejenige des Integrals:

$$\text{(D)} \qquad \int_0^\varepsilon \left| \frac{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)}{a} \right| \cdot d a,$$

also die absolute Integrabilität von $\frac{1}{a} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\}$ in der Umgebung von $a = 0$. Dieselbe zieht dann, wegen $|\cos n a| < 1$, sofort auch die Convergenz des Grenzwerthes (C) und somit schliesslich diejenige der Reihe für $\varphi(\vartheta)$, sowie die Gültigkeit der Beziehung (28) nach sich. Setzt man für den gerade betrachteten Werth ϑ:

$$\text{(30)} \qquad \psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a) = \Delta(a),$$

so mag $\Delta(a)$ als das mittlere Stetigkeitsmaass von $\psi(\vartheta)$

[1]) Näheres s. Nr. 6 dieses Paragraphen.

für jene Stelle ϑ bezeichnet werden. Die Convergenz des Integrals (D) ist dann gesichert, wenn bei $\lim \alpha = +0$:

$$(31) \qquad \Delta(\alpha) \lesssim \left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \cdot \lg_2 \frac{1}{\alpha} \ldots \lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \cdot \left(\lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho} \quad (\varrho > 0),$$

da in diesem Falle

$$\left|\frac{\psi(\vartheta+\alpha)-\psi(\vartheta-\alpha)}{\alpha}\right| \lesssim \frac{d}{d\alpha}\left(\lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho},$$

also in der Umgebung von $\alpha = 0$ integrabel ausfällt. Dabei darf eventuell $\Delta(\alpha)$ im Intervalle $0 \leqq \alpha \leqq \varepsilon$ noch unendlich oft das Vorzeichen wechseln. Findet dies wirklich statt, so ist die Convergenz des Integrals (D) und somit auch die Bedingung (31) sehr weit davon entfernt, eine für die Convergenz des Integrals (B), (C) und somit für diejenige der Reihe $\varphi(\vartheta)$ nothwendige Bedingung zu liefern. Setzt man z. B. $\psi(\vartheta) = \sin \frac{1}{\vartheta}$, so nimmt das Integral (B) für $\vartheta = 0$ die Form an:

$$(32) \qquad 2\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{\alpha} \cdot d\alpha \quad \left(= 2\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot d\alpha\right).$$

ist also convergent, während $\Delta(\alpha) = 2\sin\frac{1}{\alpha}$ in diesem Falle überhaupt nicht mit α verschwindet, sondern mit unendlich vielen Zeichenwechseln um Null oscillirt. Ja es convergirt hier sogar auch der Grenzwerth (C), d. h.:

$$(33) \qquad \lim_{n=\infty} 2\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{\alpha} \cdot \cos n\alpha \cdot d\alpha,$$

also schliesslich die Reihe $\varphi(0)$, d. h. die Reihe für $\cos\frac{1}{\vartheta}$ an der Stelle $\vartheta = 0$. Dies kann zwar aus den bereits oben[1]) citirten allgemeinen Untersuchungen Du Bois Reymond's gefolgert werden. Da es indessen bei der complicirten Be-

[1]) p. 70, Fussnote.

schaffenheit derselben ziemlich schwierig und zeitraubend ist, in die betreffenden Entwickelungen genügende Einsicht zu erlangen, so mag es vielleicht nicht ganz überflüssig erscheinen, den Weg anzugeben, auf welchem das fragliche Resultat direkt abgeleitet werden kann.

4. Man schreibe in dem Integrale (33) m^2 statt n und bringe dasselbe sodann auf die Form:

$$(34)\qquad \begin{aligned} &2\int_0^\varepsilon \sin\frac{1}{a}\cos m^2 a\cdot\frac{da}{a} \\ &= \int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{da}{a} - \int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{da}{a}. \end{aligned}$$

Substituirt man in dem ersten der beiden rechts stehenden Integrale:

$$m^2 a+\frac{1}{a}=2\beta,$$

so folgt zunächst:

$$a=\frac{1}{m^2}(\beta\pm\sqrt{\beta^2-m^2}),\quad \frac{da}{d\beta}=\frac{1}{m^2}\left(1\pm\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\right)=\pm\frac{a}{\sqrt{\beta^2-m^2}}.$$

Da $\beta=+\infty$ für $a=+0$ und β mit wachsendem a zunächst abnimmt, bis es bei $a=\frac{1}{m}$ den Minimalwerth $\beta=m$ erreicht, so hat man zu setzen

für $0<a<\frac{1}{m}$: $a=\frac{1}{m^2}(\beta-\sqrt{\beta^2-m^2})$, $da=-\frac{a}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta$,

für $\frac{1}{m}<a<\varepsilon$: $a=\frac{1}{m^2}(\beta+\sqrt{\beta^2-m^2})$, $da=\frac{a}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta$,

sodass also:

$$(35)\qquad \begin{aligned} &\int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{da}{a} \\ &= \int_m^\infty \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta + \int_m^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta. \end{aligned}$$

Da für $\beta = m$ der Nenner nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird, so wird die Convergenz der Integrale hierdurch nicht alterirt. Man hat zunächst:

$$\left| \int_m^{m+p} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta \right| < \int_m^{m+p} \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} = \lg \frac{m + p + \sqrt{2pm + p^2}}{m}$$

also:

$$\text{(36)} \qquad \lim_{m=\infty} \int_m^{m+p} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta = 0,$$

wenn p eine feste endliche (oder auch schwächer als m in's Unendliche wachsende) Zahl bedeutet. Die restirenden Integrale:

$$\text{(37)} \qquad \int_{m+p}^{\infty} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta, \qquad \int_{m+p}^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta$$

können durch Zerlegung des Integrations-Intervalles in Theil-Intervalle von der Form $[k\pi, (k + \frac{1}{2})\pi]$, $[(k + \frac{1}{2})\pi, (k + 1)\pi]$ in eine unendliche bezw. endliche Reihe von numerisch beständig abnehmenden Termen mit alternirendem Vorzeichen umgeformt werden. Da es freisteht p und ε so zu wählen, dass $m + p$, $\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ ganze Multipla von π sind, so ist die Summe einer jeden dieser Reihen k l e i n e r als das Anfangsglied:

$$\int_{m+p}^{m+p+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}}\, d\beta \quad (\text{wo } m + p = k\pi), \text{ d. h.} < \frac{1}{\sqrt{2pm + p^2}},$$

sodass die betreffenden Grenzwerthe für $\lim m = \infty$ verschwinden. Durch Zusammenfassung dieses Resultates mit Gl. (36) ergiebt sich also:

$$\text{(38)} \qquad \lim \int^{\varepsilon} \sin\left(m^2 a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{da}{a} = 0.$$

Noch etwas einfacher gestaltet sich der entsprechende Beweis für das letzte Integral der Gleichung (34). Die Substitution:

$$m^2 a - \frac{1}{a} = 2\beta$$

liefert zunächst:

$$a = \frac{1}{m^2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + m^2}\right), \quad \frac{da}{d\beta} = \frac{1}{m^2}\left(1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}}\right) = \pm \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + m^2}}.$$

Da aber $\beta = -\infty$ für $a = +0$ und sodann β mit wachsendem a beständig zunimmt, so entfällt hier die Zerlegung des betreffenden Integrations-Intervalles in zwei Theile, und zwar hat man zu setzen:

$$a = \frac{1}{m^2}(\beta + \sqrt{\beta^2 + m^2}), \quad da = \frac{a}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta$$

also:

$$(39) \qquad \int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{da}{a}$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}}\, d\beta = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta$$

(da allgemein: $\int_{-A}^{+A} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta = 0$) und, wenn man schliesslich noch $-\beta$ statt β als Integrations-Variable einführt:

$$(40) \qquad \int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{da}{a} = -\int_{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)}^{\infty} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta,$$

ein Integral, dessen Verschwinden für $\lim m = \infty$ sich in derselben Weise ergiebt, wie für das erste der Integrale (37). Somit findet man schliesslich, wie behauptet (Gl. (33)):

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\varepsilon \sin\frac{1}{a} \cdot \cos n a \cdot \frac{d a}{a} = 0 .$$

Ich bemerke hierzu noch, dass das Verschwinden von

$$(41) \qquad \lim_{n=\infty} \int_0^\varepsilon \sin\frac{1}{a} \cdot \sin n a \cdot \frac{d a}{a}, \quad \lim_{n=\infty} \int_0^\varepsilon \cos\frac{1}{a} \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} n a \cdot \frac{d a}{a}$$

in analoger Weise bewiesen werden kann. Und da die Integrale:

$$(42) \qquad \int_0^\varepsilon \sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}\right) \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} n a \cdot \frac{d a}{a}, \quad \int_0^\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}\right) \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} n a \cdot \frac{d a}{a}$$

(wegen: $\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\cot\frac{a}{1} \cong \frac{a}{12}$, s. Gl. (25)) offenbar das analoge Verhalten zeigen, so ergiebt sich (durch jede der beiden Formeln (27) und (29)) die Convergenz der in § 3, Nr. 1 betrachteten Reihe:

$$(43) \qquad f(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) \right\}$$

für $\vartheta = 0$, d. h. der Mac Laurin'schen Entwickelung von $e^{\frac{x}{x-1}}$ an der Stelle $x = 1$.

5. Erleidet $\varDelta(a)$ (Gl. (30)) in der Umgebung der betrachteten Stelle ϑ nicht unendlich viele Zeichenwechsel,[1]) so wird bei hinlänglicher Verkleinerung von a durchweg $\varDelta(a) = |\varDelta(a)|$ oder $= - |\varDelta(a)|$, und die Bedingung der absoluten Integrabilität von $\frac{1}{a} \cdot \varDelta(a)$ ist dann keine andere als die der einfachen Integrabilität. Auch in diesem Falle ist die Bedingung (31) keine nothwendige für die Convergenz der Integrale (B), (C), aber sie nähert sich bei unbegrenzter Vergrösserung

[1]) Damit ist keineswegs ausgeschlossen, dass $\varphi(\vartheta)$ in der fraglichen ch unendlich viele Maxima und Minima besitzen kann.

von $\varkappa$ und Verkleinerung von ϱ dem Charakter einer nothwendigen Bedingung in dem Sinne, dass im Falle:

$$(44) \qquad |\Delta(a)| \gtrless \left(\lg_1 \frac{1}{a} \cdot \lg_2 \frac{1}{a} \ldots \lg_\varkappa \frac{1}{a}\right)^{-1} = \lambda_\varkappa(a),$$

nicht nur jedes der Integrale (B) und (C), sondern auch der Grenzwerth (A) und somit schliesslich die Reihe $\varphi(\vartheta)$ eigentlich divergirt.

Um dies nachzuweisen, werde also angenommen, dass für $0 < a < \varepsilon$:

$$(45) \qquad \Delta(a) > g \cdot \lambda_\varkappa(a) \quad \text{bezw.} \leqq -g \cdot \lambda_\varkappa(a)$$

(wobei ε von vornherein so klein anzunehmen ist, dass $\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}$ und somit auch $\lambda_\varkappa(a)$ positiv ausfällt). Alsdann hat man behufs Abschätzung des Grenzwerthes (A) zunächst:

$$(46) \qquad \left|\int_0^\varepsilon \frac{\Delta(a)}{a} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da\right| > g \cdot \int_0^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} (1 - \cos n a) \cdot da,$$

und, wenn n von vornherein so gross angenommen wird, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$:

$$(47) \qquad \int_0^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da$$
$$+ \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot da - \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot \cos n a \cdot da$$
$$= N_1 + N_2 - N_3.$$

Dabei ergiebt sich unmittelbar:

$$(48) \qquad N_2 = \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{da}{a \cdot \lg_1 \frac{1}{a} \ldots \lg_\varkappa \frac{1}{a}} = -\left[\lg_{\varkappa+1} \frac{1}{a}\right]_{\frac{1}{n}}^\varepsilon = \lg \frac{\lg_\varkappa n}{\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Die Integrale N_1 und N_3 nehmen durch Einführung von $\frac{a}{n}$ an Stelle von a die folgende Form an:

$$(49)\quad N_1 = \int_0^1 \lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)\cdot\frac{1-\cos a}{a}\,da,\quad N_3 = \int_1^{n\varepsilon} \frac{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)}{a}\cdot\cos a\cdot da.$$

Da $\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)$ für $a=0$ verschwindet und gleichzeitig mit a monoton zunimmt, so hat man:

$$N_1 < \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^1 \frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\cdot da < \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right)$$

d. h.

$$(50)\qquad N_1 = \frac{\vartheta}{\lg_1 n \ldots \lg_\varkappa n},\quad \text{wo } 0<\vartheta<1,$$

sodass also N_1 für $\lim n=\infty$ verschwindet.

Um zur Abschätzung von N_3 den zweiten Mittelwerthsatz anzuwenden, soll zunächst gezeigt werden, dass $\frac{1}{a}\cdot\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)$ für $1<a<n\varepsilon$ monoton, nämlich beständig abnehmend, verläuft. Man hat:

$$\frac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)} = a\cdot\lg_1\left(\frac{n}{a}\right)\cdot\lg_2\left(\frac{n}{a}\right)\cdot\ldots\lg_\varkappa\left(\frac{n}{a}\right),$$

und daher:

$$(51)\quad \begin{aligned} D_a\left(\frac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)}\right) &= \lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}\left\{1-\frac{a\cdot D_a\left(\lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}\right)}{\lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}}\right\} \\ &= \lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}\left\{1-\frac{1}{\lg_1\frac{n}{a}}-\frac{1}{\lg_1\frac{n}{a}\cdot\lg_2\frac{n}{a}}-\ldots-\frac{1}{\lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}}\right\}.\end{aligned}$$

Da im Integrale N_3 (Gl. (49)):

$$1 \leq a \leq n\varepsilon, \text{ also: } \frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{n}{a} \leq n,$$

so ist $\frac{1}{\varepsilon}$ der kleinste Werth, den das Argument $\frac{n}{a}$ bei der Integration annimmt. Man kann nun ε von vornherein klein genug fixiren, sodass $\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon} > 1$, also um so mehr für jedes in Betracht kommende a: $\lg_\varkappa \frac{n}{a} > 1$. Alsdann wird aber:

$$\lg_{\varkappa-1} \frac{n}{a} > e, \; \lg_{\varkappa-2} \frac{n}{a} > e^e, \text{ u. s. f.,}$$

sodass als Summe der in (51) auftretenden k negativen Glieder ein durch Wahl von ε beliebig klein zu machender ächter Bruch resultirt. Hiernach hat man aber für das fragliche Integrations-Intervall:

$$D_a \left(\frac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)} \right) > 0, \tag{52}$$

d. h. $\frac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)}$ nimmt daselbst beständig zu, also $\frac{1}{a} \cdot \lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)$ beständig ab. Und man findet somit auf Grund des zweiten Mittelwerth-Satzes:

$$\begin{aligned} N_3 &= \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right) \int_1^\xi \cos a \cdot da + \frac{1}{n\varepsilon} \lambda_\varkappa(\varepsilon) \int_\xi^{n\varepsilon} \cos a \cdot da \\ &= 2\left(\pm \vartheta' \cdot \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right) \pm \frac{\vartheta''}{n\varepsilon} \cdot \lambda_\varkappa(\varepsilon)\right), \text{ wo: } 0 < \begin{Bmatrix} \vartheta' \\ \vartheta'' \end{Bmatrix} < 1, \end{aligned} \tag{53}$$

d. h. auch N_3 verschwindet für $\lim n = \infty$.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (48), (50), (53) geht dann schliesslich Gl. (47) in die folgende über:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\lambda_n(a)}{a} \cdot (1 - \cos n a) \cdot d a$$

$$(54) \qquad = \lg \frac{\lg_n n}{\lg_n \frac{1}{\varepsilon}} + (\vartheta \mp 2 \vartheta') \lambda_n \left(\frac{1}{n}\right) + 2 \vartheta'' \cdot \frac{\lambda_n(\varepsilon)}{n \varepsilon},$$

sodass also dieses Integral für $\lim n = \infty$ so unendlich wird, wie $\lg \frac{\lg_n n}{\lg_n \frac{1}{\varepsilon}}$. Aus Ungl. (46) folgt sodann, dass der absolute Werth des zu untersuchenden Integrals d. h. des Grenzwerthes (26) bezw. (A), also auch[1]) derjenige des Grenzwerthes (27) mindestens in derselben Weise unendlich wird und somit die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ an der fraglichen Stelle eigentlich divergirt. Man gewinnt auf diese Weise den folgenden Satz:

Die Reihe

$$\varphi(\vartheta) = \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu \cos \nu \vartheta - \beta_\nu \sin \nu \vartheta)$$

ist *eigentlich divergent*, wenn $\varphi(\vartheta + a) - \varphi(\vartheta - a)$ für $a < \varepsilon$ constantes Vorzeichen besitzt und für $\lim a = 0$ nicht stärker gegen Null convergirt, als $\left(\lg_1 \frac{1}{a} \cdot \lg_2 \frac{1}{a} \ldots \lg_k \frac{1}{a}\right)^{-1}$ bei beliebig grossem k.

6. Hieraus ergiebt sich aber insbesondere, dass die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ an jeder Stelle ϑ eigentlich divergiren muss, in deren Umgebung die Differenz $\varphi(\vartheta + a) - \varphi(\vartheta - a)$ über einer positiven oder unter einer negativen Zahl bleibt. Dies wird allemal dann der Fall sein, wenn $\varphi(\vartheta)$ an der fraglichen Stelle einen gewöhnlichen Sprung[2]) erleidet, d. h. wenn $\varphi(\vartheta + 0)$ und $\varphi(\vartheta - 0)$ beide existiren und von

[1]) s. p. 80, Fussnote.

[2]) Nach Dini's Bezeichnung eine Unstetigkeit erster Art. Vgl. Encykl. der Math. Wissensch. Bd. II, p. 29.

einander verschieden sind; aber auch dann, wenn nur $\underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) > \overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta-\alpha)$ oder $\overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) < \underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta-\alpha)$.[1]) Bezeichnet man jede derartige Unstetigkeit als einen Sprung schlechthin, so kann man also sagen, dass $\varphi(\vartheta)$ allemal eigentlich divergirt, wenn $\psi(\vartheta)$ einen Sprung erleidet. Und da offenbar analog das Auftreten eines Sprunges bei $\varphi(\vartheta)$ die eigentliche Divergenz der Reihe für $\psi(\vartheta)$ nach sich zieht, so ergiebt sich der folgende Satz:

> Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ mit absolut und beim Uebergange zur Convergenzkreis-Peripherie im allgemeinen gleichmässig integrabler Randfunction $f(e^{\vartheta i})$ ist *eigentlich divergent* an allen Sprungstellen von $f(e^{\vartheta i})$.

Bezeichnet man andererseits als sprunglose Unstetigkeiten solche, bei denen

$$\underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) < \overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta-\alpha), \quad \overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) > \underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta-\alpha)$$

und $\psi(\vartheta)$ in der Nähe der betreffenden Stelle alle zwischen jenen Limites enthaltenen Werthe durchläuft, (wie $\sin\frac{1}{\vartheta}$ bei $\vartheta=0$), so zeigt das Beispiel der Potenzreihe für $e^{\frac{x}{x-1}}$ (s. den Schluss von Nr. 4 dieses Paragraphen), dass deren Vorkommen die Convergenz der Potenzreihe an der betreffenden Stelle nicht ausschliesst.

Man gelangt also auf Grund dieser Betrachtungen zu dem folgenden, wie mir scheint, neuen und nicht unwichtigen End-Ergebnisse:

> Eine für irgend ein zusammenhängendes Bogenstück ihres Convergenzkreises *convergirende* Potenzreihe unterscheidet sich, als eine aus *zwei*

[1]) Beispiel:

$$\psi(\vartheta) = \lim_{n=\infty} \frac{1-\vartheta^n}{1+\vartheta^n} \cdot \left(1 + \sin^2 \frac{1}{\vartheta - 1}\right)$$

für $\vartheta = 1$.

von einander *abhängigen Fourier*'schen Reihen zusammengesetzte Reihe, in sofern wesentlich von einer *gewöhnlichen Fourier'schen* Reihe, als ihre Summe *niemals Sprünge* erleiden kann. Dagegen ist das Auftreten sprungloser Unstetigkeiten keineswegs ausgeschlossen.

In Folge dieses letzteren Umstandes, muss also jeder Versuch,[1] aus der blossen Convergenz von $\mathfrak{P}(x)$ auf dem Convergenzkreise die Gleichmässigkeit dieser Convergenz oder auch nur die Stetigkeit der Reihensumme erschliessen zu wollen, von vornherein aussichtslos erscheinen.

In wieweit dagegen umgekehrt aus der Stetigkeit von $f(e^{\vartheta i})$ auf die Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ geschlossen werden könne (NB. allemal unter Voraussetzung der Identität von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$) — diese Frage erscheint vorläufig noch als eine offene. Denn wenn auch aus den Untersuchungen Du Bois Reymond's[2] hervorgeht, dass es Functionen $\psi(\vartheta)$ giebt, deren Fourier'sche Entwickelung $\sum (b_\nu \cos \nu\vartheta + a_\nu \sin \nu\vartheta)$ an einer Stetigkeitsstelle $\vartheta = \vartheta'$ divergirt, so bleibt doch immerhin fraglich, ob nun auch das zugehörige $\varphi(\vartheta) = \sum (a_\nu \cos \nu\vartheta - b_\nu \sin \nu\vartheta)$ für $\vartheta = \vartheta'$ ebenfalls stetig ausfällt. Hiernach erscheint es zum mindesten nicht ausgeschlossen, dass die Stetigkeit von $f(e^{\vartheta i})$, d. h. die gleichzeitige Stetigkeit von $\varphi(\vartheta)$ und $\psi(\vartheta)$, stets die Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ zur Folge habe. Eine hinreichende Bedingung für diese letztere ergiebt sich im Anschlusse an die Bedingung (31), p. 88, wenn man beachtet, dass:

$$(55)\quad \Delta(a) = \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta)\} - \{\psi(\vartheta - a) - \psi(\vartheta)\},$$

und dass im Falle der Stetigkeit von $\psi(\vartheta)$, wegen: $\psi(\vartheta \pm 0) = \psi(\vartheta)$, die Bedingung:

$$(56)\quad |\psi(\vartheta \pm a) - \psi(\vartheta)| \leqq \left(\lg_1 \frac{1}{a} \cdots \lg_\varkappa \frac{1}{a}\right)^{-1} \cdot \left(\lg_\varkappa \frac{1}{a}\right)^{-\varrho} \quad (\varrho > 0)$$

---

1) ' … 75), p. 370; desgl. 29 (1884), p. 128.

einerseits die Convergenz der Reihe $\psi(\vartheta)$, andererseits mit Rücksicht auf Gl. (55) die Existenz der Beziehung (31) und somit auch die Convergenz der Reihe $\varphi(\vartheta)$ nach sich zieht. In Folge der zwischen $\psi(\vartheta)$ und $\varphi(\vartheta)$ bestehenden Reciprocität gewinnt man also noch den folgenden Satz:

> Die Reihe $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ *convergirt* an jeder Stelle ϑ, für welche der reelle *oder* imaginäre Theil von $f(e^{\vartheta i})$ *stetig* ist und ein der Bedingung (56) genügendes (rechtes und linkes) *Stetigkeitsmaass* besitzt.

7. Die Relation (28), p. 86, nämlich:

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da$$

kann zuweilen mit Vortheil sowohl als Summationsformel, als auch zur Auswerthung gewisser bestimmter Integrale angewendet werden. Dabei ist aber zu beachten, dass sie in der obigen Form nur dann gilt, wenn $\psi(\vartheta)$ über das Intervall $(-\pi, +\pi)$ hinaus periodisch fortgesetzt wird (vgl. p. 86 den Uebergang von Gl. (15) zu Gl. (16)). Wird dagegen $\psi(\vartheta)$ durch einen arithmetischen Ausdruck dargestellt, welcher an sich eine nicht-periodische Fortsetzung besitzt, so hat man die obige Formel durch die folgende, aus Gl. (12), (14), (15) hervorgehende, ohne die betreffende Verschiebung des Integrations-Intervalls zu ersetzen:

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da. \tag{57}$$

Um ein einfaches Beispiel zu geben, werde etwa gesetzt:

$$\psi(\vartheta) = \sum_1^{\infty}{}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\sin\nu\vartheta}{\nu} \quad \text{d. h.} = \frac{\vartheta}{2} \quad \text{für } -\pi < \vartheta < +\pi.$$

Alsdann wird:

$$\varphi(\vartheta) = \sum_1^{\infty}{}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos\nu\vartheta}{\nu},$$

und daher mit Benützung von Gl. (57):

$$\sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos \nu \vartheta}{\nu} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} (\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da,$$

(da: $\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \vartheta \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da = \vartheta \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cot\frac{a}{2} \cdot da = 0$). Ferner hat man:

$$\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da = \int_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da + \int_{-\pi}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da$$

$$= \int_{\pi-\vartheta}^{\pi} (a - 2\pi) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da + \int_{-\pi}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da$$

$$= -4\pi \cdot \left[\lg \sin\frac{a}{2}\right]_{\pi-\vartheta}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da,$$

also:

$$\sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos \nu \vartheta}{\nu} = \lg \cos\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da.$$

Daraus ergiebt sich für $\vartheta = 0$:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da = \sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} = \lg 2$$

(wie Legendre[1]) auf anderem Wege gefunden hat) und somit schliesslich:

$$\sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos \nu \vartheta}{\nu} = \lg \left(2 \cos\frac{\vartheta}{2}\right).$$

[1]) Exercices sur le calcul intégral, T. II, p. 200.

Sitzung vom 3. März 1900.

1. Herr J. Ranke hält einen Vortrag: „Ueber deformirte Schädel aus den Gräberfeldern von Ancon und Pachacamac bei Lima". Die Schädel sind von Ihrer Königlichen Hoheit der Prinzessin Therese von Bayern bei ihrer Reise in Peru gesammelt und der prähistorischen Sammlung zum Geschenk gemacht worden. Die Mittheilung ist für die Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe bestimmt.

2. Herr W. Koenigs bespricht eine von ihm mit Herrn Dr. Eduard Knorr ausgeführte Untersuchung: „Ueber einige Derivate des Traubenzuckers".

3. Herr Seb. Finsterwalder legt das von Herrn Dr. Adolf Blümcke und Herrn Dr. Hans Hess in Nürnberg herausgegebene und der Akademie zum Geschenk gemachte Werk: „Untersuchungen am Hintereisferner" vor.

4. Herr H. Ebert trägt die Resultate einer mit Herrn B. Hoffmann ausgeführten Arbeit: „Versuche mit flüssiger Luft" vor.

5. Herr R. Hertwig überreicht zwei Abhandlungen des Herrn Dr. Franz Doflein, Assistenten an der zoologisch-zootomischen Sammlung:

a) „über eine neue Süsswasserkrabbe aus Columbien, gesammelt von Ihrer Königlichen Hoheit der Prinzessin Therese von Bayern";

b) „weitere Mittheilungen über dekapode Crustaceen der k. bayerischen Staatssammlungen".



Ueber einige Derivate des Traubenzuckers.

Von **Wilhelm Koenigs** und **Eduard Knorr.**

(Eingelaufen 13. März.)

Bekanntlich hat Colley[1]) durch Behandlung von Traubenzucker mit Acetylchlorid eine Verbindung $C_6H_7Cl(OC_2H_3O)_4O$ dargestellt, in welcher vier Hydroxyle durch Oxacetylgruppen und das fünfte Hydroxyl durch Chlor vertreten ist. Er nannte dieselbe Acetochlorhydrose. Der Entdecker gibt an, dass es ihm nur zwei Mal gelungen sei, diese Verbindung in krystallisirtem Zustande zu erhalten. In der Regel bildet dieselbe einen farblosen zähen Syrup. Michael[2]) und nach ihm Drouin[3]) sowie Hugh Ryan[4]) haben die grosse Reaktionsfähigkeit der Acetochlorhydrose, welche sie ebenfalls in Form eines Syrups gewannen, zu schönen Synthesen verschiedener Phenol-Glucoside verwerthet. Der letztgenannte Chemiker hat auch aus der Galactose durch Behandlung mit Acetylchlorid ein entsprechendes Derivat dargestellt, welches übrigens auch wieder amorph war. Hugh Ryan bezeichnet die Acetochlorhydrosen aus Traubenzucker und aus Galactose als Acetochlorglucose und Acetochlorgalactose.

Bei Versuchen über das Verhalten der Acetochlorglucose empfanden wir es als einen grossen Uebelstand, dass man bei der syrupförmigen Beschaffenheit dieser Verbindung keine ge-

[1]) Colley, Annales de chimie et de physique [IV] 21, 363.
[2]) Michael, American Journal 1, 305 und 6, 336.
[3]) Drouin, Bulletin de la société chimique [III], 13, 5.
[4]) Hugh Ryan, Journal of the Chemical Society 75, 1054.

nügende Garantie für deren Reinheit besitzt. Indem wir den Traubenzucker der Einwirkung von Acetylbromid unterwarfen, gelang es uns das entsprechende Bromderivat des Traubenzuckers, die Acetobromglucose $C_6H_7Br(OC_2H_3O)_4O$ zu gewinnen, welche eine ähnlich leichte Vertretbarkeit des Halogens zeigt, wie die Acetochlorglucose. Vor dieser hat sie den Vorzug, dass sie sehr leicht krystallisirt, und dass ihre Reinheit durch die Bestimmung des Schmelzpunkts, der bei 88—89° liegt, rasch controlirt werden kann.

Die Acetobromglucose krystallisirt aus absolutem Aether in glänzenden weissen Nadeln. Auch aus hochsiedendem Ligroïn lässt sie sich umkrystallisiren. Sie löst sich kaum in Wasser, von welchem sie bei längerem Stehen — rascher beim Kochen — zersetzt wird. Sie ist rechtsdrehend und reducirt kochende Fehling'sche Lösung.

Wir haben zunächst das Verhalten der Acetobromglucose gegen Methyl- und Aethylalkohol und gegen Silberverbindungen etwas eingehender untersucht und haben dabei Folgendes beobachtet.

Bei längerem Stehen einer Lösung von Acetobromglucose in absolutem Methylalkohol bildet sich das β-Methylglucosid. Aus der Acetochlorglucose hat E. Fischer[1]) durch Einleiten von gasförmiger Salzsäure in die methylalkoholische Lösung das α-Methylglucosid erhalten.

Schüttelt man die methylalkoholische Lösung der Acetobromglucose mit trockenem, fein gepulvertem Silbercarbonat, so bildet sich die bisher noch nicht bekannte, prächtig krystallisirte Tetraacetylverbindung des β-Methylglucosids. Dieselbe schmilzt bei 104—105°, ist linksdrehend, reducirt nicht die Fehling'sche Lösung und wird bei längerem Stehen mit Normalnatronlauge zu β-Methylglucosid verseift. Durch Umsetzung mit Silbernitrat hofften wir aus der Acetobromglucose die von Colley entdeckte Acetonitrose zu erhalten. Als wir die methyl-

---

[illegible], Berichte der Deutschen chemischen Gesellschaft

alkoholische Lösung des Bromderivats mit einer methylalkoholisch-wässerigen Höllensteinlösung schüttelten, fiel zwar sofort quantitativ das Bromsilber aus, aber statt des erwarteten Salpetersäureäthers erhielten wir wiederum das Tetraacetyl-β-Methylglucosid. Dieselbe Verbindung entstand auch bei einem Versuch, die in Methylalkohol gelöste Acetobromglucose mit Traubenzucker, der in wenig Wasser gelöst war, bei Gegenwart von Silbercarbonat zum Derivat einer Diglucose zu combiniren.

Schüttelt man die aethylalkoholische Lösung der Acetobromglucose mit Silbercarbonat oder mit einer concentrirten wässerigen Lösung von salpetersaurem Silber, so entsteht das gut krystallisirende Tetraacetyl-Aethylglucosid. Dasselbe schmilzt bei 105—106°, ist linksdrehend und reducirt nicht Fehling'sche Lösung. Durch längeres Stehen mit Normalnatronlauge wird es verseift zu einer in Wasser und in Alkohol sehr leicht löslichen, linksdrehenden Verbindung, welche wahrscheinlich das bisher noch nicht bekannte β-Aethylglucosid darstellt. Bisher wollte dieses Produkt nicht krystallisiren; es reducirt Fehling erst nach längerem Erwärmen mit Normalsalzsäure, wobei Aethylalkohol abgespalten wird.

Durch Schütteln der in Eisessig gelösten Acetobromglucose mit Silberacetat erhielten wir die bei 130—131° schmelzende Pentacetylglucose. Diese letztere Verbindung gehört also zusammen mit der Acetobromglucose und [illegible] β-Methylglucosid in dieselbe stereochemische (β-) Reihe.

Mit trockenem Chlorsilber scheint sich die [illegible]glucose bei längerem Schütteln in absolut ätherischer [illegible] umzusetzen zu Acetochlorglucose, welche aus [illegible] Ligroïn krystallisirt. Mit Versuchen über die [illegible] trockenem Silberoxyd, Silbercarbonat, [illegible] auf die Lösungen der Acetobromglucose in [illegible] Aether, Aceton oder Benzol sind wir zur [illegible]



Versuche mit flüssiger Luft.

Von **Hermann Ebert** und **Berthold Hoffmann.**

(Eingelaufen 26. März 1900.)

A. Elektricitätserregung mit Hilfe von flüssiger Luft.

1. Füllt man flüssige Luft[1]) in ein Becherglas und hängt in dieselbe ein an einem Coconfaden befestigtes Metallstück, so erweist sich dieses, wenn man es nach einiger Zeit aus der flüssigen Luft herauszieht und an ein Elektroskop anlegt, stark negativ geladen. Wir haben diesen Versuch, welcher nie versagt, wenn die Luft in dem Glase schon einige Zeit gesiedet hat, und das isoliert aufgehängte Metallstück genügend lange in dieselbe eingetaucht war, mit Stücken von Aluminium, Eisen, Zink, Blei, Kupfer, Silber, Gold, Platin, Palladium, Zinn und Messing angestellt.

Aber auch Nichtleiter der Elektricität nehmen solche Ladungen an, so: Siegellack, Glas, Holz, Gummi.

Auch wenn die genannten Substanzen an einem Seidenfaden direkt in die Dewar'sche Vacuumflasche, in der die Luft nur schwach siedet, hineingehängt werden, nehmen sie nach einiger Zeit die genannte negative Ladung an.

2. Ein einfacher Voltaeffect in Folge des Contaktes der heterogenen Substanzen kann nicht die Ursache dieser Ladungen

---

[1]) Die bei den Versuchen benutzte flüssige Luft wurde uns in grösseren Mengen von der hiesigen Gesellschaft für Linde'sche Eismaschinen, speciell von der Abteilung für Luftverflüssigungs-Maschinen freundlichst zur Verfügung gestellt, wofür wir auch an dieser Stelle unseren besten Dank aussprechen.

sein; denn derselbe würde nur ein oder zwei Volt Spannung erzeugen können, während wir Hunderte von Volt Spannung an den eingetauchten Körpern maassen.[1]) Auch die niedrige Temperatur (—193° bis —183° C.) an sich kann nicht die Ursache der Elektrisierung sein. Eher könnte man an eine Elektricitätserregung in Folge der heftigen Verdampfung der flüssigen Luft denken. Die Aenderung des Aggregatzustandes an sich kann aber schon nach den Untersuchungen Faraday's nicht die Ursache der beobachteten Spannungserscheinungen sein; denn in der berühmten 18. Reihe seiner Experimental-Untersuchungen[2]) zeigt er an dem Beispiele des Wassers, dass die Elektricitätserregung unabhängig von der Verdampfung oder der Aenderung des Aggregatzustandes ist (2083). Ferner weist er nach, dass trockene Luft in allen Fällen gänzlich unvermögend ist, durch Reibung Elektricität zu erregen (2132). Die flüssige Luft sowie das aus ihr verdampfende gasförmige

---

[1]) Bei diesen Spannungsmessungen ist nicht ausser Acht zu lassen, dass die Capacität c der eingetauchten Metallstücke meist sehr klein gegenüber der Capacität c' der anzuwendenden Messinstrumente ist ($c' > c$). Ist also der eingetauchte Körper durch Aufnahme der Elektricitätsmenge E zu dem Potentiale $V = \frac{E}{c}$ geladen, so verteilt sich beim Anlegen desselben an das Elektrometer diese Ladung E auf einen Leiter von der Capacität $C = c + c'$, so dass die an dem nach Volt graduierten Elektrometer abgelesene Spannung $v = \frac{E}{C}$ zu klein ist, und die in dem Luftbad wirklich auftretende Spannung in dem Verhältnisse $\frac{V}{v} = \frac{C}{c} = 1 + \frac{c'}{c}$ grösser als die beobachtete ist. Da sich so kleine Capacitäten c, wie sie die hier verwendeten Versuchskörper haben, nur sehr schwer messen lassen, so verfährt man bei diesen Spannungsmessungen besser so, dass man das Elektrometer durch eine Trockensäule oder vielzellige Accumulatorenbatterie bis auf ein bestimmtes negatives Potential ladet und zusieht, ob sich der Ausschlag beim Anlegen des aus der Luft kommenden Körpers vergrössert oder vermindert; im ersteren Falle hat der Körper höheres (negatives) Potential, im zweiten niedrigeres, und so kann man die wirkliche Spannung in immer engere Grenzen einschliessen.

[2]) Experimental-Untersuchungen über Elektricität von Michael Faraday, deutsche Uebersetzung von S. Kalischer, 2. Bd. S. 96. 1890.

Produkt muss aber als überaus trocken angesehen werden, da das Wasser bei so niederen Temperaturen weder als Dampf, noch als Flüssigkeit bestehen kann, sondern der verdampfenden Flüssigkeit als Eis von äusserst niedriger Dampfspannung beigemengt ist.

Wenn also auch tropfbar flüssiges Wasser dem Wasserdampfe oder der Luft beigemengt und durch seine gasförmigen Träger gegen feste Substanzen geblasen vermöge der Reibung an diesen nach Faraday zu einem starken Elektricitätserreger wird, so kann dies hier dennoch nicht als Ursache der beobachteten Erscheinung herangezogen werden.

Dagegen könnte man vielleicht noch an eine Elektrisierung bei der Bereifung denken. Wird der Versuch, wie in § 1 angegeben ist, angestellt, so schlägt sich auf dem in der flüssigen Luft stark abgekühlten Körper, wenn man ihn herauszieht, um ihn dem Elektroskop zu nähern, sofort der Wasserdampf der umgebenden Luft als Reif nieder; dichte Nebel von condensiertem Wasserdampfe sinken dann von dieser Reifschicht herab. Dass auch hierin nicht die Ursache der Erregung liegen kann, wird schon durch die Bemerkung Faraday's wahrscheinlich gemacht, dass auch die Condensation von Wasser keine Elektrisierung hervorrufen kann (a. a. O. 2083). Um hierüber ganz sicher zu werden, haben wir Controlversuche mit fester Kohlensäure als Kühlmittel angestellt. Wenn dieselbe mit Aether vermischt auch nur Abkühlungen bis zu —80° C. zu erreichen gestattet, so erfuhren doch die gekühlten Präparate auch hier eine sehr starke Bereifung, und Nebelwolken senkten sich auf den seitlich von dem Elektroskopknopf herausragenden Metallarm, aber nicht die mindeste Elektrisierung war hierbei selbst an den empfindlichsten Instrumenten wahrzunehmen.

3. War nach den im Vorigen beschriebenen Controlversuchen eine direkte Wirkung der Bereifung bei der beobachteten Elektrisierungserscheinung ausgeschlossen, so konnte dieselbe doch möglicherweise indirekt mitgewirkt haben. Denn wenn der stark abgekühlte Körper sich mit einer Reif- oder

Eisschicht bedeckt, sowie er aus der flüssigen Luft herausgezogen wird, so könnte man zu der Vermutung neigen, dass die thatsächlich gefundene Divergenz der Elektroskopblättchen vielleicht einfach daher rühre, dass diese Eisschicht am Knopfe des Elektroskopes reibe und diesen negativ elektrisch mache, dass also die Vorgänge in der flüssigen Luft gar nichts mit der Elektrisierung selbst zu thun haben und diese nur als Kältemittel wirke. Dem gegenüber ist zu erwähnen, dass die eingetauchten Körper meist so stark elektrisiert aus dem Luftbade hervorgingen, dass sie schon durch Influenz, noch ehe sie das Elektroskop berührten, die Blättchen desselben zur Divergenz brachten.

Wiederholt man den Versuch oft mit demselben Körper, so bedeckt er sich allerdings schliesslich mit einer so dicken Schicht von Reif, dass nun andererseits die Vermutung ausgesprochen werden konnte, die eingetauchte Substanz spiele gar keine individuelle Rolle mehr, sondern die beobachtete Erscheinung brächte direkt eine negative Elektrisierung des Eises selbst zum Ausdruck. Es war daher geboten den Grundversuch bei völligem Ausschluss der Luftfeuchtigkeit und unabhängig von jeder Bereifung zu wiederholen. Wir haben daher eine Reihe von Versuchen in einem grossen Vacuum-Exsiccator angestellt, in den das Elektrometer sowie das Gefäss mit der flüssigen Luft selbst eingebaut waren; in ihm konnten die nötigen Hantierungen von aussen her mittels eines Glashebels verrichtet werden, der durch eine im Stopfen des Exsiccators sitzende Glasröhre hindurchging. Auf der Grundplatte der Exsiccatorglocke war ein grosses Gefäss mit concentrierter Schwefelsäure aufgestellt; auf diesem stand ein kleiner poröser Thonteller, auf dem Phosphorsäureanhydrid ausgestreut lag. Dieser Teller trug das für die flüssige Luft bestimmte Becherglas, das aussen mit einem Stanniolmantel umkleidet war, welcher durch einen durch den Stopfen isoliert hindurchgehenden Draht dauernd zur Erde abgeleitet war. Neben dem Schwefelsäuregefäss stand das Exner'sche Elektroskop, dessen [illegible] a die genannte Erdleitung ebenfalls angeschlossen

war. Das Vorzeichen aller Ladungen konnte durch eine von aussen genäherte, geriebene Siegellackstange in jedem Falle leicht festgestellt werden. Der Gummi-Stopfen in dem 3,4 cm weiten Tubulus der Glasglocke war fünffach durchbohrt; durch die mittelste weiteste Durchbohrung ging ein Trichterrohr aus dünnem Messingblech in das Innere des Becherglases; hier wurde die flüssige Luft eingegossen. Eine zweite Durchbohrung trug eine Glasröhre, durch welche der oben genannte Glashebel geführt war. Dieser war im Innern der Glocke knieförmig umgebogen und trug an seinem zu einem Haken zusammengebogenen Ende an einem Bündel von Coconfäden den in die flüssige Luft einzusenkenden Körper. Da sich beim Verdampfen der Luft allmählich eine immer sauerstoffreichere Atmosphäre entwickelt, so wählten wir ein möglichst schwer oxydierbares Metall und hängten an den Glashebel ein dünnes Palladiumblech. Durch den Hebel konnte dieses in das Gefäss getaucht oder aus ihm herausgezogen werden; durch Drehen an dem Glashebel konnte es dann gegen einen Palladiumring geführt werden, der an einem Seitenarm des Elektroskopes befestigt war. So waren durch die Anwendung desselben Metalles Voltaeffecte möglichst ausgeschlossen; Thermoeffecte bei der Berührung des gekühlten Bleches und des Ringes von Zimmertemperatur waren natürlich nicht zu vermeiden; ihr Einfluss ist aber jedenfalls verschwindend klein.

In einer dritten Stopfendurchbohrung war ein Rohr befestigt, welches sich zu einem Chlorcalciumrohr erweiterte, das durch einen Hahn abschliessbar war. Ein anderes Rohr diente zum Abzug des aus der flüssigen Luft verdampfenden Gasgemisches, durch die letzte der fünf Stopfenöffnungen war ein Glasrohr gezogen, in welches die von dem Innern herausführende Erdleitung eingekittet war.

Zunächst wurde das Trichterrohr und alle anderen Oeffnungen durch Gummiverschlüsse luftdicht abgeschlossen, und die ganze Glocke durch das Chlorcalciumrohr hindurch vermittelst der Wasserluftpumpe evacuiert und dann abgeschlossen.

Vor jeder Versuchsreihe stand der Exsiccator längere Zeit

(bis zu acht Tagen) evacuiert, sodass die in ihm aufgestellten Trockenmittel alle Feuchtigkeit absorbiert hatten. Dann wurde durch das Trichterrohr aus der Dewar'schen Flasche Luft in das Gefäss gegossen und gleichzeitig das Abzugsrohr geöffnet. Da die Luft, sowie sie in das in dem Exsiccator stehende Sammelgefäss hinabgelangt, sofort sehr heftig aufsiedet, so entweicht vom ersten Momente an nur trockene Luft von innen nach aussen, aber es vermag nicht Feuchtigkeit enthaltende Luft von aussen nach innen zu dringen.

Wiewohl also bei allen in diesem Raume angestellten Versuchen Reif- und Nebelbildung vollkommen ausgeschlossen war, gelang doch der in § 1 beschriebene Versuch jederzeit, diese Nebenerscheinungen waren demnach nicht die Ursache der beobachteten Elektrisierung.

4. Nachdem gezeigt war, dass die Elektricitätserregung in der flüssigen Luft selbst ihren Sitz habe, war es nötig näher zu prüfen, welchem Bestandteile derselben diese Wirkung zuzuschreiben sei. Neben den schon bei niedriger Temperatur allmählich verdampfenden Bestandteilen der reinen atmosphärischen Luft: Stickstoff, Argon und Sauerstoff enthält die flüssige Luft, wie sie von der Maschine geliefert wird, als Verunreinigungen noch Kohlensäure und Reste von Maschinenöl in festem Zustand. Im Laufe der Zeit gesellt sich aber auch Eis in reichlichem Maasse hinzu, da z. B. bei offen stehender Dewar-Flasche die Feuchtigkeit der Luft fortwährend als Schnee niedergeschlagen wird. Alle diese Beimengungen kann man aber durch Filtrieren der Luft leicht entfernen. Wir haben zunächst mehrere Versuche mit völlig reiner Luft angestellt, die ein in den Trichter der Exsiccatorglocke eingesetztes Papierfilter passiert hatte, ehe sie in das Versuchsgefäss im Inneren eintrat.

Diese Luft, die eine wundervoll bläuliche klare Färbung und das von K. Ol[illegible]ebene Absorptionsspectrum mit den vier [illegible][1]) giebt, selbst wenn

[1]) K[illegible]

sie z. B. am Anfange unmittelbar nach dem Eingiessen sehr heftig an den Gefässwänden und dem eingetauchten Körper emporschäumt, keine Spur einer Elektrisierung. Die Reibung der reinen flüssigen Luft vermag also weder Glas noch ein Metall durch Reiben elektrisch zu machen. Hierdurch wird das Faraday'sche Ergebnis (vgl. S. 108) bis zu Temperaturen von —193° hinab erweitert.

Um zu erkennen, welcher Bestandteil es nun ist, der bei nicht gereinigter, gewöhnlicher flüssiger Luft die beobachtete sehr starke Elektrisierung hervorruft, haben wir der reinen flüssigen Luft zunächst Kohlensäureschnee in reichlicher Menge beigesetzt. Hierbei war Vorsicht geboten; denn die feste Kohlensäure, wie sie der Bombe entnommen wird, zeigt immer eigene elektrische Ladung, meist eine positive. Wir haben daher grössere Stücke fester Kohlensäure zunächst zwischen zwei zur Erde abgeleiteten ebenen, dicken Zinkplatten zerkleinert, dann den fein zerriebenen Schnee am Elektroskop geprüft und erst wenn er sich gänzlich entladen zeigte in den Exsiccator geworfen. Alsdann zeigte sich keine Elektrisierung des eingetauchten Palladiumbleches, also auch die Spuren fester Kohlensäure, die immer der flüssigen Luft beigemengt sind und ihr das bekannte milchige Aussehen verleihen, sind nicht die Ursache der in § 1 geschilderten Erregungen.

Nun gingen wir dazu über der filtrierten flüssigen Luft Eis in möglichst fein verteiltem Zustande zuzusetzen. Dies war ausserordentlich schwierig, wenn dasselbe elektrisch völlig neutral in das Siedegefäss gelangen sollte. Denn jegliches Zerkleinern eines stark unterkühlten festen Eisstückes mit irgend einem Körper, Metall oder Nichtmetall würde dieses sehr stark positiv, das zerkleinernde Instrument negativ erregt haben (vgl. w. u. § 5 S. 115). Ja selbst als wir mittels eines Glaszerstäubers einen feinen Sprühregen von destilliertem Wasser gegen die filtrierte flüssige Luft richteten, wobei sich in derselben kleine Eiskügelchen ansammelten, erwies sich das in ihr gebildete Eis als überaus stark positiv elektrisch geladen. Wir haben hier den Effect der Dampfelektrisiermaschine, von dem

Faraday nachgewiesen hat, dass er auf der Elektrisierung der Wassertröpfchen beruht, wenn diese durch einen Dampf- oder Luftstrahl gegen irgend einen Körper geschleudert werden. Das Wasser nimmt immer (von wenigen Ausnahmen abgesehen vgl. w. u.) positive Ladung an. Beim Reiben am Zerstäuber oder beim Auftreffen auf die flüssige Luft werden die Tröpfchen elektrisiert und bleiben es, wenn sie zu Eis erstarren.

Wir haben schliesslich fein verteiltes Eis von nicht zu starker positiver Ladung in der flüssigen Luft dadurch angereichert, dass wir einen langsamen Luftstrom, der mit dampfförmigen Wasser beladen war, z. B. den Athem (da ja bereits nachgewiesen war, dass die Kohlensäure das Phänomen nicht hervorbringt) gegen die flüssige Luft richteten; dann erschien die negative Ladung des eingetauchten Körpers und wuchs in dem Maasse, wie das die flüssige Luft mehr und mehr trübende Eis sich anreicherte. Es ist also die Reibung des in der flüssigen Luft enthaltenen Eises, welche den eingetauchten Körper negativ elektrisiert, das Eis selbst aber positiv.

5. Dass das in der flüssigen Luft schwimmende, stark unterkühlte Eis, wenn es durch die Strömungen und Wallungen in der Luft gegen feste Körper gerieben wird, die Ursache der oben beschriebenen Elektricitätserregungen ist, wird noch durch einige andere Versuche bekräftigt. Die festen Reste, welche in den Siedegefässen zurückbleiben, wenn alle flüssige Luft verdampft ist, zeigen sich stets sehr stark positiv geladen und zwar unabhängig davon, ob das Abdampfen der Luft in einem Glasgefäss, in einem Gummibecher, der bei der Siedetemperatur der Luft steinhart wird, oder in einem Schälchen stattfindet, das aus Siegellack gepresst ist. Beim Auftauen der festen Rückstände erkennt man, dass sie zum grössten Teil aus Wasser bestehen (ein nie ganz fehlender Oelgeruch zeigt, dass ihm Spuren von Maschinenöl beigemengt sind). Schon Faraday wies auf die hohe Positivität des Wassers (2131), speciell des Eises hin, welches sogar durch Reiben mit flüssigem (condensiertem) Wasser positiv elektrisch wird, während alle anderen

Körper bei dieser Reibung negative Ladungen annehmen. L. Sohncke[1]) bestätigte dieses und fügte ausserdem einige wichtige Versuche hinzu, aus denen hervorging, dass vollkommen trockenes, sehr kaltes Eis beim Reiben mit festen Körpern: Messing, Stahl und Glas positiv elektrisch wird, während die reibenden Körper selbst negativ werden müssen. Durch unsere Versuche werden die Sohncke'schen Resultate bestätigt, ihr Gültigkeitsbereich bis zu Eistemperaturen von — 193° C. erweitert und die Versuchsergebnisse auf alle die in § 1 genannten Substanzen ausgedehnt.

Hat man nur wenig flüssige Luft zur Verfügung, so kann man den Eisreibungsversuch wie folgt anstellen: Man filtriert flüssige Luft aus der Flasche durch einen dünnwandigen Metalltrichter in ein Becherglas. Ein an einem isolierenden Faden hängendes Metallstück erweist sich selbst nach längerem Hängen in der filtrierten flüssigen Luft als unelektrisch, selbst wenn der sphäroidale Zustand lange überwunden ist, ein inniges Reiben der flüssigen siedenden Luft am Körper also stattgefunden hat. Mit der Zeit setzt sich oberhalb des Flüssigkeitsspiegels im Innern des Glases eine dichte Reifschicht an. Reibt man das stark gekühlte Metallstück an dieser, indem man es einige Male mittels des Fadens an der Gefässwand auf- und abgleiten lässt, so ist es so stark negativ geladen, dass schon ein unempfindliches Elektroskop diese Ladung anzeigt und der Versuch in dieser Form sogar ein bequemer Vorlesungsversuch wird. Die grosse Trockenheit der flüssigen Luft scheint die Erregung sehr zu begünstigen.

Bezüglich des Grades, in welchen die verschiedenen Körper durch die Eisreibung bei völligem Ausschluss der Mitbeteiligung von tropfbar flüssigem Wasser negativ erregt werden, haben wir keine wesentlichen Unterschiede constatieren können; Faraday fand bei der Wasserreibung Ausnahmen von der allgemeinen negativen Elektrisierung, die alle Körper auch bei

[1]) L. Sohncke, Wied. Ann. 28. p. 550. 1886 und: Ursprung der Gewitterelektricität und der gewöhnlichen Elektricität der Atmosphäre p. 36 ff. 1885.

dieser annehmen, nur bei drei Substanzen: Elfenbein, Federkiel und Bärenhaare (2099); diese Präparate wurden nur unmerklich erregt, Federkiel- oder noch besser Elfenbeinröhren ergaben an seiner Dampfelektrisiermaschine einen elektrisch neutralen Dampfstrahl (2102). Auch bei der Eisreibung scheinen diese Substanzen (wir konnten freilich nur die beiden erstgenannten prüfen) eine Ausnahmestellung einzunehmen, indem sie aus dem Luftbade positiv elektrisch oder neutral oder doch nur schwach negativ elektrisch geladen hervorgingen; jedenfalls war der Unterschied z. B. gegenüber einem Platinstück, welches abwechselnd in dasselbe Bad eingetaucht wurde, auffallend.

Nach Faraday setzen schon äusserst geringe Beimengungen öliger Substanzen die Wassertropfenreibungselektricität stark herab. Wir haben auch bezüglich der Eisreibung nach einem analogen Einflusse gesucht; durch direktes Zusetzen von flüssigen Oelen ist derselbe freilich schwer nachzuweisen, da die Oeltröpfchen in der flüssigen Luft sofort zu harten Kugeln erstarren. Indessen ist es nicht unwahrscheinlich, dass die S. 112 und 114 erwähnten geringen Beimengungen von Maschinenöl den hier studierten Effect beeinträchtigen, so dass man gut thut die Luft erst zu filtrieren und ihr dann durch Stehenlassen oder durch Anhauchen oder Einblasen gewöhnlicher Luft den nötigen Eisgehalt zu erteilen.

6. Dadurch, dass das reibende Eis positiv, jeder geriebene Körper aber ebenso stark negativ elektrisch wird, erklären sich einige Nebenerscheinungen, die sonst unverständlich wären. Verbindet man mit dem Elektrometer oder einem empfindlichen Galvanometer unter Erdung des anderen Poles einen Draht, den man in die flüssige Luft eintaucht, so erhält man keinen Ausschlag; reibender, + geladener und geriebener, — geladener Körper liegen nebeneinander, die Kraftlinien sind in sich geschlossen, freie Spannung kann nicht angezeigt werden. Erst wenn man beide trennt, den Draht heraushebt, oder das Gefäss senkt, zeigt das Elektrometer freie — Spannung auf dem Drahte an. Ebenso wird kein Ausschlag erhalten, wenn man

an das Elektroskop ein Platinschälchen befestigt, in das man flüssige Luft hineingiesst; trotz des heftigsten Siedens zeigt das Instrument keine freie Spannung an. Ordnet man dagegen den Versuch so an, dass man das Schälchen an einem nach unten gebogenen Draht und diesen an das Elektrometer befestigt, dann von unten her ein Glas mit flüssiger Luft nähert, so dass das Schälchen eintaucht, so erhält man nach Aufhören des Leidenfrost'schen Phänomens einen Ausschlag, sobald man die Schale mit dem Reibzeug, in diesem Falle den in der Luft schwimmenden Eispartikelchen, senkt.

7. Dieses haben wir dazu benutzt, mit Hilfe der flüssigen Luft gewissermaassen eine Eiselektrisiermaschine zu construieren: In eine Glasröhre von 1 cm lichter Weite und 10 cm Länge war ein zusammengerolltes amalgamiertes Kupferdrahtnetz von 5 cm Länge eingeschoben. Die Röhre hatte in der Mitte einen seitlichen Ansatz, durch den ein mit dem Netz in leitender Verbindung stehender Draht nach aussen führte. Oben war die Röhre mit einem Gummistopfen verschlossen, durch welchen ein Trichterrohr in's Innere führte; am unteren Ende war sie zu einem engeren Ausflussrohre von 12 cm Länge ausgezogen. Diese Röhre war in einem 4 cm weiten, 14 cm langen Glasrohre derselben Gestalt so befestigt, dass der seitliche Ansatz des kleinen Rohres in den des grossen genau hineinpasste, wodurch es möglich wurde den Ableitungsdraht völlig isoliert auch durch den so entstehenden Mantel nach aussen zu führen. Der Mantelraum war oben durch einen dreifach durchbohrten Stopfen verschlossen. Durch die erste, centrale Bohrung ging das erwähnte Trichterrohr zur inneren Röhre; die zweite nahm ein Trichterrohr für die äussere Röhre auf und die dritte Bohrung diente als Abzugscanal für verdampfte Luft. Unten war das Mantelrohr ebenfalls ausgezogen und von solcher Weite, dass das Ausflussrohr der kleineren Röhre eben hindurchging. Ein Stück übergezogenen Gummischlauches dichtete die ineinander sitzenden Röhren ab. Der Mantelraum war mit Chlorcalciumstücken angefüllt, um alle Feuchtigkeit vom Innenrohr abzuhalten; in ihn wurde vor

dem Versuche flüssige Luft gegossen, um den ganzen Apparat auf niedrige Temperatur zu bringen. Wurde nun auch durch das innere Rohr flüssige Luft gegossen, so machte das in ihr mitgeführte Eis beim Passieren des Drahtnetzes dieses negativ elektrisch; die durchgeflossene Luft konnte unten wieder aufgefangen werden. Hier wurde eine dauernde elektrische Erregung erhalten, solange flüssige Luft durch den Apparat floss. Bei dieser Elektrisiermaschine bewegt sich also das Reibzeug, der geriebene Körper bleibt in Ruhe. Jede Mitbeteiligung von flüssigem Wasser war hierbei durch den Trocken- und Kühlmantel ausgeschlossen.

8. Nicht unerwähnt darf bleiben, dass die genannten Versuche gelegentlich Störungen namentlich bezüglich des Vorzeichens der Ladungen erfahren können und zwar aus einem leicht ersichtlichen Grunde. Verbleiben die durch Reiben positiv gewordenen Eisstückchen in dem Gefässe, so reichern sie sich immer mehr an. Es kann dann geschehen, dass die negative Elektrisierung eines eingetauchten Körpers zurücktritt und dieser bei der Berührung mit vielen stark positiv geladenen Eisstücken von diesen durch Berührung Ladung annimmt und beim Herausziehen daher positiv und nicht negativ geladen erscheint. Dies ist besonders dann der Fall, wenn zerkleinertes Eis in das Luftbad geworfen wird (vgl. § 4). Diese Eisstückchen sind dann beim Zerbrechen durch die Reibung mit dem dazu benutzten Gegenstande so stark positiv elektrisch geworden, dass ihre Ladungen vollkommen den hier in Rede stehenden Effect überdecken.

9. Durch die im Vorigen beschriebenen Versuche dürfte gezeigt sein, dass beim Reiben mit vollkommen trockenem, sehr kaltem Eise fast alle Körper, insbesondere die Metalle, stark negativ elektrisch werden, wogegen das Eis selbst sich allen diesen Körpern gegenüber positiv erregt erweist. Die Untersuchungsmethode mit Hilfe der flüssigen Luft bietet hierbei augenscheinliche Vorteile gegenüber den gewöhnlichen Methoden, die äusserst difficil sind und auch nicht immer übereinstimmende Resultate gewinnen lassen. Vor

allem ist wichtig, dass man bei diesem sehr kräftigen Kältemittel den Wasserdampf in einfachster Weise von der Beteiligung auszuschliessen vermag, da der aus der Atmosphäre condensirte Dampf sogleich als Reif auf das Kühlmittel sowohl wie das gekühlte Präparat niederfällt.

Die Erscheinung, dass ein in flüssiger Luft gekühlter Körper stark elektrisch geladen wird, ist bei allen elektrischen Versuchen, bei denen flüssige Luft als Kühlmittel dient, wohl zu beachten!

Für die Meteorologie scheint uns gleichfalls das gefundene Ergebnis von Bedeutung zu sein. Für die sog. „Wärmegewitter" dürfte freilich die L. Sohncke'sche Theorie wohl ihr Recht behaupten, der zu Folge die Reibung des in der aufsteigenden Cumuluswolke emporgehobenen condensierten flüssigen Wassers gegen die Eisnädelchen der Cirrusschicht, in welche diese eindringt, die Ursache der Gewitterelektricität ist. Es giebt aber auf der Erde grosse Gebiete, in denen die Wirksamkeit von tropfbarem Wasser unwahrscheinlich ist: die höchsten, sehr kalten Regionen des Luftmeeres und die Polarzonen. Woher kommen jene wenn auch vielleicht nur schwachen elektrischen Erregungen, welche sich in den Polargebieten unseres Planeten vorwiegend längs der Magnetkraftlinien in Form der Polarlichterscheinungen ausgleichen? Diese Frage vermag die Lehre von der Elektrisierung beim Reiben von Wasser und Eis nicht zu lösen. Durch unsere Versuche wird aber wahrscheinlich gemacht, dass kosmischer Staub, kleinste Stein- oder Eisen-Meteorite, wenn sie sich mit den bis zu sehr hohen Schichten emporreichenden Eisnadeln (Cirrusschichten, leuchtende Nachtwolken?) bei ihrem Fall zur Erde reiben, genügend stark elektrisch werden, um in den gasverdünnten Regionen der Erde bei irgend einer Auslösung ein schwaches Elektroluminescenzlicht zu unterhalten (Himmelsphosphorescenz, Polarlicht u. s. w.). Die Versuche mit der flüssigen Luft zeigen ja, dass jene Erregungen selbst bei sehr niedrigen Temperaturen und in einer vollkommen wasserdampffreien Atmosphäre wirklich eintreten können.



Ueber eine neue Süsswasserkrabbe aus Columbien,

gesammelt von I. K. H. Prinzessin Therese.

Von Dr. **F. Doflein.**

(*Eingelaufen 3. März.*)

In meiner früheren Mitteilung über die von I. K. H. Prinzessin Therese gesammelten Dekapoden-Krebse[1]) habe ich unter dem Namen Potamocarcinus aequatorialis Ortmann einige Landkrabben erwähnt, welche auf dem Markte von S. Fé de Bogotá gekauft waren. Ich hatte damals schon Abweichungen von der Ortmann'schen Beschreibung konstatiert, aber erwähnt, dass auf Grund meines ungenügenden Materiales eine Entscheidung, ob es sich um eine neue Art handle, nicht möglich sei. Mittlerweile sind mir durch die Güte meines verehrten Freundes und ehemaligen Lehrers, Prof. Doederlein in Strassburg i/E., Exemplare zur Verfügung gestellt worden, welche jener Sammlung des Dr. Reiss entstammen, auf Grund deren Ortmann seinerzeit die neue Art aufgestellt hatte. Ich konnte also mit Exemplaren vergleichen, welche wohl noch mit Recht als Typen bezeichnet werden dürfen. Ich konnte feststellen, dass es sich nicht um die Ortmann'sche Art handelt, sondern um eine davon abweichende Form, welche dem ebenfalls bei Bogotá gefundenen Potomocarcinus (Pseudothelphusa) lindigianus (Rathbun) sehr nahe steht. Da aber gerade diejenigen Merkmale, welche zur Artdiagnose nach Miss Rathbun dienen sollen, entweder nicht deutlich aus-

[1]) S. diese Berichte 1899, p. 188.

geprägt sind oder deutlich abweichen, so glaube ich mich zur Aufstellung einer neuen Art berechtigt, welche ich der hohen Sammlerin zu Ehren benenne:

Potamocarcinus principessae n. sp.

Stirn mittelmässig mit einem aus deutlichen Granulationen bestehenden oberen Rand (Fig. 3). Der Merus des zweiten Gnathopoden hat einen geraden Aussenrand (Fig. 1). Die vorderen Abdominalhänge des Männchens sind merkwürdig gestaltet und sehr breit (Fig. 2).

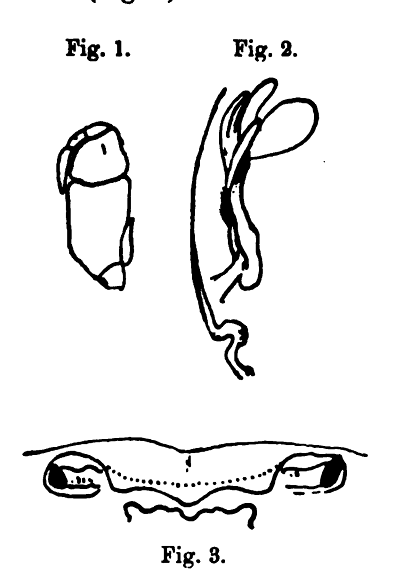

Fig. 1. Fig. 2.

Fig. 3.

In der letzteren Beziehung stimmt die neue Art mit lindigianus (Rathbun) überein. Dagegen ist der Carapax in transversaler wie longitudinaler Richtung fast flach; die Oberfläche ist punktiert, sehr fein granuliert. Die Granulationen werden gegen die Hinterseitenränder hin etwas gröber. Die Cervikalfurche ist nicht sehr tief, aber deutlich ausgeprägt. Vorderseitenrand mit sehr feinen Sägezähnen. Die Stirnbreite geht fast 5 mal in die Breite des Carapax. Stirn von oben zweilappig, Unterrand in 3 Zipfel ausgezogen, scharf gerandet

(Fig. 3). Das Ischium ist vorn am breitesten, ziemlich gleichmässig und mit parallelen Seiten ausgebildet. Merus 5 eckig mit geradem Aussenrand.

Fig. 2 gibt die beiden Abdominalanhänge der linken Seite eines ♂ von unten gesehen wieder. Sie stimmen mit der Beschreibung von Miss Rathbun für lindigianus überein, doch erwähnt die Autorin nur ein Paar Anhänge. Das zweite schlanke Paar hinter dem blattartig erweiterten ersten gelegen, erinnert sehr an den entsprechenden von P. aequatorialis, während das erste erheblich abweicht.



Von aequatorialis unterscheidet auch die Bildung der Scheeren, indem bei principessae die Hand etwas geschwollen, die Finger dagegen sehr schlank sind. Der Carpalzahn ist konisch und sehr scharf. Die Scheerenfüsse sind genau gleich gross. Ober- und Unterrand der Hand gleichmässig abgerundet, ebenso die Aussenseiten der Finger, welche mit scharfen dunkelgefärbten Spitzen endigen. Die ersten Zähne auf den Fingern sind ziemlich gross und nehmen gegen die Spitze zu continuirlich an Grösse ab. Durch die Bildung der Scheerenfüsse ist also die Art auch von aequatorialis deutlich zu unterscheiden.

Die Länge des kleineren ♂ ist 25 mm, die Breite 38 mm. Sonstige Masse sind aus der Abbildung zu entnehmen.

Die Art steht in vielen Beziehungen somit lindigianus sehr nahe, weicht aber hinreichend ab, um bei Anwendung der zur Zeit üblichen Merkmale eine neue Species zu rechtfertigen, wenn die Beschreibung von Miss Rathbun (Bull. Mus. d'Hist. nat. Paris T. III 1897) sich als genau erweist. Auch der Fundort ist nahezu derselbe.

S. Fé de Bogotá auf dem Markt gekauft; stammt aus dem Rio grande bei Soacha.

2 ♂, 2 ♀.

Weitere Mitteilungen über dekapode Crustaceen der k. bayerischen Staatssammlungen.[1])

Von Dr. F. Doflein.

(*Eingelaufen 3. März.*)

In den nachfolgenden Zeilen gedenke ich einige Resultate meiner Bearbeitung der Münchener Dekapoden-Sammlung niederzulegen, welche sich vorwiegend auf Systematik und geographische Verbreitung beziehen. Die ganze Liste unserer Sammlung zu publizieren, würde keinen Wert haben; ich begnüge mich damit, diejenigen Arten zu erwähnen, bei denen etwas von unseren bisherigen Kenntnissen Abweichendes zu bemerken ist. Einige allgemeine Bemerkungen werde ich erst am Schluss anfügen. Notizen zur Systematik werde ich jedoch jedesmal bei der betreffenden Gruppe vorbringen.

I. Penaeidea.

Um die Brauchbarkeit der Verschiedenheiten an Thelycum und Petasma, den Begattungsorganen, der Gattung Penaeus zur Unterscheidung von Arten zu prüfen, habe ich sämtliche mir zugänglichen Arten genau untersucht, und finde, dass diese Merkmale ausserordentlich scharfe Speziesunterscheidungen ergeben. Bei denjenigen Formen, bei welchen diese Organe noch nicht genauer beschrieben waren, füge ich eine genaue Beschreibung bei. Diese Charaktere waren zuerst von Spence Bate

[1]) Vgl. Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse 1899, pag. 177.

(Ann. nat. hist. vol. VIII 8881) hervorgehoben und dann von Ortmann (Zool. Jahrb. Abt. Syst. vol. V 1891) systematisch angewendet worden.

1) Penaeus caramote Risso.

Exemplare von Cadix und Villa franca.

Das Petasma ist symmetrisch, zwei Doppelrinnen bildend; Spitzen nicht hakenförmig, abgerundet.

Spangen convergieren nach vorn; schwach vierlappig. Thelycum eine nach vorn offene Tasche: hinterste Spange des Sternums hinter dem 5. Pereiopodenpaar gelegen, nach vorn und schwach auch nach hinten concav. Telson mit seitlichen Dornen, Rostralzähne $\frac{10-11}{1}$. Zwei tiefe Gruben zu beiden Seiten der Rostralleiste des Cephalothorax, ebenso eine Furche auf der hinteren Hälfte dieser selbst.

Die Art würde also in der Ortmann'schen Tabelle eine neue Unterrubrik für sich beanspruchen. Sie würde fallen unter . A . — BBBB.

2) Penaeus setifer L.

Petasma symmetrisch, vorn rund abgestutzt. Hakenspitzen der inneren Rinne vorhanden, aber nicht von aussen sichtbar. An der Unterseite des Petasma verläuft auf beiden Seiten von vorne aussen nach hinten und innen eine mit feinen Härchen besetzte Leiste (Fig. 1). Die Abbildung bei Sp. Bate ist nach meinen Exemplaren zu schliessen nicht ganz genau. Thelycum: Nach hinten und vorne concave Spange hinter dem letzten Pereiopodenpaar. Bei den ♀ meiner Sammlung finde ich keine typische Thelycumbildung; statt dessen sind die Coxen des 5., 4. und 3. Thorakalfusspaares mit starr über das Sternum hinausragenden Borsten bedeckt; so dass nur durch dieselben die Tasche des Thelycums anderer Arten ersetzt erscheint.

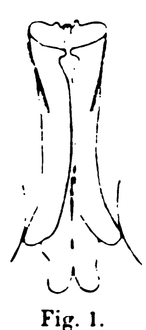


Fig. 1.

Meine Exemplare stammen aus:

1) Florida 2 ♂ 2 ⚲. Packard leg. 1876.
2) Mittelamerika (Atl. Ocean).
3) Santos. Salmin leg.
4) Charleston. Jos. Dingle leg.
5) 1 ♂ angebl. Indischer Ocean, jedenfalls eine Verwechslung

3) Penaeus brevicornis M-Edw.

1 ♀ Calcutta. Schlagintweit leg.

4) Penaeus brasiliensis Latr.

2 ♀ Rio Janeiro. Selenka 77.
2 ♀ 1 ♂ Rio Janeiro. Essendorfer 76.

II. Eucyphidea.

5) Atya scabra Leach.

Panama. Atlantische Seite. M. Wagner.

6) Atya (Evatya) crassa Smith.

Panama. Atlantische Seite. M. Wagner.

Bisher bekannt von Nicaragua, Mexiko. s. Ortmann, Proceed. Acad. nat. sci. Philadelphia 1899.

7) Caridina typus M-Edw.

Cap York. Salmin leg. Im Süsswasser.

Bisher war Amboina der östlichste bekannte Fundort; die Art hat also eine ähnlich weite Verbreitung wie C. wycki Hicks., indem sie von Mauritius bis Australien vorkommt.

8) Alpheus spinifrons M-Edw.

Steht dem laevimanus sehr nahe; meine Exemplare zeigen auf der Hand zwischen dem Dorn und der Basis des beweglichen Fingers noch einige (2—3) kleine Höcker oder Zähnchen.

Chile.

9) Alpheus neptunus Dana.

Atlantischer Ocean. Westafrikanische Küste. Salmin.

Bisher nur aus der Sulusee, Arafurasee.

10) Alpheus edwardsii Aud.

Bai von Rio Janeiro. Selenka 77.

Bisher von Nord-Carolina und den Bermudas bekannt. (s. Ortmann, Jen. Denkschriften VIII.)

11) Palaemon jamaïcensis Herbst.

Panama, atlantische Seite. M. Wagner.

12) Palaemon olfersii Wiegm.

1) Rio Chagres bei Panama. M. Wagner.
2) Puerto Cabello. Salmin.
3) Victoria (Kamerun). Preuss.

Das Kameruner Exemplar besitzt viel stärkere schwarze Stacheln auf der Hand, die auch regelmässiger gestellt sind, als bei den Amerikanern, wo die Behaarung überwiegt.

13) Palaemon acanthurus Wiegm.

1) Panama, atlantische Seite. M. Wagner.
2) Brasilien. Salmin.
3) Martinique. Dr. Doflein.[1]

14) Palaemon aztecus de Sauss.

Rio Chagres bei Panama. M. Wagner

Da mir de Saussures Arbeit im Original unzugänglich war, so ist die Bestimmung vielleicht ungenau.

15) Palaemon carcinus Fabr.

1) Ceylon
2) Orissa, Centralindien
3) Mandi (Kulu, Himalaya)

} Schlagintweit.

Von den Fundorten ist besonders derjenige hoch im Himalaya von Interesse.

[1]) Meine in der vorigen Mittheilung (loc. cit.) erwähnten Exemplare von P. lamarrei (von Martinique) gehören zu acanthurus Wiegm.

III. Loricata.

16) Palinurus vulgaris Latr.

Ein sehr grosses trockenes Exemplar unserer Sammlung zeigte die Augendornen viel weiter nach aussen gebogen, als die typischen Exemplare aus dem Mittelmeer. Es war bezeichnet als

Palinurus frontalis M-Edw.

Chile ? ?

Diese Art soll aber nach Ortmann (l. c.) zu Jasus gehören, welche Gattung durch die Stirnbildung deutlich unterschieden ist.

17) Panulirus argus Latr.

Wir besitzen Exemplare von

Martinique. leg. Doflein.
Surinam. Salmin.
St. Thomas. Essendorfer.
Rio Janeiro. Essendorfer.

Die beiden Exemplare von Surinam und St. Thomas zeigen keine Unterbrechung der Abdomenfurchen, ausserdem neben den 4 Haupthöckern des Antennensegmentes eine Anzahl kleiner Dörnchen. Beide sind grösser als die Exemplare von Martinique und Rio.

18) Panulirus bürgeri de Haan.

Japan. Salmin.

Bei unserem Exemplare (♀) dieser seltenen Art finde ich alle Angaben Ortmanns bestätigt.

19) Panulirus japonicus v. Siebold
stimmt überein mit den Ortmann'schen Angaben.

Das Exemplar nähert sich der Var. femoristriga in der Bedornung des Antennensegmentes, indem 2 kleine Dörnchen hinter dem Hauptdorn stehen, einige davor. Diese Nebendörnchen sind aber alle schwach ausgebildet. — Der Cephalo-

thorax ist mit Schuppen bedeckt, deren Rand mit einem Cilienkranz versehen ist. Ebenso besitze ich ein Exemplar von P. guttatus Latr., welches am ganzen Cephalothorax die gleiche Erscheinung zeigt. Nachdem ich ausserdem noch bei mehreren Arten sehr verschiedener Gattungen dieselbe Erscheinung habe konstatieren können, bin ich zu der Ansicht gelangt, dass die betreffenden Exemplare kurz vorher eine Häutung durchgemacht hatten. Die meisten der in Betracht kommenden Stücke zeichneten sich auch durch eine brilliante, wohlerhaltene Färbung aus. Ehe ich bei mehreren Arten diese Eigenschaft bemerkt hatte, bat ich den erfahrenen Crustaceenkenner Ortmann um seine Ansicht in dieser Sache; derselbe vertritt durchaus die Auffassung, dass es sich um eine Begleiterscheinung des Panzerwechsels handelt.

Ich fasse diese Schuppen also als eine Form der Häutungshaare auf, wie sie bei Arthropoden und bei schuppentragenden Wirbeltieren vorkommen. Wenn wir aber diese Gebilde physiologisch nehmen, als vorübergehende Erscheinungen zu einem gewissen Zweck, so wird dadurch ihre Bedeutung als Artmerkmal sehr beeinträchtigt; die mit diesem Merkmal unterschiedenen Arten z. B. der Gattungen Eriphia, Plagusia bedürfen also einer gewissenhaften Nachprüfung. Es erheischen übrigens noch viele der Höcker-, Schuppen- und Stachelbildungen auf dem Panzer der Crustaceen eine biologische Erklärung, und viele derjenigen Skulpturen, welche man als charakteristisch für eine Art beschrieben hat, erweisen sich als wechselnd nach Alter und Zustand des Individuums.

20) Panulirus orientalis n. sp.

Steht dem dasypus M.-Edw. sehr nahe, unterscheidet sich von ihm aber durch folgende Merkmale:

Während am 2. Gnathopoden die Ekphyse fehlt, besitzt diejenige des 1. Gnathopoden eine ganz kurze Geissel. Die Beine sind marmoriert, Abdomensegmente glatt. In den meisten anderen Merkmalen ist keine auffallende Abweichung vorhan-

den. Es sind 2 Dornen auf dem Antennensegment, am Hinterrand der Abdomensegmente findet sich je ein blaues und ein weisses Band. Auf den 4 ersten Abdomensegmenten finden sich Spuren einer nicht unterbrochenen Behaarung, ohne dass aber eine Furche auch nur angedeutet wäre.

Japan. Salmin.

21) Panulirus dasypus M.-Edw.

1 mittleres Exemplar, Färbung ganz abgeblasst. Die Abdomenfurchen sind deutlich und unterbrochen.

2 grosse, trockene Exemplare (♀) mit 4 Hauptdornen des Antennensegmentes, glatten Abdomensegmenten (aber Spuren gewesener Behaarung), keiner Ekphyse des 2. Gnathopoden und mit Ortmanns Beschreibung übereinstimmender Färbung.

Diese drei Exemplare scheinen mir sehr für de Mans Ansicht zu sprechen, dass die Arten polyphagus und fasciatus nur verschiedenen Altersstufen einer und derselben Species entsprechen. Vgl. Ortmann, Zool. Jahrb. Abt. Syst. Bd. X. S. 263.

Japan. Salmin.

22) Scyllarus aequinoctialis Fabr.

Obwohl bei meinen Exemplaren die Höcker deutlich behaart sind, scheint mir die Art doch von latus Latr. wohl unterscheidbar.

Surinam. Salmin. Antillen.

23) Scyllarides latus Latr.

Madeira. Herzog von Leuchtenberg.

War von den Canarischen Inseln schon bekannt.

24) Scyllarus arctus L.

1 juv. Rio Janeiro. Selenka 77.

Die Art von Miers schon für Senegambien angegeben scheint nach diesem Fund tropisch atlantisch zu sein; besonders häufig ist sie allerdings in der mediterranen Region.

25) Arctus tuberculatus Sp. Bate.

s. Challenger Report, Macrura S. 70.

Ein junges Exemplar liegt mir vor, welches dadurch auffallend ist, dass alle Höcker und Dornen in Form von Schuppen mit Cilien vorhanden sind. Vgl. hiezu das weiter oben unter Panulirus japonicus v. Sieb. gesagte.

Die Challenger Exemplare wurden zwischen Neu Guinea und Australien gedredgt. Mein Exemplar stammt aus Japan ohne genauere Angabe leg. Salmin.

IV. Nephropsidea.

26) Astacus fluviatilis Rond.

In unserer ziemlich grossen und von zahlreichen Fundorten stammenden Sammlung von Exemplaren dieser Art fielen mir besonders diejenigen

von Hof (Bayern) v. Siebold und aus dem Plötzensee bei Berlin auf.

Dieselben haben zumteil den Rand des Rostrums als Leiste fortgesetzt, so weit als der zweite postorbitale Höcker reicht; derselbe ist auch an einzelnen Exemplaren dornartig ausgebildet, würde also zu colchicus gehören. Da solche Variationen vorkommen, halte ich die letztere Art für nicht ganz sicher.

27) Astacus pallipes Penn.

Mailand (Fischmarkt). v. Siebold.

Diese Exemplare zeigen die Leiste auf dem Rostrum lange nicht so ausgesprochen, wie alle anderen von sehr zahlreichen verschiedenen Fundorten stammenden Stücke unserer Sammlung. Es ist also wohl anzunehmen, dass es sich um eine Zwischenform, vielleicht einen Bastard mit torrentium handelt.

28) Cambarus putnami Faxon.

Erie. Kreuzpointner.

29) Parastacus agassizii Faxon.

Lag. Llanquihué (Puerto Montt) Süd-Chile (leg. Heppke).

Meine Exemplare 12 ♂ und ♀ stimmen in allen äusseren Merkmalen durchaus mit der genauen Definition von Faxon (Proc. U. S. N. Mus. XX. 1898) überein. Nur die Kiemenformel weicht etwas ab. Vielleicht waren Kiemen an den schon so lange aufbewahrten Exemplaren der Hassler Expedition (1872), welche Faxon vorlagen, schon etwas maceriert und wurden von ihm daher nicht ganz richtig gesehen.

Ich finde:

	Podobranchien	Arthrobranchien		Pleurobranchien	Im Ganzen
VII.	ep.	0	0	0	= ep.
VIII.	1	1	0	0	= 2
IX.	1	1	1	0	= 3
X.	1	1	1	0	= 3
XI.	1	1	1	1	= 4
XII.	1	1	1	1	= 4
XIII.	1	1	1 (r)	1	= 4
XIV.	0	0	0	1	= 1
Summe	6 + ep	6	4 + r	4	

ep = Epipod r = rudimentär.

Die Gesammtzahl stimmt also, nur finde ich bei X keine Pleurobranchie, dagegen bei XIV eine.

Die Zähne am Merus des grossen Scheerenfusses sind undeutlich; die Mittelleiste auf dem innersten Blatt der letzten Abdominalanhänge endet ohne Spitze oder Dorn.

V. Paguridea.

30) Coenobita diogenes Latr.

1) Antillen. Salmin.
2) Savanilla. Essendorfer 2 ♂ 2 ♀.

Die Augenstiele sind durchaus nicht ausgesprochen rund, sondern nach der Medianebene abgeflacht, allerdings sind sie nicht so abgeplattet, wie diejenigen der indo-pazifischen Arten. Sonst stimmen die Exemplare gut mit Beschreibungen und Abbildungen überein.

31) Coenobita clypeatus Herbst.

1) Ceylon. Schlagintweit.
2) Celebes. Ludeking.

32) Coenobita rugosus.

var. wagneri nov. var.

Aehnelt sehr der var. pulchra Dana. Das dritte linke Schreitbein ist auf der Aussenseite bei weitem nicht so sehr abgeflacht, wie bei rugosus typ. Die schrägen Leisten auf der grossen Hand sind nur schwach ausgebildet, fehlen beim ♀. Beim ♂ linke coxa des 5. Pereiopoden schwächer vorgezogen als bei rugosus.

Scaphocerit der äusseren Antennen verwachsen, an beiden Scheeren Haarpolster. Augenstiele comprimiert. Am 5. linken Pereiopoden Aussenseite der Kralle glatt mit scharfer Kante, bei den übrigen Gliedern abgerundet, sehr schwach behaart.

Rio Bayano, bei Panama.
Pacifischer Ocean. M. Wagner.

Die Art ist also mit ihren verschiedenen Varietäten durch die ganze indopazifische Region bis in die westamerikanische verbreitet.

33) Coenobita spinosus M-Edw.

var. olivieri Owen.

Ostafrika. Engelhardt 1895.

Die Augenstiele sind oben mit sehr deutlichen Dörnchen bedeckt.

War bisher nur aus dem östlichen Indopacific bekannt.

34) Clibanarius speciosus Miers.

1) Campeche Bai. Salmin.
2) Kamerun. Gouverneur v. Zimmerer.

Stimmen beide genau mit der Beschreibung des Typus überein.

3) Savonilla. Essendorfer 76.

(Viele ♂ und ♀ jung und alt.)

Bei diesen sind zwar die Krallen viel länger als der Propodus, aber bei Exemplaren vom selben Fundort sind bald die hellen, bald die dunklen Streifen auf den Beinen breiter. Folglich gehört dies letztere Merkmal nicht in die Speziesdiagnose.

35) Clibanarius padavensis de Man.

Ceylon. Schlagintweit.

36) Clibanarius aequabilis Dana.

Tenerife. Rothpletz 87.

37) Clibanarius infraspinatus Hgdf.

Ceylon. Schlagintweit.

38) Pagurus striatus Latr.

var. pectinata Ortm.

St. Thomas. Essendorfer 76.

Bestätigt vollkommen die von Ortmann aufgestellte Varietät; auch der von ihm als nicht sicher angegebene Fundort (Brasilien) wird durch meine Exemplare wahrscheinlich gemacht. Sollte sich die var. pectinata in der Folge als auf die westlichen Litoralgebiete des atlantischen Ozeans beschränkt herausstellen, so dürfte es sich empfehlen, sie als gute Art abzutrennen.

39) Pagurus deformis M-Edw.

Ceylon. Schlagintweit.

Zwitter, wie die Exemplare von Ortmann und Hilgendorf.

40) Paguristes hians Hend.

4 ♀ Ceylon. Schlagintweit.
(Manila Challenger-Henderson).

VI. Galatteidea.

41) Aeglea laevis Latr.

See Llanquihué bei Puerto Montt, Heppke.

VII. Hippidea.

42) Lepidopa myops Stm.

Mazatlan. Salmin.

Stimpson beschrieb die Art vom Cap St. Lucas.

43) Albunea symmysta L.

Indischer Ocean.

44) Albunea pareti Guérin.

Campêchebai. Salmin.

Auch mir scheinen A. pareti, Gibbesi und lucasia zu einer Art zu gehören, vielleicht ist nur die letztere abzutrennen.

45) Remipes adactylus denticulatifrons Miers.

Caïro. Billharz.

(Wird wohl vom rothen Meer stammen.)

VIII. Oxystomata.

46) Mursia cristimanus Desm.

St. Helena. Salmin.

Bisher bekannt von der Cap-Küste.

47) Calappa convexa de Sauss.

" xanthusiana Stm.

Die Art steht in der Mitte zwischen japonica Ortm. und granulata L. Der Cephalothorax ist sehr stark gewölbt, also wie bei japonica, vielleicht sogar mehr. Die Höcker des Cephalothorax sind sehr stark, wie bei japonica.

Grösste Breite ungefähr beim 4. Hinterseitendorn, Dornen mit gekörnten Kielen wie bei granulata.

Der dritte Dorn ist der grösste am Hinterrand, aber der 4. ist überhaupt der grösste.

Wo bei granulata die innersten Dornen stehen, finden sich hier nur stumpfe Höcker. Vor dem grössten Dorn (4.) noch 3 deutliche, dann 2 undeutliche, dann Körner: was alles

von granulata abweicht. Spitze des äusseren Lappens des 3. Siagnopoden abgestutzt und stumpf ausgerandet (wie japonica).

Der Vergleich mit der Diagnose von C. xanthusiana Stimpson zeigt vollkommene Uebereinstimmung.

Wenn es sich nachweisen liesse, dass in den verschiedenen Altersstufen die Dornverhältnisse des Seiten- und Hinterrandes varriiren, so würde es sich höchstens um eine Varietät von japonica Ortm. handeln, welche dann über den nördlichen Pacific eine weitere Verbreitung besässe.

Mazatlan. Salmin.

48) Calappa gallus Hbst.

Kantavu, Viti Inseln. Dr. Buchner 1876.

49) Cryptosoma granulosum de Haan.

Chinesisches Meer. Salmin.

Das Exemplar hat auffallend weit vorstreckbare Augenstiele.

IX. Brachyura s. s.

50) Euphylax dovii Stm.

Pontarenas (Niederkalifornien). Salmin.

51) Portunus puber L.

Altata (Westküste von Mexiko). Salmin.

Bisher ist die Art nur aus dem atlantischen Ozean und dem Mittelmeer bekannt; daher halte ich die Zuverlässigkeit der Fundortsangabe vorläufig für anfechtbar.

52) Neptunus marginatus M-Edw.

Bucht von Rio Janeiro. Essendorfer 76.

Die Art ist von Milne-Edwards für Gaboon angegeben. Meine Exemplare befanden sich in einem Glas beisammen mit Callinectes sapidus Rathb., von dem sie sich aber durch die Form des Hinterleibs deutlich unterscheiden.

53) Neptunus hastatoïdes Fabr.

Sansibar. Salmin.

Bisher nur von östlicheren Fundorten bekannt.

54) Thalamita sima M-Edw.

juv. Rotes Meer. Fischer.

Dies junge Exemplar hat nur 4 Seitenrandzähne, während die erwachsenen deren 5 haben sollen; es wäre interessant festzustellen, ob dies eine regelmässige Erscheinung ist.

55) Myomenippe legoullii A. M-Edw.

Meine Exemplare, welche sonst in jeder Beziehung mit Abbildungen und Beschreibung der granulosa von Milne-Edwards übereinstimmen, besitzen eine, wenn auch schwache, so doch deutliche Gaumenliste, was nicht zu der Ortmann'schen Diagnose der Familie stimmen würde.

Cap York. Salmin.

56) Lophozozymus cristatus M-Edw.

Das Exemplar unterscheidet sich durch feineres Netz der Thorakalfärbung und mangelnde Behaarung der Scheeren vom Typ des Milne-Edwards. (Letzteres auch Ortmann, Z. J., Abt. Syst. VII, p. 457.)

57) Actaea granulata Aud.

Die 3 ♀ zeigen die typischen Granula, doch Annäherung der Fingerspitzen zur Löffelform, nähern sich damit den Actaeodes.

Auch ist die Art sehr ähnlich hystrix Miers, dessen Challenger-Exemplar ebenfalls vom Cap York herrührte; nur sind die Thoraxgranula verschieden.

Cap York. Salmin leg.

58) Actaea setigera M-Edw. (?)

Die Pereiopoden sind oben scharf gekantet, das Abdomen des ♂ ist 7 gliedrig. Bemerkenswert der Schutz des Auges durch ein Schüppchen mit Behaarung.

Südsee (?). Salmin.

59) Actaea granulosa Ad. und Wh.

Mein Exemplar stimmt vollkommen mit der Beschreibung von Adams und White überein. Ich glaube aber nicht, dass die Art thatsächlich zur Gattung Actaea gehört; es bestehen Beziehungen zu Xantho und zu Zogymus.

Siam. Salmin.

60) Actaea polyacantha Heller.

Ich vermute, dass die Art sich als identisch erweisen wird mit Actaea hystrix Miers (Challenger). Die 2 Exemplare von Ortmann (l. c.) aus dem Museum Godeffroy (jetzt im Strassburger Museum) unbekannten Fundorts stammen jedenfalls auch aus dem Indopacific; Miers Exemplar vom Cap York.

Rotes Meer. Pruner leg.

61) Xantho bidentatus M-Edw.

Unterscheidet sich durch die Zähne am Vorderseitenrand gut von punctatus; meine Exemplare sind jung; beim ♂ ist das Abdomen 7 gliedrig, die Furchen auf der Oberfläche ziemlich ausgesprochen.

Cap York. Salmin leg.

62) Xantho melanodactylus M-Edw.

Surinam. Salmin leg.

Bisher nur von der atlantischen Küste Afrikas bekannt.

63) Panopeus hartii S. Smith.

Diese Art ist offenbar in den Sammlungen selten vertreten. — Bisher: Abrolhos, M.-Edwards, Mission au Mexique.

Surinam. Salmin leg.

Familie Potamonidae Ortmann.

(Thelphusidae aut.)

64) Potamon fluviatile (Belon.)

Ein ziemlich grosses Material von verschiedenen Fundorten, welches mir vorliegt, scheint mir für lokale Variationen der Art zu sprechen. Doch kann ich mich über eine Auf-

stellung von geographischen Varietäten noch nicht entscheiden, dazu reicht mein Material nicht aus. Um aber die Untersuchung durch Jemand, dem vielleicht grösseres Material vorliegt, anzuregen, gebe ich folgende Beobachtungen:

Der Postfrontalrand zeigt bei den Exemplaren aus Aegypten und vom roten Meer meist glatte Linien; bei den Italienern sind die Ränder meist mehr oder weniger grob gekörnelt, während bei den palästinischen der ganze Rand mehr verwischt ist.

65) Potamon aurantium (Herbst).

2 ♂ aus Ceylon.
1 grösseres. Schlagintweit leg.
1 kleineres. Fruhstorfer leg.

Bei beiden ist der Hinterleib gleichartig ausgebildet; sonst sind kleine Verschiedenheiten vorhanden, welche ich auf das verschiedene Alter zurückführe.

66) Potamon larnaudi (M-Edw.).

Gehört in die Reihe des P. fluviatile in seiner ost-südlichen Ausbreitung. War bisher nur aus Hinterindien bekannt.

Calcutta. Schlagintweit leg.

67) Potamon vic. larnaudi.

Viele Exemplare aus Simla, Himalaya. Schlagintweit leg.

Ein Sammeltypus mit Charakteren von ibericum, denticulatum, larnaudi. Ist daher von grossem Interesse für die Frage der Abstammung und geographischen Verbreitung der Gruppe des P. fluviatile. P. larnaudi scheint überhaupt sehr zu variiren; ein weiteres Exemplar:

68) Potamon vic. larnaudi

weist durch seinen stark geschweiften Stirnrand auf Sinuatifrons hin.

Sumatra. Hofrat Martin leg.

69) Potamon (Potamonautes) indicum Latr.

1) 1 ♂ aus Jablpur (Malwa), Centralindien. Schlagintweit leg.
2) 1 ♂ Ceylon. Fruhstorfer 89.

Ist vielleicht ein juv. einer anderen Art, da indicum nach Wood-Mason im südlichen und östlichen Indien nicht vorkommen soll. Er ist auch durch die Form des Hinterleibes

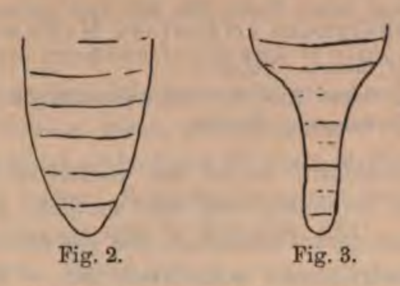


Fig. 2. Fig. 3.

ausgezeichnet. Fig. 2 stellt das Abdomen des typischen, Fig. 3 dasjenige des ceylonischen Exemplars dar. Ueberhaupt ist die Form des Abdomens zur Unterscheidung mancher Formen von grosser Wichtigkeit.

70) Potamon (Potamonautes) guerini M-Edw.

Ceylon. Schlagintweit leg.

Bisher von Ceylon nicht bekannt. Die Exemplare stimmen in einigen Punkten mehr mit der Diagnose von guerini, in anderen mehr mit planata überein, welche Arten sicher mit Recht von Ortmann zusammengezogen sind.

71) Potamon (Potamonautes) inflatum M-Edw.

stimmt am meisten mit inflatum überein, ähnelt jedoch sehr den afrikanischen Arten der perlatum-Gruppe. Daher wohl auch die Verwechslung durch Milne-Edwards. s. Ortmann t. J. Abt. syst. X. p. 308).

Nord-Ceylon, Reisfelder bei Candelay, Juni 1887. Fruhstorfer leg.

72) Potamon (Geothelphusa) obtusipes Stm.

Calcutta. Schlagintweit leg.

Bisher bekannt von Manila und den Liu Kiu Inseln. Die Spitzen der Finger sind mit feinen hornartigen Häckchen versehen, welche stark umgebogen sind, dadurch erscheinen die Finger obtusi. Das gleiche gilt für die stumpfen Endglieder der Schreitbeine.

73) Potamon (Geothelphusa) augustifrons M-Edw.

Cap York. Salmin.

♀ und ♂; gehört sicher zur Untergattung Geothelphusa.

74) Parathelphusa tridentata M-Edw.

1) ♂ ♀ Borneo. Rupert.
2) ♂ ♀ Boemi Ajoë (Borneo). Selenka und Scharfenberg.
3) ♂ ♀ Sumatra. Martin.

Die Granulationen, welche den hintersten Zahn mit der Postfrontalleiste verbinden, sind sehr deutlich, die Verhältnisse bei sinensis lassen darauf schliessen, dass eigentlich der hinterste Zahn als Epigastricalzahn aufzufassen ist. — Die Leiste erinnert sehr an Potamonautes, so dass die Gattung (wohl eher Untergattung) sich vielleicht von diesen ableiten lässt.

Familie Grapsidae.

75) Grapsus grapsus L.

Die sehr variable Form liegt von mehreren Fundorten beider Hemisphären vor; einige Merkmale scheinen aber konstant zu variiren. Es sind verschieden:

1) Der Anterolateralzahn,
2) die lateralen Stirnhöcker,
3) die 2 Stacheln auf der Stirnfläche.

	Oestliche Fundorte	Westliche Fundorte
1) Zahn	stumpfer Winkel	spitzer Winkel
2) Höcker	schmal	breit
3) Stachel	undeutlich	sehr deutlich
Fundorte:	Ras Muhammed	Surinam
	Sinaihalbinsel	Madeira
	Ostafrikanische Küste	

76) Goniopsis cruentatus Latr.

1) Atlantische Küste von Amerika. Essendorfer 76.
2) Kamerun. Gouverneur v. Zimmerer.

Die Suborbitallappen erreichen bei den meisten Exemplaren die Stirn nicht gänzlich, sind also durchaus nicht mit derselben

verwachsen; aber sie schliessen dennoch die Antennen so ziemlich von der Orbita aus. Nur bei dem ältesten Exemplar von Kamerun erreicht der Suborbitallappen die Stirn vollständig.

Von Kamerun war die Art noch nicht bekannt.

77) Metopograpsus latifrons White.

Meine Exemplare stimmen sehr genau mit der Diagnose von de Man überein, sodass ich gegenüber Ortmann dennoch geneigt bin, den viel schlankeren M. pictus M-Edw. für spezifisch verschieden zu halten. Besonders genau stimmen die Massverhältnisse des Carapax mit de Man (30 : 23).

Cap York. Salmin leg.

78) Pachygrapsus gracilis de Sauss.

Campeche Bai. Salmin leg.

79) Pachygrapsus transversus Gibbes.

Canarische Inseln. Minutoli leg.

80) Heterograpsus nudus Dana.

1) S. Francisco. Buchner 78 } leg.
2) Pacific Grove. Doflein 98 }

scheint mir identisch zu sein mit oregonensis Dana.

81) Sarmatium curvatum M-Edw.

Kamerun. v. Zimmerer leg.

82) Plagusia depressa Fabr.

Surinam. Salmin leg.

83) Plagusia immaculata Lam.

Rockhampton, Queensland. Salmin leg.

84) Plagusia tuberculata Lam.

1) Madeira. Herzog von Leuchtenberg.
2) Tenerife. Rothpletz 1887.

Durch diese beiden Fundorte wird die Art, welche bisher aus dem ganzen Indo-Pacific vom Rothen Meer bis zur Westamerikanischen Küste angegeben worden war, auch aus dem atlantischen Ozean nachgewiesen. Sie erweist sich damit als circumtropisch.

Ob dabei continuirliche Uebergänge zu depressa existieren oder ob dies selbst eine unsichere Art ist, vermag ich nicht zu entscheiden.

85) Sesarma cinerea Bosc.

Neue Fundorte: Martinique. Doflein leg.
Campêche Bai. Salmin leg.
Columbien. Prinzessin Therese v. Bayern leg.

86) Cardisoma guanhumi Latr.

Lagos und Gabon. Salmin leg.

Diese Exemplare beweisen mir die von Ortmann angenommene Identität von armatum mit guanhumi.

87) Ocypoda gaudichandii M-Edw. et Luc.

Panama, atlant. Seite. M. Wagner leg.

Auf der Etikette ausdrücklich als vom atlantischen Ocean stammend bezeichnet, während die Art bisher nur von der pazifischen Küste bekannt ist.

88) Ocypoda ceratophthalma Pallas.

Cap York. Salmin leg.

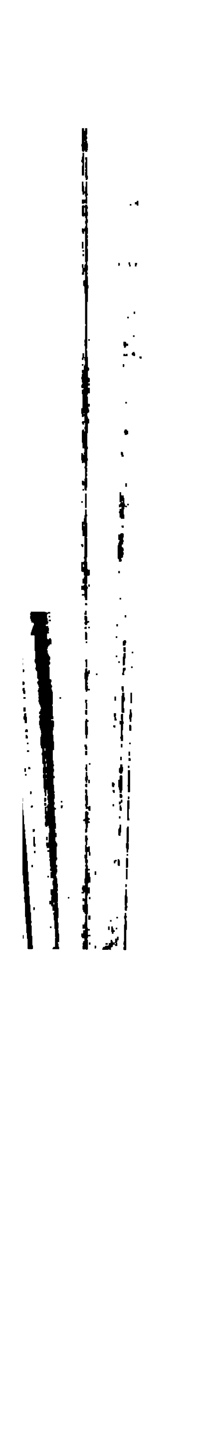
Sehr kurze Augenfortsätze!

Von grösserem Interesse dürften diejenigen der angeführten Verbreitungsdaten sein, welche sich auf die atlantische, die indopazifische Provinz und die Gegend des Isthmus von Panama beziehen. Während die letzteren manches Zweifelhafte enthalten und die Notwendigkeit einer Untersuchung der mittelamerikanischen Meeresfauna vor dem Bau eines interoceanischen Kanals sehr wünschenswert erscheinen lassen, bringen die ersteren eine Anzahl von Belegen für unsere tiergeographische Auffassung der grossen Oceangebiete.

Für das atlantische Gebiet ergab sich für eine Reihe von Arten, welche bisher erst von der einen Küste bekannt waren, dass sie auch an der gegenüberliegenden vorkommen, so für bisher nur in Brasilien gefundene ein westafrikanischer Fundort und umgekehrt. Wahrscheinlich werden diese Fälle immer

häufiger werden, je mehr insbesondere die westafrikanische Meeresfauna erforscht wird; diese bietet dem Sammeln dadurch gewisse Schwierigkeiten, dass selten solche Anhäufungen von Individuen und Arten zu finden sind, wie an den Küsten mit Korallenriffen.

Für die indo-pazifische Provinz hatte ich einige Resultate der gleichen Art zu verzeichnen. Auffallend ist die Ausbreitung mancher Arten bis in die westamerikanische Provinz, so von Coenobita rugosus mit der nov. var. Wagneri. Genauere Untersuchungen über die Ausdehnung der letzteren Provinz fehlen ja noch; das Vorkommen indopazifischer Arten im Golf von Panama lässt es möglich erscheinen, dass die Provinz nur eine schmale Zone umfasst, welche bedingt ist durch die kalten Strömungen und das kalte Auftriebwasser längs der Westküste von Nord- und Südamerika.



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. Mai 1900.

1. Herr H. SEELIGER legt eine Abhandlung des Herrn Professor MAX WOLF in Heidelberg: „Aussennebel der Plejaden" mit 2 Tafeln vor. Dieselbe ist für die Abhandlungen der Akademie bestimmt.

2. Herr SEB. FINSTERWALDER macht unter Vorzeigung von Karten eine Mittheilung: „Ueber die Construktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen."

3. Herr FERD. LINDEMANN legt eine Abhandlung von Dr. JOHANN GÖTTLER, Privatdozent an der Universität, vor: „Conforme Abbildung der Halbebene auf ein Flächenstück, welches von einer cirkularen Curve dritter Ordnung oder von einer bicirkularen Curve vierter Ordnung begrenzt wird.

4. Herr P. GROTH legt drei aus seinem Institut hervorgegangene Arbeiten vor:

a) von Fräulein KELLY: „Ueber Conchit, eine neue Modifikation des kohlensauren Kalks."

b) von Herrn Privatdozenten Dr. ERNST WEINSCHENK: „Chemisch-geologische Studien; zur Kenntniss der Graphitlagerstätten

II. Alpine Graphitlagerstätten.

III. Die Graphitlagerstätten der Insel Ceylon."

Beide Abhandlungen sind für die Abhandlungen der Akademie bestimmt.

Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen.

Von **S. Finsterwalder.**

(Eingelaufen 5. Mai.)

(Mit Taf. I.)

Hat man von einem Objekt zwei Photographieen E und E' mit innerer Orientierung, das heisst solche, zu welchen die relative Lage des zugehörigen perspektivischen Centrums bekannt ist, so reichen dieselben theoretisch ohne weiteres hin, um das dargestellte Objekt sowie die Lage der beiden Aufnahmepunkte gegenüber demselben bis auf den Massstab zu bestimmen.[1]) Die Kenntnis irgend einer Länge des Objekts genügt dann zur Festlegung des Massstabes. Bis jetzt ist ein in allen Fällen praktisch gangbarer Weg zur Lösung dieser Aufgabe nicht bekannt. Man bedarf dazu der von Herrn Guido Hauck so benannten gegnerischen Kernpunkte,[2]) d. i. der gegenseitigen Perspektiven des einen Standpunktes vom andern aus, deren Auffindung beträchtlichen rechnerischen oder konstruktiven Schwierigkeiten begegnet. Indessen, selbst wenn

[1]) Vergl. z. B. das Referat des Verfassers über die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 6. Bd., S. 15.

[2]) Ebenda S. 9, sowie die Abhandlungen des Herrn Hauck über die Theorie der trilinear-projektivischen Systeme, Crelle's Journal, Bd. 96 und 97.

wir einen Weg zur Lösung der genannten Aufgabe hätten, wäre damit für die photogrammetrische Terrainaufnahme vom Ballon aus wenig gedient, denn bei einer solchen handelt es sich nicht blos um die Ermittelung der Terrainformen an sich, sondern speziell um ihre Beziehung zur Lotrichtung. Eine Kurvenaufnahme des Terrains z. B., bei welcher die Ebenen der Kurven nicht horizontal sind, würde, obwohl sie die Terrainformen vollständig darstellt, wenig nützen. Zwar würde bereits die Kenntnis des Fluchtpunktes der Lotlinien auf einer der beiden photographischen Perspektiven zur Herstellung der richtigen Horizontalkurven ausreichen, allein die oben gekennzeichneten Schwierigkeiten lassen es geraten erscheinen, sich bei der Lösung der Aufgabe nicht auf das theoretisch zulässige Minimum an Kenntnis des darzustellenden Objektes und der zugehörigen Lotrichtung zu beschränken. Nur so erzielt man nämlich nicht nur eine ausführbare Lösung, sondern auch Kontrollen, welche die Richtigkeit derselben sicher stellen.

Zunächst sei vorausgesetzt, man kenne Grundriss und Höhe von vier auf zwei photographischen Bildern E' und E'' dargestellten Punkten des Terrains A, B, C, D, sowie von den beiden photogrammetrischen Standpunkten O_1 und O_2 (Ballonörter); man soll Grundriss und Höhe irgend eines weiteren auf beiden Bildern dargestellten Terrainpunktes P finden. Später soll auseinandergesetzt werden, auf welche Weise man in den verschiedenen Fällen die Ballonörter bestimmt, bezw. wie man auf die Kenntnis eines oder zweier Terrainpunkte verzichten kann.

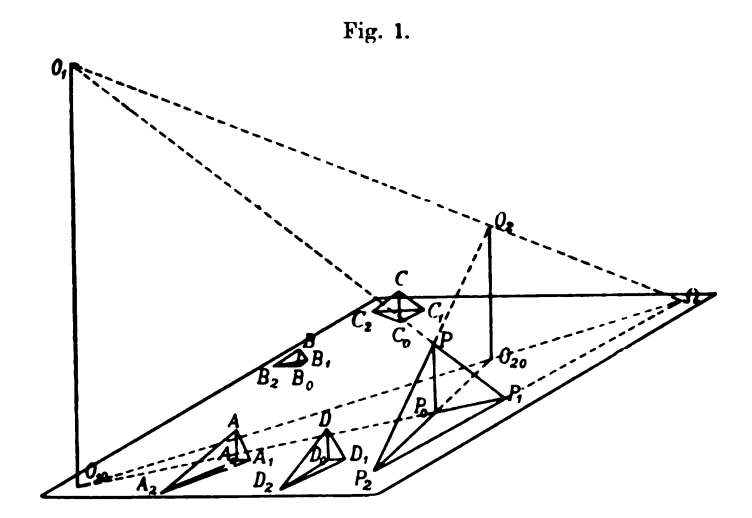
Zur Lösung der erstgenannten Aufgabe bedient man sich am besten der Vermittelung der beiden Perspektiven des Terrains von den jeweiligen Standpunkten auf die Grundrissebene E_0. Es seien O_1 und O_2 (vergl. Fig. 1) die Standpunkte (Ballonörter), O_{10} und O_{20} ihre Grundrisse, P ein Punkt des Terrains, P_1 und P_2 dessen Perspektiven von den beiden Standpunkten aus auf die Grundrissebene und P_0 dessen Grundriss. Kennt man P_1 und P_2, so erhält man P_0 als Schnitt von $O_{10} P_1$ und $O_{20} P_2$. Die Höhe $P_0 P$ des Punktes P über dem Grundriss ergibt sich zweifach aus folgenden Proportionen:

$$P_0 P : O_{10} O_1 = h : H_1 = P_1 P_0 : P_1 O_{10}$$
$$P_0 P : O_{20} O_2 = h : H_2 = P_2 P_0 : P_2 O_{20}, \quad (1)$$

wobei H_1 und H_2 die Ballonhöhen sind.

Ausserdem muss die Verbindungslinie $P_1 P_2$ durch den Punkt Ω gehen, in welchem $O_1 O_2$ die Grundrissebene schneidet. Nur in diesem Fall schneiden sich nämlich die beiden Strahlen $P_1 O_1$ und $P_2 O_2$ in einem Punkt des Raums. Diese Probe ist äquivalent mit der Höhenprobe, welche sich bei der doppelten Ausrechnung von h aus den beiden Proportionen ergibt.

Fig. 1.



Somit ist die Konstruktion von Grundriss und Höhe des Terrainpunktes auf die Bestimmung von P_1 und P_2 zurückgeführt. Diese aber kann einfach auf folgende Weise geschehen (vergl. Fig. 1): Es seien A_1, B_1, C_1, D_1 die 4 Punkte, welche durch Centralprojektion von O_1 aus auf die Grundrissebene aus den 4 bekannten Terrainpunkten A, B, C, D entstehen und sich aus deren Grundrissen A_0, B_0, C_0, D_0 und den zugehörigen Höhen ohne weiteres konstruieren lassen (vergl. Fig. 1). Es ist nun das Punktfeld A_1, B_1, C_1, D_1, P_1 der Ebene E_0 perspektiv zum photographischen Bild A', B', C', D', P' der

Ebene E' von O_1 aus, daher kann P_1 aus P' linear ermittelt werden. Dies geschieht am sichersten rechnerisch, wobei man von der Bemerkung ausgeht, dass die (rechtwinkeligen, schiefwinkeligen oder projektiven) Koordinaten von P_1 in der Grundrissebene E_0 mit den Koordinaten von P' in der Bildebene E' durch linear gebrochene Relationen[1]) zusammenhängen, deren Koeffizienten sich dann besonders einfach bestimmen lassen, wenn in den beiden projektiven Ebenen jene Parallel-Koordinaten x_1, y_1 bezw. x', y' eingeführt werden, welche zu den Verbindungslinien $A_1 C_1$ und $B_1 D_1$ resp. $A' B'$ und $C' D'$ als Axen gehören (vergl. Fig. 2). Die Relationen können dann so geschrieben werden:[2])

$$\frac{1}{x_1} = \alpha - \beta \frac{y'}{x'} + \gamma \frac{1}{x'}$$

$$\frac{\varkappa}{y_1} = \alpha \frac{x'}{y'} + \beta - \gamma \frac{1}{y'} \qquad (2)$$

Zur Bestimmung von α, β, γ, $\varkappa$ hat man nun folgende vier Gleichungen:

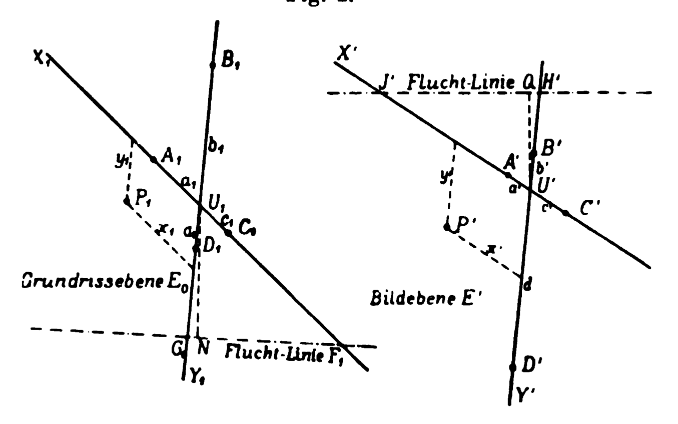
[illegible] (3)

[illegible]

Die Buchstaben a_1, b_1, c_1, d_1 bezw. a', b', c', d' bezeichnen dabei die absoluten Werte der Koordinaten der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 bezw. A', B', C', D' im genannten System (vergl. Fig. 2). Aus den Gleichungen (3) lassen sich die Konstanten der Formeln (2) folgendermassen successive berechnen:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{c_1}}{\frac{1}{a'}+\frac{1}{c'}}\\ \alpha &= \frac{1}{a_1}-\frac{\gamma}{a'}=\frac{\gamma}{c'}-\frac{1}{c_1}\\ \varkappa &= \gamma_1\frac{\frac{1}{b'}+\frac{1}{d'}}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{d_1}}\\ \beta &= \frac{\varkappa}{b_1}-\frac{\gamma}{b'}=\frac{\gamma}{d'}-\frac{\varkappa}{d_1}\end{aligned} \tag{4}$$

Fig. 2.



Entnimmt man dem Bilde E' die Koordinaten x', y' von P', so kann man nun mittels der Formeln (2) die Koordinaten x_1, y_1 des Punktes P_1 der Grundrissebene finden. Die Formeln

(2) sind bereits in jene Gestalt gebracht, welche für den Gebrauch des Rechenschiebers am vorteilhaftesten erscheint. In analoger Weise findet man die Koordinaten x_2, y_2 von P_2, wobei man vorher die Koeffizienten jener neuen Formeln zu berechnen hat, durch welche der Zusammenhang zwischen den x_2, y_2 des Punktes P_2 der Ebene E_0 und x_2', y_2' des Punktes P_2' der zweiten Photographie E'' dargestellt ist. Die Koordinaten x_2, y_2 sind auf ein von dem früheren etwas verschiedenes Koordinatensystem bezogen, da A_2, B_2, C_2, D_2 im allgemeinen nicht mit A_1, B_1, C_1, D_1 zusammenfallen werden. Hat man so die Punkte P_1 und P_2 nach ihren Koordinaten aufgetragen, so ergibt sich P_0, wie erwähnt, als Schnitt von $P_1\,O_{10}$ und $P_2\,O_{20}$ und die Höhe h auf doppelte Weise aus den Proportionen (1).

Will man die Rechnung vermeiden, so kann man sich zur Bestimmung der Punkte P_1 und P_2 auch der durch 4 Punktepaare gegebenen projektiven Beziehung des Möbius'schen Netzes bedienen, wie ich bei einer andern Gelegenheit auseinandergesetzt habe. (Vergl. das S. 149 citierte Referat S. 6.) Um längeren Konstruktionen in den Ebenen der Photographieen E' und E'' aus dem Wege zu gehen, wird man ein in die Bilder mechanisch einkopiertes Quadratnetz in die Grundrissebene E_0 übertragen, wo es dann als Möbius'sches Netz erscheint.[1]) Es ist dies auf rein graphischem Wege allerdings nur sehr schwierig mit der nötigen Genauigkeit zu erreichen. Sollen die Vorteile, welche das Möbius'sche Netz bei der Bestimmung einer grossen Zahl von Punkten bietet, nicht durch Ungenauigkeit der zeichnerischen Ausführung beeinträchtigt werden, so ist es das Empfehlenswerteste, die Randpunkte des Quadratnetzes der Bildebene auf dem rechnerischen Wege mittels der Formeln (2) in die Ebene E_0 zu übertragen und durch Ziehen der Verbindungslinien das Netz zu vervollständigen. Die weitere Ausführung der Netzmaschen, bezw. die Eintragung der Punkte P_1 und P_2 geschieht dann auf dem

[1]) In der beifolgenden Tafel I ist ein solches Möbius'sches Netz eingetragen.

Wege der Proportionalteilung, indem man die projektive Beziehung der Ebenen E' bezw. E'' und E_0 innerhalb einer Masche näherungsweise durch eine affine Beziehung ersetzt.

Aus den Formeln (2) kann man übrigens sehr einfach die Lage der Fluchtlinien in den Ebenen E' bezw. E'' und E_0 berechnen (vergl. Fig. 2). Sind p_1 und q_1 die Abschnitte der Fluchtlinie auf den Koordinatenaxen in E_0, p' und q' die analogen Grössen in E', so ergeben sich aus (2) die einfachen Beziehungen

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{\alpha}; \qquad q_1 = \frac{\varkappa}{\beta} \\ p' &= -\frac{\gamma}{\alpha}; \qquad q' = -\frac{\gamma}{\beta} \end{aligned} \tag{5}$$

Kann man nun über das dem Möbius'schen Netz zu Grunde gelegte Quadratnetz in E' noch verfügen, so legt man dasselbe am besten parallel zur Fluchtlinie und erreicht dadurch, dass eine Schar von Linien des Möbius'schen Netzes ebenfalls parallel zur Fluchtlinie wird. Man erspart dann die Umrechnung eines Teiles der Randpunkte.

Neben der oben auseinandergesetzten Methode, die beiden Punktfelder P_1 und P_2 in der Ebene E_0 auf projektivem Wege aus den photographischen Bildern zu entwickeln, ist noch eine mehr elementare denkbar, die auf den Regeln der darstellenden Geometrie beruht und bei welcher man den Grundriss und Aufriss der projizierenden Strahlbüschel von O_1 und O_2 aus zu Hilfe nimmt. In der Praxis versagt die direkte Anwendung dieser Methode wegen ihrer Ungenauigkeit und Unbequemlichkeit. Die Genauigkeit der Methode hängt nämlich in erster Linie davon ab, wie scharf die Ermittelung der äusseren Orientierung der beiden Strahlbündel O_1 und O_2 gelingt und jeder Fehler in den Ballonörtern oder in der Stellung der Bilder geht in vollem Betrag auf die zu konstruierenden Terrainpunkte über. Hingegen ist die projektive Methode von der Genauigkeit der Ballonörter fast unabhängig, solange nämlich die Ballonhöhen sehr gross gegen die Terrainhöhenunterschiede sind. Wären letztere Null, so brauchte man die

Ballonörter überhaupt nicht, die beiden Punktfelder P_1 und P_2 in E_0 würden sich decken und direkt die Horizontalprojektion liefern. Aber noch ein weiterer sehr wesentlicher Vorteil spricht zu gunsten der projektiven Methode. Während man bei der Methode der darstellenden Geometrie auf die Richtigkeit der metrischen Verhältnisse angewiesen ist und daher immer auf das Originalnegativ oder auf ein davon abgenommenes Glasdiapositiv zurückgehen muss, kann man bei der projektiven Methode ohne weiteres mit fixierten Papierbildern oder Vergrösserungen arbeiten, da ja die Veränderungen, die diese gegenüber dem Originalnegativ zeigen, sehr genau durch eine affine oder projektive Transformation ersetzt werden können, und daher die Werte der Doppelverhältnisse, auf die es bei der projektiven Methode allein ankommt, nicht beeinträchtigen. Durch die Benützung von Vergrösserungen lässt sich aber die Genauigkeit und Bequemlichkeit erheblich steigern. Wenn es sich wie in der Regel bei den Terrainaufnahmen um die Eintragung des Konstruierten in die vorhandenen Karten handelt, so hat man bei der Methode der darstellenden Geometrie noch mit dem Papiereingang der Karte, der in der Regel nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, zu kämpfen, was bei der projektiven Methode wegfällt, sobald man die Ausgangsmasse derselben Karte entnommen hat.

Es sollen nun die Methoden erwähnt werden, die zur **Ermittelung der Ballonörter** Verwendung finden können.

a) Sind zwei Ebenen wie E' und E_0 projektiv aufeinander bezogen (vergl. Fig. 3), so ist ein geometrischer Ort des Centrums O, in bezug auf welches sie perspektiv gelegt werden können, gegenüber einer der beiden Ebenen, z. B. E_0, ein Kreis, dessen Ebene normal auf E_0 steht und dessen Mittelpunkt in der Fluchtlinie dieser Ebene liegt. Seine Elemente lassen sich aus den Formeln (2) und (4) leicht berechnen. Für den Radius r gilt:

$$r = \frac{U' Q}{H' J'} \cdot F_1 G_1$$

für den Kreismittelpunkt M gilt:

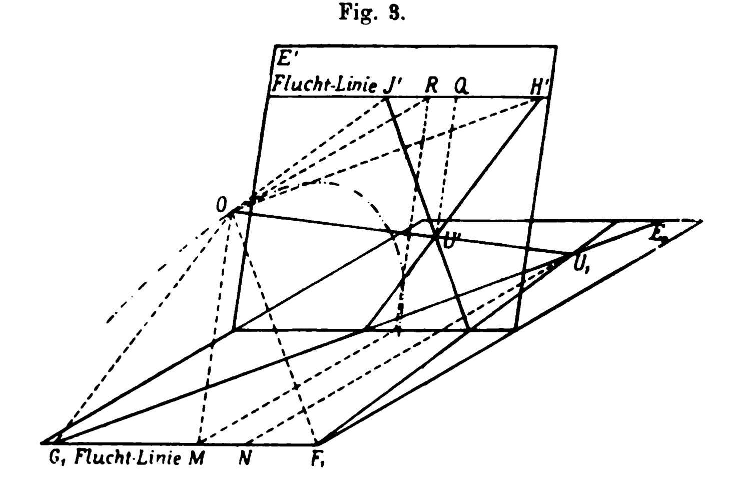
$$G_1 M = \frac{H' Q}{H' J} \cdot F_1 G_1.$$

Diese Relationen folgen aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$U_1 G_1 F_1 \backsim O H' J' \text{ und}$$
$$O \; G_1 F_1 \backsim U' H' J'.$$

Kennt man die Bildweite des photographischen Bildes E', d. h. den Normalabstand des Centrums O von der Ebene E', so ist die Lage von O auf dem Kreise bestimmt. Ein Versuch auf diesem Wege die Lage des Ballonortes zu bestimmen, scheitert zumeist an der Ungenauigkeit des Verfahrens. Es

Fig. 3.



setzt dasselbe nicht nur voraus, dass die metrischen Verhältnisse in Bild und Karte durch keine Papierkontraktion oder Vergrösserung geändert wurden, sondern wenn diese Verhältnisse auch zutreffen, ist doch der geometrische Ort (Kreis) von O so wenig bestimmt, dass ein befriedigendes Resultat nicht leicht erzielt wird. Es wird dies plausibel, wenn man bedenkt, dass die perspektive Abbildung von E' auf E_0 wegen des meist kleinen Bildfeldes annähernd zur affinen wird und bei einer solchen der gesuchte geometrische Ort in die ganze unendlich ferne Ebene ausartet.

b) Bessere Resultate erzielt man, wenn man die ganze innere Orientierung jeder der Photographieen und drei Punkte des Terrains als gegeben ansieht. Aus der inneren Orientierung ergibt sich das Dreikant der Projektionsstrahlen nach den bekannten Terrainpunkten, das man dann so in den Raum zu stellen hat, dass seine drei Kanten durch die vorgegebenen Terrainpunkte gehen. Diese Aufgabe ist zwar nicht mit Zirkel und Lineal lösbar, lässt aber rasche und praktisch ausreichende Näherungskonstruktionen zu.[1])

c) Besonders einfach wird die Konstruktion des Ballonortes, wenn der Fluchtpunkt der Vertikalen aus der Photographie entnommen werden kann. Um letzteres zu ermöglichen, lässt man eine Reihe von langen Lotleinen vom Aequator des Ballons herabhängen, welche dann bei der Aufnahme mitphotographiert werden. Der Schnittpunkt der Bilder derselben gibt den gesuchten Fluchtpunkt. In diesem Fall genügt ausser der Kenntnis der inneren Orientierung die von nur zwei Terrainpunkten.[2])

Gelingt in den Fällen b) und c) die Orientierung mit der nötigen Schärfe, so kann man versuchen, für die weitere Konstruktion ohne Kenntnis eines vierten bezw. dritten und vierten Terrainpunktes auszukommen, indem man auf dem Wege der darstellenden Geometrie aus einem oder zwei Paaren von Bildern identischer Terrainpunkte Grundriss und Höhe derselben rekonstruiert und dann nach der projektiven Methode weiter verfährt. Freilich ist das erzielte Resultat in hohem Masse von der Richtigkeit der Positionen der Terrainpunkte und der Lotrichtung abhängig.[3])

[1]) Vergl. das S. 149 citierte Referat S. 26.

[2]) Ebenda S. 29. Ueber die praktische Anwendung dieser Ballonortsbestimmung siehe des Verfassers Aufsatz in den Illustrierten äronautischen Mitteilungen 1899, S. 31, auch im Jahresbericht des Münchener Vereins für Luftschiffahrt für das Jahr 1898, S. 33.

[3]) Wiederholte Erfahrungen haben gezeigt, dass die vom Aequator des Ballons herabhängenden Lote, deren Bilder bei c) zur Verwendung kommen, doch nicht selten ziemlich weit von der Lotrichtung abweichen, namentlich dann, wenn sich der Ballon in der Nähe des Gebirges bewegt.

Die oben auseinandergesetzten Methoden wurden an der Hand eines ziemlich umfangreichen Materials an Ballonbildern des Münchener Vereins für Luftschiffahrt geprüft. Speziell für Höhenaufnahmen wurden zwei Bilder verwendet, welche bei einer Vereinsfahrt am 18. November 1899 aufgenommen wurden und die Ortschaft Waal bei Kaufbeuern aus einer relativen Höhe von ca. 900 m darstellen. Die eine von ihnen wurde von Herrn Baron v. Bassus mit einem dem Verein gehörigen Apparat mit konstanter Bildweite auf eine Platte vom Format 12 × 16 cm aufgenommen. Die Bildweite des Objektivs, ein Orthostigmat von Steinheil, beträgt 152 mm. Die zweite Aufnahme, von Herrn Privatdozent Dr. Heinke herrührend, wurde mit einer sogenannten Bruns-Kamera im Format 9 × 12 cm gemacht. Das zugehörige Objektiv ist ein Goerz'scher Doppel-Anastigmat mit 149 mm Bildweite. Die Ballonörter wurden nach der Methode b) aus 3 Terrainpunkten bestimmt. Es war zwar der Ballon bei der Abfahrt mit Lotleinen ausgerüstet, allein infolge eines Versehens hatten sich dieselben verwirrt, so dass nicht die genügende Zahl (mindestens zwei) von Lotleinen auf einer Photographie zur Abbildung kam. Die innere Orientierung der erst genannten Aufnahme wurde auf folgendem Wege bewerkstelligt. Im Inneren des Apparates befindet sich ein rechteckiger Rahmen, dessen Umrisse auf dem Negativ zur Abbildung gelangen. Infolge der Einrichtung zum Wechseln der Glasplatten ist ein absolut genaues Anliegen derselben an den Rahmen nicht zu erreichen, man kann aber, wenn die inneren Orientierungselemente (Hauptpunkt und Bildweite) für die Ebene des Rahmens vorher bestimmt waren, aus dem Vergleich der Dimensionen des Rahmenbildes und jener des wirklichen Rahmens die zur Lage der Glasplatte im Moment der Aufnahme gehörigen Orientierungselemente bestimmen. Es verhält sich nämlich unter der Voraus-

Allerdings sind dann die relativen Luftbewegungen gegenüber dem B[illegible]
so stark, dass sie bereits fühlbar werden. Es ist ein Missstand [illegible]
gegebenen Methode, dass man kein sicheres Kriterium für das n[illegible]
Herabhängen der Lotleinen besitzt.

setzung, dass die Unterschiede der beiden in Betracht kommenden Ebenen (der Rahmenebene und der Ebene der Platte) sehr klein sind, die zur Platte gehörige Bildweite zu der zum Rahmen gehörigen wie der Umfang des Rahmenbildes zum wirklichen Rahmenumfang. Der Hauptpunkt erleidet in Richtung der Rahmenseiten Verschiebungen, die sich mittels Formeln folgender Art berechnen lassen:

$$\alpha = \frac{d^2}{a\,b}(b_2 - b_1), \quad \beta = \frac{d^2}{a\,b}(a_2 - a_1),$$

wobei d die genannte Bildweite, a und b die Seiten des Rahmens bedeuten, b_2 und b_1 resp. a_1 und a_2 die Verkürzungen der beiden Rahmenseiten b resp. a, und α bezw. β die Verrückung des Hauptpunktes in Richtung der Seite a bezw. b und zwar nach der stärker verkürzten Seite hin bedeuten. Für die Dimensionen des benützten Apparats ist der Faktor $\frac{d^2}{a\,b} = 1.6$, es können also die Veränderungen des Hauptpunktes infolge der nichtparallelen Stellung der Platte zum Rahmen mit einer allerdings etwas geringeren Genauigkeit ermittelt werden, als die Messungsgenauigkeit auf dem Negativ beträgt. Die zugehörige Ballonhöhe wurde nach der genannten Methode dreimal bestimmt, wobei die Zahlen 957 m, 933 m und 945 m, im Mittel 945 + 7 m resultierten. Für die Höhe des zweiten Ballonortes ergab sich in ähnlicher Weise 898 m. Die horizontale Entfernung der beiden Ballonorte betrug 1676 m (vergl. die Tafel I). Als Projektionsebene wurde eine in der mittleren Höhe von 637 m des darzustellenden Terrains gelegene Horizontalebene gewählt. Für die weiteren Ausarbeitungen stellte ich im mathematischen Institut Vergrösserungen der erwähnten Ballonbilder her und zwar wurde die erste Aufnahme dreifach, die zweite doppelt vergrössert. Um zunächst die Genauigkeit der nach der projektiven Methode unter weniger günstigen Verhältnissen zu gewinnenden Horizontalpositionen zu prüfen, wählte ich auf dem zweiten Bild E'' vier in der beigegebenen Tafel I durch Dreiecke markierte Punkte, die ich auf dem

Katasterblatt S. W. VII. 26. im Massstabe 1 : 5000 identifizieren konnte. Ihre Höhen entnahm ich den Horizontalkurven des Positionsblattes Nr. 739 Waal. Es wurden nun 120 Punkte der Photographie in die Grundrissebene mittels der Formeln (2) übertragen. Wurden dieselben mit dem Grundriss des Ballonortes verbunden, so mussten die Verbindungslinien durch entsprechende Punkte der Katastralaufnahme hindurchgehen. Das traf auch im allgemeinen zu, doch stellte sich heraus, dass das im Jahre 1811 aufgenommene Blatt trotz der Korrekturen aus den Jahren 1841, 1849 und 1877 soviele Unterschiede an den Gebäuden, den Strassenzügen, den Wasserläufen und den Flurgrenzen, soweit letztere zu erkennen waren, aufwies, dass eine zweifellose Identifizierung, so wie sie für eine Höhenaufnahme unbedingt nötig wäre, nicht wohl möglich war. Für die bestimmten Punkte wurden zum leichteren Vergleich mit der Katastralaufnahme die Korrekturen wegen der Erhebung der betreffenden Terrainpunkte über das Ausgangsniveau unter Zugrundelegung der dem Positionsblatt entnommenen Höhen gerechnet. Nach den so ermittelten Positionen wurde ein Teil des hydrographischen Netzes rekonstruiert, welches zum Vergleich mit der Katastralaufnahme in der beiliegenden Tafel im verkleinerten Massstabe 1 : 25000 reproduziert wird. Die Verschiedenheiten gegenüber der Katastralaufnahme erklären sich zum grössten Teil durch die Veränderungen, welches das hydrographische Netz sei es durch den natürlichen Verlauf, sei es durch künstlichen Eingriff erfahren hat (Verlegung und teilweise Abschnürung der Serpentinen des Singold-Baches einerseits, dann Trockenlegung des Walker Weihers andrerseits). Die nicht ganz befriedigende Uebereinstimmung mit der Katastralaufnahme wird zum Teil auch auf der nicht vollkommen sicheren Identifizierung der Ausgangspunkte beruhen. Um für die Höhenaufnahme hievon möglichst unabhängig zu sein, orientierte ich das Koordinatensystem, das zum Umrechnen der andern Aufnahme E' diente, nicht nach Punkten der Katastralaufnahme, sondern nach auf beiden Photographieen sicher zu identifizierenden Punkten der

obengenannten Rekonstruktion. Dadurch fallen die etwa vorhandenen systematischen Fehler derselben für die Höhenbestimmung fast vollständig hinaus. Nun wurden für etwa 30 Punkte, welche auf beiden Aufnahmen identifiziert werden konnten,[1]) die Höhen gerechnet und dabei das in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellte Resultat erhalten. Da sich für jeden Punkt zwei Höhen rechnen lassen, so kann man aus der Uebereinstimmung der beiden einen mittleren Fehler einer Höhenbestimmung zu 0,92 m, denjenigen einer Höhe zu 0,65 m berechnen. Dabei stellt sich heraus, dass die vom zweiten Standpunkt aus genommenen Höhen durchschnittlich um 0,49 m grösser sind als die vom ersten Standpunkt aus aufgenommenen. Wird dieser systematische Fehler abgerechnet, so bleibt ein mittlerer zufälliger Fehler von 0,85 bezw. 0,60 m. Das Mass desselben beweist, dass die Rekonstruktion der Positionen bis auf etwa 0,2 mm bis 0,4 mm im Massstab 1 : 5000 gelungen ist. Es unterliegt keinem Zweifel, dass sich bei noch grösserer Sorgfalt eine erhebliche Steigerung der Genauigkeit erzielen liesse. Immerhin ist die bereits gewonnene Genauigkeit schon höher als die eines systematischen Nivellements mit dem Aneroid.

Für die praktische Verwertung ist der Zeitaufwand, welcher für die einzelnen Operationen nötig ist, von grosser Wichtigkeit und es mögen daher einige Angaben darüber gestattet sein. Die Konstruktion eines Ballonortes nach der Methode b) erfordert, sobald man die Dimensionen der Karte direkt entnehmen kann, ca. 30 Minuten Zeit, die Ausrechnung der Konstanten für die Formeln (2) etwa ebensoviel. Die Anwendung der Formeln (2) ist auf je 5 Minuten Zeitaufwand zu veranschlagen. Ebensoviel Zeit bedarf die Herstellung der Horizontalposition und die doppelte Höhenrechnung, sodass sich die für einen kotierten Punkt noch aufzuwendende Zeit auf 15 bis 20 Minuten beläuft. Arbeitet man mit dem Möbius'schen Netz,

[1]) Die Zahl der identifizierbaren Punkte hätte sich auf einige Hundert vermehren lassen.

Tabelle der doppeltgemessenen Höhen der Terrainpunkte.

Nr.	mm $P_1 P_0$	mm $P_1 O_{10}$	m h_1	mm $P_2 P_0$	mm $P_2 O_{20}$	m h_2	m $\Delta = h_2 - h_1$	Δ^2
2	1,7	208	7,7	2,2	224	8,1	0,4	0,16
5	1,7	312	5,2	1,9	314	5,4	0,2	0,04
6	1,2	318	3,6	1,5	251	5,4	1,8	3,24
7	− 1,2	216	− 5,3	− 2,4	350	− 6,1	− 0,8	0,64
11	− 0,4	245	− 1,5	− 0,3	195	− 1,7	− 0,2	0,04
12	0,8	210	3,6	0,6	168	3,2	− 0,4	0,16
31	0,1	195	0,5	0,3	223	1,2	0,7	0,49
32	− 0,2	197	− 1,0	0,0	215	0,0	1,0	1,00
63	0,2	282	0,7	0,2	167	1,1	0,4	0,16
64	0,0	256	0,0	0,0	188	0,0	0,0	0,00
62	0,2	265	0,7	0,0	150	0,0	− 0,7	0,49
65	0,8	275	2,7	1,2	240	4,5	1,8	3,24
66	1,1	276	3,8	1,2	249	4,3	0,5	0,25
70	− 0,5	254	− 1,9	0,0	271	0,0	1,9	3,61
71	− 0,4	234	− 1,6	− 0,5	271	− 1,7	− 0,1	0,01
71 a	− 0,2	283	− 0,7	− 0,5	274	− 1,6	− 0,9	0,81
71 b	− 1,2	280	− 4,1	− 1,8	272	− 6,0	− 1,9	3,61
72	− 0,6	222	− 2,6	− 0,3	280	− 1,0	1,6	2,56
73 a	− 0,9	226	− 3,8	− 1,0	298	− 3,0	0,8	0,64
83	1,1	214	4,9	1,0	232	3,9	− 1,0	1,00
106	− 0,8	174	− 4,3	− 1,3	312	− 3,7	0,6	0,36
108	− 0,8	222	− 3,4	− 1,7	309	− 4,9	− 1,5	2,25
109	− 0,9	199	− 4,3	− 1,9	332	− 5,1	− 0,8	0,64
111	− 0,5	192	2,5	− 0,4	312	− 1,2	1,3	1,69
113	0,8	314	2,4	1,1	212	4,6	2,2	4,84
100	1,0	328	2,9	1,1	288	3,4	0,5	0,25
107	0,8	287	2,6	1,5	293	4,6	2,0	4,00
114[1]	13,3	242	52,0	16,0	264	54,5	2,5	6,25
116	− 0,4	158	− 2,4	0,1	219	0,4	2,8	7,84
119	0,2	266	0,6	0,2	358	0,5	− 0,1	0,01
							14,6 $= \Sigma \Delta$	50,28 $= \Sigma \Delta^2$

Hiernach ist der mittlere Fehler einer Bestimmung:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{2n}} = \pm \sqrt{\frac{50,28}{60}} = \pm 0,92 \text{ Meter}$$

und der mittlere Fehler einer Höhe $M = 0,707\, m = 0,65$ Meter.

[1]) Der Punkt 114 liegt nicht auf dem Terrain selbst, sondern ist die Spitze des Kirchturms von Waal.

so ist für die Herstellung eines solchen im Massstab 1:500
wohl eine mehrstündige Arbeitszeit anzusetzen. Der für de
einzelnen Punkt benötigte Zeitaufwand reduziert sich dan
allerdings auf die Hälfte, also auf ca. 10 Minuten. Eine noc
weitergehende Abkürzung des Verfahrens liesse sich durch ein
rein mechanische Umzeichnung des Ballonbildes E' in di
Ebene E'_0 mittels eines Perspektographen ermöglichen. Da
durch, dass man nicht das Ballonbild E' selbst, sondern ein
Vergrösserung desselben zur Umzeichnung benützt, lassen sic
die zufälligen Fehler des Verfahrens jedenfalls auf ein zuläs
siges Mass reducieren. Ob ein Gleiches mit den systematische
Fehlern auch gelingt, bedarf noch genauer Untersuchung.

Conforme Abbildung der Halbebene auf ein Flächenstück, welches von einer circularen Kurve dritter Ordnung oder einer bicircularen Kurve vierter Ordnung begrenzt wird.

Von **Johann Goettler.**

(Eingelaufen 11. Mai.)

(Mit Taf. II u. III.)

Im Jahre 1894 hat Herr Professor Lindemann eine Methode angegeben,[1]) nach der das Problem der conformen Abbildung für eine Kurve

$$f(z, z_1) = 0$$

erledigt werden kann, wenn sich eine rationale Funktion von x und y mit reellen Coeffizienten derartig bestimmen lässt, dass eine passende Potenz des Quotienten (Φ eine rationale Funktion)

$$\frac{\Phi(z, z_1)}{\dfrac{\partial f}{\partial z_1}}$$

eine rationale Funktion von z wird. Dabei ist bemerkt, dass dieser Fall unter andern bei der Ellipse und Parabel (von Schwarz behandelt), bei der Hyperbel (von Lindemann behandelt), ferner bei der circularen Kurve dritter Ordnung und der bicircularen Kurve vierter Ordnung vorliegt. Die beiden letztgenannten Fälle sollen hier behandelt werden.

[1]) Sitzungsberichte der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., 7. Juni 1894.

§ 1. Circulare Kurven dritter Ordnung.

I. Die Gleichung einer circularen Kurve dritter Ordnung kann bei bekannter Bezeichnungsweise geschrieben werden:

$$\alpha z^2 z_1 + \alpha_1 z_1^2 z + \beta z z_1 + \gamma z^2 + \gamma_1 z_1^2 + \delta z + \delta_1 z_1 + \varepsilon = 0. \quad (1)$$

Setzt man hierin $\alpha = A - i \cdot A'$, $\beta = 2B$, $\gamma = C - i \cdot C'$, $\delta = D - i \cdot D'$, $\varepsilon = E$, so erhält man die Gleichung der Kurve in gewöhnlichen Coordinaten:

$$2(x^2 + y^2)(Ax + A'y) + 2x^2(B + C) + 2y^2(B - C) + 4xyC' + 2Dx + 2D'y + E = 0.$$

Jede dieser Kurven besitzt zwei konjugiert imaginäre Asymptoten:

$$2(A \pm iA')(x \pm iy) + 2C \pm iC' = 0$$

und eine reelle Asymptote:

$$(A^2 + A'^2)(Ax + A'y) + A' \cdot [A^2(B - C) + A'^2(B + C) - AA'C'] = 0.$$

Figur 1 gibt eine circulare Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt; die X Achse ist die reelle Asymptote. Figur 2 ist eine solche Kurve mit Doppelpunkt; Figur 3 ein spezieller Fall von 2. Figur 4 eine circulare Kurve mit isoliertem Punkt ($x = y = 0$). Die reelle Asymptote ist in Figur 2, 3 und 4 als punktierte Gerade gezeichnet.

II. Aus der Gleichung $f(z, z_1) = 0$ der Kurve (1) folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz = -\frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot dz_1$$

und hieraus:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right] - \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right]$$
$$= \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{dz_1}{dZ}\right)\right] - \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right],$$

wenn Z eine reelle Grösse ist.

Die Funktion:

$$\Phi(z, Z) \equiv \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right] - \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right]$$

ist also am Rande der Kurve $f = 0$ überall reell.

Aus Gleichung (1) ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = a^2 \cdot z^4 + z^3 \cdot (2\alpha\beta - 4\alpha_1\gamma) + z^2 \cdot (\beta^2 + 2\alpha\delta_1 - 4\alpha_1\delta - 4\gamma\gamma_1)$$
$$+ z \cdot (2\beta\delta_1 - 4\alpha_1\varepsilon - 4\gamma_1\delta) + (\delta_1^2 - 4\gamma_1\varepsilon). \qquad (2)$$

Setzt man $M = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2$ und $z' = \frac{dz}{dZ}$, so ist:

$$\Phi(z, Z) = \frac{d}{dZ}(\log z') - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dZ}(\log M). \qquad (3)$$

Die Pole der Funktion Φ sind erstens die Punkte $M = 0$, d. h. die Brennpunkte der Kurve $f = 0$. Ist $z = a$ ein solcher Punkt und $Z = A$ sein Bild, so ist in seiner Nähe:

$$z - a = (Z - A) \cdot \mathfrak{P}(Z - A).$$

Mithin ist Φ an dieser Stelle dargestellt durch:

$$\Phi(z, Z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Z - A} + \mathfrak{P}(Z - A). \qquad (4)$$

Liegt ferner ein isolierter Punkt im Innern des abzubildenden Flächenstückes (Fig. 4), so ist an dieser Stelle, wenn $z = b$ der fragliche Punkt und $Z = B$ sein Bild ist:

$$z - b = (Z - B) \cdot \mathfrak{P}(Z - B);$$

Φ ist also in der Nähe dieses Punktes dargestellt durch:

$$\Phi(z, Z) = \frac{-1}{Z - B} + \mathfrak{P}(Z - B). \qquad (5)$$

Es ist nämlich vermöge $M = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2$ in diesem Falle $(z - b)$ ein quadratischer Faktor von M.

Enthält der Rand des Flächenstückes einen Doppelpunkt der Kurve und ist $\gamma \cdot \pi$ der Winkel der im Doppelpunkt ge-

zogenen Tangenten, so ist in der Nähe dieses Punktes die Kurve durch die Tangenten dargestellt und somit nach dem Schwarz'schen Satz [1]) an dieser Stelle, wenn $z = c$ der Doppelpunkt und $Z = C$ sein Bild ist:

$$z - c = (Z - C)^{\gamma} \cdot \mathfrak{P}(Z - C).$$

Hieraus folgt, da $z - c$ ein quadratischer Faktor von M ist, wiederum:

$$\Phi(z, Z) = \frac{-1}{Z - C} + \mathfrak{P}(Z - C). \tag{6}$$

Liegt ferner der Punkt $z = \infty$ am Rande des Flächenstückes und ist $Z = D$ sein Bild, so hat die Entwicklung statt:

$$z = \frac{1}{Z - D} \cdot \mathfrak{P}(Z - D).$$

Es restiert hieraus:

$$\Phi(z, Z) = \mathfrak{P}(Z - D). \tag{7}$$

Dieser Punkt $z = \infty$ ist also als gewöhnlicher Punkt des Randes zu betrachten.

---

[1]) Unter dem „Schwarz'schen“ Satz verstehen wir den von H. A. Schwarz in Crelle Bd. 70, p. 109 aufgestellten Satz: „Die allgemeinste Funktion, durch welche der in der Nähe des Scheitels $z = c$ liegende Teil der Fläche eines Winkels $\gamma \cdot \pi$ $[\gamma > 0]$ in der Ebene

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad [0 < \varphi < \gamma \cdot \pi;\ 0 < r < r_0]$$

auf die Ebene $Z = R \cdot e^{i\Phi}$ $[0 < \Phi < \pi]$ conform so abgebildet wird, dass in der Nähe dieser Stelle jedem Punkt z ein stetig mit ihm fortrückender Punkt Z entspricht, während die Werte $r = \operatorname{mod} c$, $Z = C$; $\varphi = 0$, $\Phi = 0$; $\varphi = \gamma \cdot \pi$, $\Phi = \pi$ einander entsprechen, ist in der Nähe dieses Punktes dargestellt durch:

$$z - c = (Z - C)^{\gamma} \cdot \mathfrak{P}(Z - C)“.$$

Hiebei bedeutet C eine reelle Zahl, $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe mit reellen Coeffizienten. Der Satz gilt zunächst für einen geradlinig begrenzten Winkel $\gamma \cdot \pi$ und lässt sich sofort nach Schwarz (l. c. pag. 116) auf einen von Kreisbögen gebildeten Winkel erstrecken.

Die in der genannten Arbeit gemachten Schlüsse reichen aber auch hin, wenn der Winkel $\gamma \cdot \pi$ von beliebigen Kurven begrenzt wird und die Darstellung auf die Umgebung des Punktes $z = c$, $Z = C$ sich beschränkt.

Der Punkt $z = \infty$ kann auch im Innern des Flächenstückes liegen; auch in diesem Fall ist:

$$\Phi(z, Z) = \mathfrak{P}(Z - D). \tag{7a}$$

Es kann (bei Kurven vierter Ordnung) auch der Fall eintreten, dass der Grad von M,[1]) welcher im allgemeinen der vierte ist, sich um ϱ Einheiten reduciert ($\varrho = 1, 2, 3, 4$). In diesem Fall gilt für den Punkt $z = \infty$, mag er nun im Innern oder am Rande des Flächenstückes liegen, die Entwicklung

$$\Phi(z, Z) = -\frac{\varrho}{2} \cdot \frac{1}{Z - D} + \mathfrak{P}(Z - D). \tag{8}$$

Hat $M = 0$ eine σ fache Wurzel $z = b$ und liegt dieser Punkt im Innern des Flächenstückes, so ist

$$M = (Z - B)^{\sigma} \cdot \mathfrak{P}(Z - B)$$

und deshalb an dieser Stelle

$$\Phi(z, Z) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1}{Z - B} + \mathfrak{P}(Z - B). \tag{9}$$

Liegt aber der Punkt $z = b$ am Rande des Flächenstückes und ist der Winkel an jener Stelle $\beta \cdot \pi$, so ist $\Phi(z, Z)$ in der Nähe dieser Stelle dargestellt durch:

$$\Phi(z, Z) = \frac{(2 - \sigma) \cdot \beta - 2}{2} \cdot \frac{1}{Z - B} + \mathfrak{P}(Z - B). \tag{10}$$

Ist $R(Z)$ eine rationale Funktion von Z, welche für reelle Z reell ist und in bekannter Weise den Anforderungen der Gleichungen 4 bis 10 entsprechend gewählt ist, so ergibt sich die Abbildung des Flächenstückes auf die Halbebene vermittelt durch eine Gleichung von der Form:

$$\Phi(z, Z) = R(Z)$$

oder:

$$\int^{z} \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int^{Z} dZ \cdot e^{\int R(Z) \cdot dZ} + D' \tag{11}$$

D und D' sind Konstante, die Integrale als Funktionen der obern Grenzen zu betrachten. Sehr zu bemerken ist, dass beide Seiten der Gleichung (11) elliptische Integrale sind.

---

[1]) Confer Gleichung 25, pag. 176.

III. Wir betrachten die durch die Kurve (Fig. 1)

$$z^2 \cdot z_1 - z \cdot z_1^2 = 2\,a^3\,i$$

oder

$$(x^2 + y^2) \cdot y = a^3$$

zerschnittene Ebene. Die Rechnung ergibt:

$$M = z\,(z^3 - 8\,a^3\,i).$$

$M = 0$ hat also die vier Wurzeln $a_1 = 0$; $a_2 = -2\,a\,i$; $a_3 = a\,(i + \sqrt{3})$; $a_4 = a\,(i - \sqrt{3})$.

Entsprechen die Punkte $z = a_1$ und $Z = A$, $z = a_2$ und $Z = A'$ einander, so wird das unterhalb der Kurve befindliche Flächenstück auf die Halbebene abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(z^3 - 8a^3 i)}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D' \quad (12)$$

Durch dieselbe Gleichung wird das oberhalb der Kurve befindliche Flächenstück abgebildet, wenn $Z = A$ das Bild von $z = a_3$ und $Z = A'$ das des Punktes $z = a_4$ ist.

Um $\int \frac{dz}{\sqrt{M}}$ zu reducieren, setzt man

$$z = \frac{-2\,a\,i\,(1 - t)}{(\sqrt{3} + 1) + t\,(\sqrt{3} - 1)}$$

und findet:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z\,(z^3 - 8\,a^3\,i)}} = k \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \varkappa^2\,t^2)}},$$

wobei k eine Konstante und $\varkappa = i \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} + 3}}$ gesetzt ist.

IV. Als Beispiel einer circularen Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt betrachten wir die Kurve (Fig. 2)

$$z^2\,z_1 + z\,z_1^2 + a\,i\,(z^2 - z_1^2) - a\,z\,z_1 = 0$$

oder:

$$2\,x\,(x^2 + y^2) - 4\,a\,x\,y - a\,(x^2 + y^2) = 0.$$

Derjenige Winkel der im Doppelpunkt gezogenen Tangenten, in welchem die Schleife liegt, sei $\gamma \cdot \pi$. Man findet:

$$M = z^2 \cdot [z^2 - 2\,a\,z\,(1 + 2\,i) - 3\,a^2].$$

$M = 0$ hat ausser dem Doppelpunkt die Wurzelpunkte $a_1 = a\,i$; $a_2 = 2\,a + 3\,a\,i$.[1])

Bei der in den Gleichungen 4 bis 10 angewendeten Bezeichnungsweise findet man folgende Abbildungen:

a) Das von der Schleife eingeschlossene Flächenstück mit dem Winkel $\gamma \cdot \pi$.

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{d\,Z}{Z - C} + D' \qquad (13)$$

oder:[2])

$$3a^2 + az(2i+1) - ai\sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2 - 2a(2i+1)z - 3a^2} = D \cdot z \cdot (Z - C)^{-\gamma} \qquad (13\,a)$$

b) Das Aeussere der Schleife — Winkel $(2 - \gamma) \cdot \pi$ — die Punkte a_1 und a_2 liegen im Innern.

$$J = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z-C) \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D', \qquad (14)$$

wenn

$$J = \{3a^2 + az(2i+1) - ai\sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2 - 2az(2i+1) - 3a^2}\} \cdot z^{-1}$$

gesetzt wird.

c) Der Raum auf der rechten Seite des Kurvenzuges — Winkel $\gamma \cdot \pi$ — der Punkt a_2 liegt im Innern.

$$J = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A')(Z - A_1')}} + D' \qquad (14\,a)$$

oder:

---

[1]) In den Figuren sind die Wurzelpunkte von $M = 0$ durch numerierte Punkte dargestellt.

[2]) Die Constante D der Gleichung (13a) ist natürlich eine andere als die der Gleichung (13); dasselbe gilt auch für die folgenden Gleichungen.

$$J\cdot(Z-C)^\gamma = D\cdot\{2(C-A')(C-A_1')+(2C-A'-A_1')(Z-C) + 2\cdot\sqrt{(Z-A')(Z-A_1')}\sqrt{(C-A')(C-A_1')}\}^\gamma \quad (14\,b)$$

d) Der Raum auf der linken Seite des Kurvenzuges — zwei Winkel $(1-\gamma)\cdot\pi$ — Punkt a_1 liegt im Innern.[1])

$$J = D\cdot\int\frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \quad (15)$$

oder:

$$J = D\cdot\left[\frac{2c^2+b(Z-C)+2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}{2c'^2+b'(Z-C')+2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}\cdot\frac{Z-C'}{Z-C}\right]^{1-\gamma}, \quad (15\,a)$$

wenn

$$b = 2\,C - A - A_1, \qquad b' = 2\,C' - A - A_1,$$
$$c^2 = (C-A)(C-A_1), \quad c'^2 = (C'-A)(C'-A_1)$$

gesetzt wird.

e) Der Raum auf der linken Seite des Kurvenzuges, welcher die Schleife mit enthält — Winkel $(2-\gamma)\cdot\pi$.

$$J = D\cdot\int\frac{dZ}{(Z-C)\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \quad (16)$$

oder:

$$J\cdot(Z-C)^{2-\gamma} = D\cdot\{2c^2+b(Z-C)+2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}\}^{2-\gamma} \quad (16\,a)$$

V. Eine andere Verteilung der Wurzelpunkte von $M=0$ gibt die Kurve (Fig. 3)

$$z^2 z_1 + z z_1^2 + a(z^2 + z_1^2) = 0$$

oder
$$x(x^2+y^2) + a(x^2-y^2) = 0.$$

Der Winkel der Tangenten im Punkt $z=0$ ist $\frac{1}{2}\cdot\pi$.

Es ist hier:

$$M = z^2\cdot(z^2 - 4\,a\,z - 4\,a^2).$$

Die Wurzeln von $M=0$ sind ausser dem Doppelpunkt $z=0$ die Punkte $a_1 = 2\,a(1-\sqrt{2})$ und $a_2 = 2\,a(1+\sqrt{2})$.

$Z=A$ sei das Bild des Punktes $z=a_1$ und $Z=A'$ dasjenige von $z=a_2$.

[1]) $Z=A$ ist das Bild von $z=a_1$ und $Z=A'$ das von $z=a_2$. Dasselbe gilt bei den Gleichungen 14 und 14a.

a) Das Innere der Schleife wird abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C) \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \qquad (17)$$

Geht man durch die Transformation

$$Z = i\,\frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$

von der positiven Halbebene Z auf das Innere des Einheitskreises der ζ Ebene über und lässt die Punkte $z = 0$ und $\zeta = -i$, ferner $z = a_1$ und $\zeta = 0$ einander entsprechen, so erhält man die Abbildung:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = 2ai\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}} \qquad (17\text{a})$$

b) Das Aeussere der Schleife — Winkel $\frac{3}{2} \cdot \pi$ — der Punkt a_2 liegt im Innern des Flächenstückes.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C) \cdot \sqrt{(Z-A')(Z-A_1')}} + D' \qquad (18)$$

Ordnet man die Punkte $z = 0$, $\zeta = -i$ und $z = a_2$, $\zeta = 0$ beim Uebergang auf das Innere des Einheitskreises der ζ Ebene einander zu, so ergibt sich:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = -2ai\sqrt{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}\right]^{\frac{3}{2}} \qquad (18\text{a})$$

c) Der Raum rechts vom Kurvenzug — Winkel $\frac{1}{2} \cdot \pi$ — Punkt a_2 im Innern.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)\sqrt{(Z-A')(Z-A_1')}} + D' \qquad (19)$$

Geht man wieder auf den Einheitskreis über und ordnet die Punkte $z = 0$, $\zeta = -i$ und $z = a_2$, $\zeta = 0$ einander zu, so ist die Abbildung gegeben durch:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = -2ai\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}} \qquad (19\text{a})$$

d) Der Raum links vom Kurvenzug — zwei Winkel $\frac{1}{2} \cdot \pi$.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z - C)(Z - C')} + D'. \tag{20}$$

oder:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \sqrt{\frac{Z - C'}{Z - C}}. \tag{20a}$$

Entsprechen die Punkte $z = 0$, $\zeta = +1$ und $z = 0$, $\zeta = -1$ einander, indem $z = 0$ einmal als obere, einmal als untere Ecke des Flächenstückes betrachtet wird, so erhält man:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = D \cdot \sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}}. \tag{20b}$$

Die Constante D ist erst bestimmt, wenn ein negativ reelles z einem rein imaginären ζ zugeordnet wird.

e) Der Raum links vom Kurvenzug, welcher die Schleife mit enthält — Winkel $\frac{3}{2} \cdot \pi$ — Punkt a_1 im Innern.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)}} + D'. \tag{21}$$

Unter Zuordnung von $z = 0$, $\zeta = -i$ und $z = a_1$, $\zeta = 0$ erhält man:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = 2ai\sqrt{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}\right]^{\frac{3}{2}} \tag{21a}$$

Zu bemerken ist, dass diese spezielle soeben betrachtete Kurve durch die Transformation $t = \frac{z^2}{z + a}$ in die reelle Achse der t Ebene übergeführt wird und somit die Abbildungen V auch auf anderem bekannten Weg erhalten werden können. Im allgemeinen aber ist dies nicht der Fall.

VI. Als circulare Kurve dritter Ordnung mit isoliertem Punkt betrachten wir die Kurve (Fig. 4).

$$z^2 z_1 + z z_1^2 + ai(z^2 - z_1^2) - 4azz_1 = 0$$

oder:

$$x(x^2 + y^2) - 2axy - 2a(x^2 + y^2) = 0.$$

Es ist hier:

$$M = z^2 \cdot [z^2 - 4\,a\,z\,(2+i) + 12\,a^2].$$

Die in Betracht kommenden Brennpunkte sind nebst dem isolierten Punkt

$$a_1 = 2a(2+\sqrt{2}) + 2ai(1+\sqrt{2}) \text{ und } a_2 = 2a(2-\sqrt{2}) + 2ai(1-\sqrt{2});$$

beide Punkte liegen rechts der Kurve.

a) Ist $Z = B$ das Bild des Punktes $z = 0$, so wird das Flächenstück links vom Kurvenzug abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-B)(Z-B_1)} + D' \qquad (22)$$

oder:

$$\frac{6a - (2+i)z + \sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2 - 4az(2+i) + 12a^2}}{z} = D \cdot \frac{Z-B_1}{Z-B} \qquad (22\text{a})$$

b) Sind $Z = A$ und $Z = A'$ die Bilder der Punkte $z = a_1$ und $z = a_2$, so wird die Abbildung des Flächenstückes rechts vom Kurvenzug vermittelt durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A'_1)}} + D'. \qquad (23)$$

§ 2. Bicirculare Kurven vierter Ordnung.

I. Die Gleichung einer bicircularen Kurve vierter Ordnung ist:

$$kz^2z_1^2 + \alpha z^2 z_1 + \alpha_1 z z_1^2 + \beta z z_1 + \gamma z^2 + \gamma_1 z_1^2 + \delta z + \delta_1 z_1 + \varepsilon = 0, \quad (24)$$

oder, wenn

$$\alpha = A - iA', \ \beta = 2B, \ \gamma = C - iC', \ \delta = D - iD', \ \varepsilon = E$$

gesetzt wird:

$$k(x^2+y^2)^2 + 2(x^2+y^2)(Ax + A'y) + 2x^2(B+C) + 2y^2(B-C) + 4xyC' + 2Dx + 2D'y + E = 0.$$

Die Kurve hat vier imaginäre Asymptoten, von denen je zwei parallel sind. Ist $R = \pm i$, so sind ihre Gleichungen

$$2k(x+Ry) = -(A+A'R) \pm \sqrt{A^2 - A'^2 + 2AA'R - 2k(2C+RC')}.$$

Die Kurve kann einen Doppelpunkt besitzen. Leitet man aus der Gleichung der Kurve $f = 0$ wieder nach Lindemann

$$\frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right\} - \frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right\} = \frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{dz_1}{dZ}\right)\right\} - \frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\}$$

her, so findet man wiederum, dass die Funktion

$$\Phi(z, Z) \equiv \frac{d}{dZ}\{\log z'\} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dZ}(\log M)$$

für reelle Z am Rande von $f = 0$ reell ist, wenn $z' = \frac{dz}{dZ}$ und

$$M = z^4(\alpha^2 - 4k\gamma) + z^3(2\alpha\beta - 4k\delta - 4\alpha_1\gamma) + z^2(\beta^2 + 2\alpha\delta_1 - 4\alpha_1\delta - 4k\varepsilon - 4\gamma\gamma_1)$$
$$+ z(2\beta\delta_1 - 4\alpha_1\varepsilon - 4\gamma_1\delta) + (\delta_1^2 - 4\gamma_1\varepsilon). \tag{25}$$

Die Funktion Φ wird unendlich erstens in den Punkten $M = 0$, zweitens in dem etwa vorhandenen isolierten Punkt, welcher im Innern liegt, drittens in einem etwa vorhandenen Doppelpunkt, welcher am Rande des betrachteten Flächenstückes liegt. Im ersten Fall gilt die obige Entwicklung der Gleichung (4), im zweiten die der Gleichung (5), im dritten die der Gleichung (6). Ferner sind die Gleichungen 8, 9 und 10 zu beachten.

Ist $z = c$ ein Doppelpunkt von $f = 0$, so ist $z - c$ ein quadratischer Faktor von M.

Die Abbildung von Flächenstücken, welche von einer bicircularen Kurve vierter Ordnung begrenzt werden, wird mithin nach den obigen Erörterungen vermittelt durch eine Gleichung der Form

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int e^{\int R(Z)\, dZ} \cdot dZ + D'. \tag{26}$$

II. Wir betrachten zunächst die Kurve (Fig. 5)

$$2z^2 z_1^2 - 2a z z_1 (z + z_1) - a^3 (z + z_1) = 0$$

oder:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a x (x^2 + y^2) - a^3 x \quad = 0.$$

Man findet leicht:

$$M = 4z^4 + 8a z^3 - 4a^2 z^2 + a^4.$$

Die Gleichung $M = 0$ ist irreducibl und hat die Wurzeln

$$a_1 = -2{,}4147\,a,\ a_2 = -0{,}3916\,a,\ a_3 = (0{,}4032 + i \cdot 0{,}3191)\,a,$$
$$a_4 = (0{,}4032 - i \cdot 0{,}3191)\,a.$$

Die Punkte a_1 und a_2 liegen ausserhalb, die Punkte a_3 und a_4 innerhalb des Ovals.

Sind $Z = A$ und $Z = A'$ die Bilder der Punkte $z = a_3$ und $z = a_4$, so ist die Abbildung des Ovals auf die Halbebene vermittelt durch die Gleichung:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A')(Z-A_1)(Z-A_1')}} + D'. \quad (27)$$

Durch dieselbe Gleichung wird die Abbildung des Aeussern des Ovals geleistet, wenn $Z = A$ und $Z = A'$ die Bilder der Punkte $z = a_1$ und $z = a_2$ sind.

III. Als bicirculare Kurve vierter Ordnung mit Doppelpunkt wählen wir die Kurve (Fig. 6)

$$2\,z^2 z_1^2 - 2\,a\,z\,z_1\,(z + z_1) - a^2\,z\,z_1 + a^2\,i\,(z^2 - z_1^2) = 0$$

oder:

$$2\,(x^2 + y^2)^2 - 4\,a\,x\,(x^2 + y^2) - a^2\,(x^2 + y^2) - 4\,a^2\,x\,y = 0.$$

Es ist:

$$M = z^2 \cdot [20\,z^2 + 4\,a\,z\,(4\,i - 3) - 3\,a^2\,(1 + 2\,i)].$$

Die Wurzelpunkte von $M = 0$ sind ausser dem Doppelpunkt $a_1 = \frac{9 - 3\,i}{10} \cdot a$ und $a_2 = -\frac{i}{2} \cdot a$.

In jeder der beiden Schleifen liegt einer dieser Punkte.

a) Setzt man $\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = \log J$, so ist

$$J = \frac{3a(1+2i) - 2z(4i-3) - i \cdot \sqrt{3(1+2i)} \cdot \sqrt{20z^2 + 4az(4i-3) - 3a^2(1+2i)}}{z}. \quad (28)$$

Ist ferner derjenige Winkel der Tangenten des Doppelpunktes, in welchem die kleinere Schleife liegt, $\gamma \cdot \pi$, so wird das Innere einer Schleife abgebildet durch

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C) \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D'. \quad (29)$$

oder:

$$J \cdot (Z-C)^{\gamma} = D \cdot \{2c^2 + b(Z-C) + 2c \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}\}^{\gamma}, \quad (29a)$$

wobei $c^2 = (C-A)(C-A_1)$ und $b = 2C - A - A_1$ ist.

b) Das Aeussere einer Schleife — Winkel $(2-\gamma) \cdot \pi$ — ein Wurzelpunkt von $M = 0$ liegt im Innern des abzubildenden Flächenstückes.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C) \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \quad (30)$$

oder:

$$J \cdot (Z-C)^{2-\gamma} = D \cdot \{2c^2 + b(Z-C) + 2c \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}\}^{2-\gamma}. \quad (30a)$$

c) Das Aeussere beider Schleifen — zwei Winkel $(1-\gamma) \cdot \pi$.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')} + D' \quad (31)$$

oder:

$$J = D \cdot \left\{ \frac{Z-C}{Z-C'} \right\}^{1-\gamma}. \quad (31a)$$

IV. Als bicirculare Kurve vierter Ordnung mit isoliertem Punkt betrachten wir die Kurve (Fig. 7)

$$4 z^2 z_1^2 - 4a(z+z_1) z z_1 - 4a^2 z z_1 + a^2 i (z^2 - z_1^2) = 0$$

oder:

$$(x^2+y^2)^2 - 2ax(x^2+y^2) - a^2(x^2+y^2) - a^2 xy = 0.$$

Man findet:

$$M = z^2 \cdot [8z^2 + 4az(1+3i) + 3(1+i)a^2].$$

Die Wurzelpunkte von $M = 0$ sind

$$a_1 = \frac{-1 + i(\sqrt{14} - 3)}{4} a$$

und

$$a_2 = \frac{-1 - i(\sqrt{14} + 3)}{4} a.$$

Beide Punkte a_1 und a_2 liegen ausserhalb des Ovals.

Ist wiederum $\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = \log J$, so findet man leicht:

$$J = \frac{3a(1+i)+2z(1+3i)+\sqrt{3(1+i)}\cdot\sqrt{8z^2+4az(1+3i)+3a^2(1+i)}}{z}. \quad (32)$$

Die Abbildung des Innern des Ovals wird also geleistet durch die Gleichung:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{Z-B} + D' \quad (33)$$

oder:

$$J = D \cdot (Z - B)^{-1}. \quad (33a)$$

Das Aeussere des Ovals, welches die beiden Punkte a_1 und a_2 enthält, wird auf die Halbebene übertragen durch die Transformation:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A'_1)}} + D'. \quad (34)$$

V. Eine spezielle Gattung bicircularer Kurven vierter Ordnung sind die Cassini'schen Kurven.[1]) Die Gleichung derselben ist:

$$z^2 z_1^2 - a^2(z^2 + z_1^2) + a^4 - m^4 = 0;$$

oder

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 - m^4 = 0.$$

Für $m > a$ erhält man Figur 8, für $m < a$ Figur 9, für $m = a$ die Lemniscate von Bernoulli Figur 10.

Die Rechnung ergibt:

$$M = a^2 z^4 - z^2(2a^4 - m^4) + a^2(a^4 - m^4).$$

Die Wurzeln der Gleichung $M = 0$ sind

$$a_1 = +a; \; a_2 = -a; \; a_3 = +\sqrt{\frac{a^4-m^4}{a^2}}; \; a_4 = -\sqrt{\frac{a^4-m^4}{a^2}}.$$

[1]) Die in V und VI behandelten Kurven sind in anderer Weise bereits behandelt. Cfr. Lindemann in „Sitzungsberichte der math.-phys. Kl. der k. b. A. d. W.“ Bd. 25, pag. 283 und 234 und des Verfassers Inaug.-Diss. München 1897, pag. 63 und 66. Hier bilden sie den speziellsten Fall eines allgemeineren Ansatzes.

a) In Figur 8 ($m > a$) liegen die Punkte a_1 und a_2 innerhalb des Ovals auf der X-Achse, a_3 und a_4 ausserhalb desselben auf der Y-Achse. Das Innere des Ovals wird deshalb auf die Halbebene übertragen durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A'_1)}} + D',^{1)} \quad (35)$$

wenn $Z = A$ und $Z = A'$ die Bildpunkte von $z = a_1$ und $z = a_2$ sind.

Die Abbildung des Aeussern des Ovals erfolgt durch dieselbe Gleichung, wenn $Z = A$ und $Z = A'$ den Punkten $z = a_3$ und $z = a_4$ entsprechen.[2])

b) In Figur 9 ($m < a$) liegen die Punkte a_1 und a_3 innerhalb des linken, a_2 und a_4 innerhalb des rechten Ovals. Die Abbildung des Innern oder des Aeussern eines Ovals wird also vermittelt durch die Transformation:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A'_1)}} + D'. \quad (36)$$

---

[1]) Lindemann l. c. Gleichung (32).

[2]) Herr Professor Lindemann machte mich darauf aufmerksam, dass die Abbildung der Lemniskate für $m > a$ bereits von Schwarz in der Abhandlung von W. Wien: „Ueber die Gestalt der Meereswellen" angegeben ist. Die Abhandlung befindet sich in den Sitzungsberichten der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrg. 1895, pag. 225. Die dort pag. 229 angegebenen Abbildungen sind in unserer Bezeichnungsweise für $a = 1$:

a) für das Innere: $\frac{1}{m} \cdot \frac{i-Z}{i+Z} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + m^4 - 1}}$;

b) für das Aeussere: $m^2 \cdot \left(\frac{i-Z}{i+Z}\right)^2 = z^2 - 1$.

Hiebei ist das Innere der Lemniskate auf die positive, das Aeussere auf die negative Halbebene abgebildet. Diese Formeln stimmen wesentlich mit obiger Gleichung 35, wenn man setzt:

c) In Figur 10 ($m = a$) liegt in jeder Schleife einer der Punkte a_1 und a_2. Der Winkel der Tangenten im Doppelpunkt ist $\frac{1}{2} \cdot \pi$.

Das Innere einer Schleife wird also abgebildet durch:[1])

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C) \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \tag{37}$$

oder:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z} = D \cdot \sqrt{\frac{2c^2 + b(Z-C) + 2c \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}{Z-C}}, \tag{37a}$$

wenn $c^2 = (C - A)(C - A_1)$ und $b = 2\,C - A - A_1$ ist.

Die Abbildung des Aeussern einer Schleife ergibt:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z} = D \cdot \left[\frac{2c^2 + b(Z-C) + 2c \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}{Z-C}\right]^{\frac{1}{3}}. \tag{38}$$

Das Aeussere beider Ovale, welches zwei rechtwinklige Ecken enthält, wird abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')} + D' \tag{39}$$

oder:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z} = D \cdot \sqrt{\frac{Z-C}{Z-C'}}. \tag{39a}$$

VI. Eine weitere spezielle Gattung bicircularer Kurven vierter Ordnung sind die Pascal'schen Schneckenlinien (limaçon). Ihre Gleichung ist:

---

a) in Gleichung (35)

$$a = 1;\ D = \frac{-2i}{m^2 - 1};\ D' = 0;\ A = i \cdot \frac{m+1}{m-1};\ A' = i \cdot \frac{m-1}{m+1};$$

b) in Gleichung (35)

$$a = 1;\ D = \frac{-2i}{m^2 + 1};\ D' = 0;\ A = \frac{2m + i(1 - m^2)}{1 + m^2};$$

$$A' = \frac{-2m + i(1 - m^2)}{1 + m^2}.$$

[1]) Lindemann l. c. Gleichung (33).

$$4 z^2 z_1^2 - 4 a z z_1 (z + z_1) + 2 (a^2 - 2 m^2) z z_1 + a^2 (z^2 + z_1^2) = 0$$

oder:
$$(x^2 + y^2 - a x)^2 - m^2 (x^2 + y^2) = 0.$$

Jenachdem $a > m$ oder $a < m$ erhält man die Figuren 11 oder 12; $a = m$ gibt die Kardioide, Figur 13.

Man findet:

$$M = z^2 \cdot [2 a z + (m^2 - a^2)].$$

$M = 0$ hat ausser dem Doppelpunkt nur die Wurzel $a_1 = \frac{a^2 - m^2}{2 a}$; es tritt der Fall der Gleichung (8) ein.

a) Der Punkt $z = a_1$ liegt in Figur 11 $(a > m)$ innerhalb der kleineren Schleife. Der Winkel der Tangenten im Doppelpunkt ist bestimmt durch $\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{m}{a}$, wenn φ der Winkel der Tangente gegen die positive X-Achse ist; er sei $\gamma \cdot \pi$.

Das Innere der kleineren Schleife wird auf die Halbebene abgebildet durch die Gleichung:

$$\int \frac{d z}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{d Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)}} + D' \tag{40}$$

oder:

$$\frac{\sqrt{2az + d^2} + d}{\sqrt{2az + d^2} - d} = D \cdot \left\{ \frac{2c^2 + b(Z - C) + 2c \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)}}{Z - C} \right\}^{\gamma}, \tag{40a}$$

wenn $c^2 = (C - A)(C - A_1)$, $b = 2 C - A - A_1$, $d^2 = m^2 - a^2$ ist. Durch dieselbe Gleichung wird das Innere des grösseren Ovales auf die Halbebene übertragen, wenn man γ vertauscht mit $(2 - \gamma)$.

Das Aeussere des kleineren oder grösseren Ovales wird abgebildet durch die Gleichung:[1])

$$\int \frac{d z}{\sqrt{M}} = D' \cdot \int \frac{d Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - D)(Z - D_1)}} + D'' \tag{41}$$

[1]) Die Integrationskonstanten sind mit D' und D'' bezeichnet, um eine Verwechslung derselben mit dem Punkt $Z = D$ zu vermeiden.

oder:

$$\frac{\sqrt{2az+d^2}+d}{\sqrt{2az+d^2}-d}=D'\cdot\left\{\frac{2c^2+b(Z-C)+2c\cdot\sqrt{(Z-D)(Z-D_1)}}{Z-C}\right\}^{\delta}, \tag{41a}$$

jenachdem $\delta = 2 - \gamma$ oder $\delta = \gamma$ gesetzt wird und wenn

$c^2 = (C - D)(C - D_1)$ und $b = 2C - D - D_1$ ist.

Das von beiden Ovalen eingeschlossene Flächenstück, welches zwei Winkel $(1 - \gamma)\cdot\pi$ enthält, wird abgebildet durch die Transformation:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{M}} = D\cdot\int\frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')} + D' \tag{42}$$

oder:

$$\frac{\sqrt{2az+d^2}+d}{\sqrt{2az+d^2}-d} = D\cdot\left(\frac{Z-C}{Z-C'}\right)^{1-\gamma}. \tag{42a}$$

b) In Figur 12 liegt der Punkt a_1 ausserhalb des Ovals. Das Innere des Ovals wird auf die Halbebene übertragen durch die Abbildung:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{M}} = D\cdot\int\frac{dZ}{(Z-B)(Z-B_1)} + D' \tag{43}$$

oder:

$$\frac{\sqrt{2az+d^2}+d}{\sqrt{2az+d^2}-d} = D\cdot\frac{Z-B_1}{Z-B}; \tag{43a}$$

das Aeussere des Ovals durch die Abbildung:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{M}} = D'\cdot\int\frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-D)(Z-D_1)}} + D''. \tag{44}$$

c) In Figur 13 (Kardioide) fallen die drei endlichen Wurzeln von $M = 0$ in den Punkt $z = 0$.

Das Innere der Figur hat im Punkt $z = 0$ einen Winkel von 2π. Es tritt hier der Fall der Gleichung (10) ein.

Die Abbildung des Innern erfolgt durch die Gleichung:[1])

[1]) Goettler l. c. pag. 68 und Gleich. (126a).

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-B)^2} + D' \tag{45}$$

oder:

$$z^{-\frac{1}{2}} = D \cdot (Z-B)^{-1} + D'. \tag{45a}$$

Das Aeussere der Figur 13 wird auf die Halbebene übertragen durch die Gleichung:[1])

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D' \cdot \int \frac{dZ}{(Z-B) \cdot \sqrt{(Z-D)(Z-D_1)}} + D'' \tag{46}$$

oder:

$$z^{-\frac{1}{2}} = D' \cdot \log\left(\frac{2c^2 + b(Z-B) + 2c \cdot \sqrt{(Z-D)(Z-D_1)}}{Z-B}\right) + D'', \tag{46a}$$

wenn $c^2 = (B-D)(B-D_1)$ und $b = 2B - D - D_1$ ist.

Analog den bisherigen Erörterungen sind alle Fälle zu erledigen, in denen die Gleichung der Grenzkurve der z Ebene durch die Transformation $t = \varphi(z)$, wo $\varphi(z)$ eine rationale Funktion von z sein möge, in eine circulare Kurve dritter Ordnung oder eine bicirculare Kurve vierter Ordnung der t Ebene übergeht.[2])

Die Gleichung einer derartigen Kurve ist:

$$\begin{aligned} k \cdot \varphi^2(z) \cdot \varphi_1^2(z_1) + \alpha \cdot \varphi^2(z) \cdot \varphi_1(z_1) + \alpha_1 \cdot \varphi(z) \cdot \varphi_1^2(z_1) + \beta \cdot \varphi(z) \cdot \varphi_1(z_1) \\ + \gamma \cdot \varphi^2(z) + \gamma_1 \cdot \varphi_1^2(z_1) + \delta \cdot \varphi(z) + \delta_1 \cdot \varphi_1(z_1) + \varepsilon = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Die Funktion $\Phi(z, Z)$, welche für reelle Z längs der Grenzkurve reell bleibt, ist

---

[1]) Goettler l. c. pag. 68 und Gleich. (127).

[2]) Es ist dies analog dem Umstande, dass sich die von Herrn Lindemann für die Kurven

$$\alpha z^n z_1^n + \beta z^n + \beta_1 z_1^n + \delta = 0$$

gegebene Methode auf die Kurven

$$\alpha \varphi^n \varphi_1^n + \beta \varphi^n + \beta_1 \varphi_1^n + \delta = 0$$

ausdehnen lässt; vgl. des Verfassers citierte Arbeiten sowie die Dissertation von L. Marc: „Conforme Abbildung eines von irregulären Hyperbeln n. Ordnung begrenzten Flächenstückes auf den Einheitskreis". München 1899.

$$\Phi(z, Z) = \frac{d}{dZ}\left\{\log(\varphi'(z) \cdot z')\right\} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dZ}(\log M), \qquad (48)$$

wenn
$$\varphi'(z) = \frac{d\,\varphi(z)}{dz}, \quad z' = \frac{dz}{dZ} \quad \text{und}$$

$$M = \varphi^4(z)\cdot(a^2 - 4k\gamma) + \varphi^3(z)\cdot(2\,a\beta - 4k\delta - 4a_1\gamma) + \varphi^2(z)\cdot(\beta^2 + 2\,a\,\delta_1 - 4a_1\delta - 4k\varepsilon - 4\gamma\gamma_1) + \varphi(z)\cdot(2\beta\delta_1 - 4a_1\varepsilon - 4\gamma_1\delta) + (\delta_1^2 - 4\gamma_1\varepsilon) \text{ ist.} \qquad (49)$$

Die Abbildung des Flächenstückes wird vermittelt sein durch die Gleichung:

$$\Phi(z, Z) = R(Z),$$

wenn $R(Z)$ eine passend gewählte rationale Funktion von Z ist, welche für reelle Z reell bleibt. Die Integration ergibt:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{T}} = D \cdot \int e^{\int R(Z) \cdot dZ} \cdot dZ + D', \qquad (50)$$

wenn $\varphi(z) = t$ und $T(t) = M(z)$ gesetzt wird. Die linke Seite dieser Gleichung ist ein elliptisches, die rechte dagegen im allgemeinen ein hyperelliptisches Integral.

Bemerkung: In Figur 3 ist die Abscisse des Punktes a_2 zu verdreifachen; in Figur 4 ist Abscisse und Ordinate des Punktes a_1 zu verdoppeln.

Ueber Conchit, eine neue Modification des kohlensauren Kalkes.

Von **Agnes Kelly** aus London.

(*Eingelaufen 11. Mai.*)

Im Laufe einer Untersuchung über Kalk-Ausscheidungen im Thierreich und besonders über Molluskenschalen ergab sich das Resultat, dass dieselben nicht aus Aragonit bestehen, wie G. Rose angab, sondern aus einem optisch einaxigen, negativ doppeltbrechenden Mineral, welches sich von Kalkspath durch verschiedene Eigenschaften unterscheidet, und welches ich mit dem Namen Conchit (κόγχη, Schale) bezeichne. Ich habe weiter beobachtet, dass dieselbe Modification auch als Mineral an verschiedenen Orten zu finden war — allerdings immer nur in krystallinischen Aggregaten. Ihre Eigenschaften habe ich sowohl an diesen Krystall-Aggregaten als auch am Conchit der Schalen untersucht.

Verschiedene aus Conchit bestehende Schalen wurden sowohl qualitativ wie quantitativ analysirt. In Cardium edule, der Herzmuschel, waren ausser kohlensaurem Kalk und vielleicht Spuren von Na Cl, keine anorganischen Bestandtheile nachzuweisen. Die folgenden Bestimmungen von CO_2 und CaO wurden an derselben ausgeführt:

$$CO_2 = 42.45\ \%$$
$$CaO = 54.63\ \%$$
$$\overline{\qquad 97.08\ \%.}$$

Die übrigen 2.92 % waren organische Materie, welche sich nicht direct bestimmen liess.

In Cyrena (sp.?) habe ich nur CaO bestimmt, der daraus berechnete $CaCO_3$ war 97.2 %.

Von den entsprechenden Krystallaggregaten der anorganischen Natur, vor allem Sinterbildungen und Incrustationen, wurden keine quantitativen Analysen gemacht. Sie bestanden fast ganz aus $CaCO_3$, nur waren in den Incrustationen aus Gefässen und Wasserbädern immer Spuren von Eisen vorhanden.

Die Umstände, unter welchen Conchit aus Wasser auskrystallisirt, sind noch nicht genau untersucht. Er scheidet sich aus Brunnenwasser und aus Lösungen von doppeltkohlensaurem Kalk bei ca. 30°—100° C. aus; bei 168° C. (7,5 Atm. Druck) habe ich nur Aragonit gefunden.

Conchit (und nicht Aragonit) zusammen mit Kalkspath-Rhomboëdern wird gebildet, wenn man siedende Lösungen von $CaCl_2$ und Na_2CO_3 mischt.

Conchit löst sich sehr leicht in Säuren; da aber der Aggregatzustand ein so wichtiges Moment für die Lösungsgeschwindigkeit ist, kann man nicht sicher sagen, ob er sich wirklich leichter löst als Kalkspath. Gegenüber den Atmosphärilien ist Conchit sicher labiler als Kalkspath. Im „Coralline Crag“ kommen fast ohne Ausnahme als wohlerhaltene Fossilien nur solche vor, die nachweisbar ursprünglich aus Kalkspath bestanden, während diejenigen, deren ursprüngliche Substanz Conchit war, nur als Steinkerne erhalten blieben.

Conchit gleicht Aragonit und Ktypeït darin, dass er sich bei erhöhter Temperatur in Kalkspath umwandelt, unterscheidet sich aber von Aragonit dadurch, dass die Umwandlung bei bedeutend niedrigeren Temperaturen stattfindet. Man kann dies am leichtesten durch Parallel-Versuche nachweisen; so wandelt sich, z. B. in Dämpfen von Quecksilber, also bei 360°, oder auch in gerade geschmolzenem Blei, d. h. bei 325°, Conchit um, während Aragonit, ebenso behandelt,

keine Umlagerung erfährt. Aragonit-Krystalle zerfallen zwischen 373° und 380°, aber erst nach einer Erhitzung auf 405° ist es mir sicher gelungen, ein einaxiges Axenbild zu sehen und dadurch die Umwandlung in Kalkspath zu constatiren. Conchit fängt schon zwischen 300° und 310° an sich in Kalkspath umzuwandeln, wie man aus dem Auftreten der für Kalkspath characteristischen Spaltbarkeit und Zwillingslamellirung sicher nachweisen kann. Während der Umwandlung wird die Orientirung der Hauptaxe im Allgemeinen nicht verändert.

Da nur feinfaserige Aggregate zur Verfügung standen, ist es möglich, dass das specifische Gewicht wegen der Porosität etwas zu niedrig bestimmt ist. Der höchste Werth, welchen eine directe Messung ergeben hat, war = 2.865 für eine Incrustation aus einem Kessel. Krystallaggregate aus Karlsbad und andere Incrustationen aus Kesseln, Wasserbädern und Gefässen ergaben zwischen 2.830 und 2.845. Von Cyrena wurde durch Bestimmung des specifischen Gewichtes, des Kalkgehaltes und des specifischen Gewichtes der organischen Materie der Werth zu 2.874 berechnet.

Die Härte ist bedeutend grösser als die von Kalkspath, Spaltbarkeit ist nicht nachzuweisen.

Conchit ist einaxig negativ wie Kalkspath oder wenigstens nahezu einaxig. In Conchitschalen, die aus parallelen Lamellen bestehen, sieht man zuweilen ein zweiaxiges Axenbild mit einem sehr kleinen Winkel der optischen Axen, wie man es sehr häufig auch sonst bei einaxigen Substanzen beobachtet.

Die Brechungsindices wurden für Natriumlicht bestimmt:

a) Nach der Total-Reflexions-Methode von Wollaston (mittelst eines Prismas auf einem Spectrometer). Da nur Krystall-Aggregate mit mehr oder weniger parallelen Krystallaxen und keine einheitlichen Krystalle zur Verfügung standen, war es unmöglich, völlig scharfe Grenzen zu sehen. Die mittleren Werthe von mehreren Beobachtungen an einem

polirten Schliff von Strombus gigas gaben $\varepsilon = 1.527$, $\omega = 1.661$.

b) Mikroskopisch, durch Vergleich mit Lösungen, deren Brechungsindices bestimmt werden konnten. Hier war die Fehlergrenze ziemlich gross, ± 1 bis ± 2 Einheiten der dritten Decimale. Die mittleren Werte waren $\varepsilon = 1.524$ und $\omega = 1.661$[1]).

---

[1]) In letzter Zeit stellte Hr. Dr. Melczer, welcher bereits eine grössere Reihe von Untersuchungen mit dem Abbe-Pulfrich'schen Totalrefractometer ausgeführt hat, auf meine Bitte noch einige Messungen an und theilte mir darüber Folgendes mit: „Zur Bestimmung der Hauptbrechungsexponenten wurden fünf polirte Flächen untersucht, von welchen 1 und 2 ein und derselben Strombus-Platte, die 3. einer Trochus-Platte, die 4. einer Anodonta- und die 5. einer Cyrena-Platte angehörten. Von diesen gab nur die erste Fläche, welche nahezu parallel der Schichtung ging, bei Anwendung des verkleinernden Fernrohres einigermassen gute, bis auf ± 2 Minuten einstellbare Grenzen. Durch Ablesungen von 30 zu 30 Grad, Construiren der Grenzcurven und weitere Ablesungen von 10 zu 10 Grad in der Nähe der Maxima und Minima wurden die den Hauptbrechungsindices entsprechenden Grenzwinkel festgestellt und darnach, um die von Herrn C. Viola vorgeschlagene Differenz-Methode anzuwenden (s. Ztschr. f. Kryst. 1898, **30**, 439, und **1900**, **32**, 313), die Grenzwinkel zweier Zeiss'scher Glasprismen gemessen.

Der Verlauf der Grenzcurven war regelmässig und entsprach entschieden einer zweiaxigen Platte und zwar einem in der Nähe der mittleren Hauptschwingungsrichtung gelegenen Schnitte. Die Grenzwinkel an zwei, nahe aneinander liegenden Stellen der Fläche, sodann die Grenzwinkel, brechenden Winkel und min. Ablenkungen der Prismen sind für Na-Licht:

1. Bestimmung	2. Bestimmung	Prisma Nr. 604	Prisma Nr. 2667
→ 61° 31′ 20″	61° 32′ 30″	62° 11′ 0″	54° 31′ 45″
61 18 30	61 19 30	49 59 35 (= α)	49 56 20 (= α)
↑ 53 52 40	53 51 0	79 52 30 (= 2δ)	62 17 35 (= 2δ)
53 44 15	53 38 15		

Da der Conchit als optisch negativ bestimmt ist, muss β näher an γ liegen und somit berechnen sich aus der 2. Bestimmung, welche zuverlässiger ist, die Hauptbrechungsindices:

$$\gamma_{Na} = 1.662$$
$$\beta_{Na} = 1.659$$
$$\alpha_{Na} = 1.523$$

Die Doppelbrechung des Conchits ist also bedeutend niedriger als diejenige des Kalkspaths, etwa 0.134—0.137. Dies kann man auch schon erkennen, wenn man gleich dicke Schliffe von Conchit und Kalkspath im polarisirten Licht vergleicht.

Conchit bildet theils Nädelchen und Prismen, theils basische Plättchen, theils endlich rhomboëder-ähnliche Individuen, deren Flächen ungefähr 45° zur optischen Axe geneigt sind.

Fast alle Molluskenschalen bestehen vollständig aus Conchit. Nur Ostrea, Pecten, Anomia und die äussersten Schichten von Pinna und Mytilus unter den Lamellibranchiaten, sowie Patella und Janthine unter den Gastropoden, bestehen aus Kalkspath. Die meisten Coelenteraten haben gleichfalls Conchit-Skelette, nur viele Alcyonarien bestehen aus Kalkspath, während dagegen alle Hydrocorallinae und Madreporaria, die ich untersuchte, Conchit abscheiden.

In der anorganischen Natur wurde Conchit in den folgenden Vorkommnissen gefunden: In einem sehr grobkörnigen Erbsenstein von Karlsbad an Stelle des Ktypeïts, wie in verschiedenen andern Sprudelsteinen von demselben Orte, sodann in einer blauen Incrustation von Schwaz in Tirol, in blauen und braunen Incrustationen von Schemnitz, in

---

von welchen γ und β bis auf 1/2 Einheit und α bis auf 1 Einheit der letzten Decimale für richtig betrachtet werden kann.

Zur Controle für β konnte die 2. Fläche an derselben Platte dienen, welche ungefähr senkrecht zur Schichtung ging. Die Grenzcurven waren an dieser Fläche zwar ziemlich undeutlich, doch zur Feststellung von β und β_1 genügten sie. Durch Construiren der Grenzcurven ergaben sich nämlich für diese die Grenzwinkel 61° 15′ und 60° 50′.

Aus obigen Brechungsexponenten folgt:

$$2\,V_{a\,Na}\ 15^0\ 50'$$

$$2\,E_{a\,Na}\ 26^0\ 25'.$$

Dass sich der Conchit u. d. Mikroskope im Allgemeinen als optisch einaxig verhält, lässt sich vielleicht durch die nur theilweise orientirte Aufeinanderlagerung der Schichten in den Schalen erklären."

einer braunen Incrustation von Alt-Sohl in Ungarn und in Sinter des Yellowstone Parks. Endlich erwiesen sich verschiedene Exemplare von Eisenblüte als Conchit. Als gewöhnliche Neubildung tritt das Mineral auch im Kesselstein auf, zuweilen gemischt mit Kalkspath.

Der Conchit ist somit eine neue Modification von kohlensaurem Kalk, welche in ihrem Verhalten eine sehr geringe Stabilität aufweist und selbst labiler ist als Aragonit, wesshalb seine Vorkommnisse in der anorganischen Natur so selten sind, da er theils einer Lösung, theils einer Umwandlung in Kalkspath unterlag. Die Labilität des Conchits ist weiter erwiesen durch Klement's[1]) Versuche über die künstliche Darstellung von Dolomit. Fein gepulverter kohlensaurer Kalk wurde mit krystallisirter schwefelsaurer Magnesia und einer gesättigten Kochsalzlösung in einem leicht verschlossenen Kölbchen eine bestimmte Zeit lang auf constanter Temperatur erhalten. Hierauf wurde abfiltrirt, ausgewaschen, und der Procentsatz von $MgCO_3$ bestimmt. Kalkspath 10 Stunden bei 100° erwärmt, gab nur Spuren von $MgCO_3$, Aragonit 48 Stunden bei 91° gab 34.6 % und 68 Stunden bei 90° 38 % $MgCO_3$. Korallen aus einer Gruppe, die, wie es scheint, nur Conchit-Skelette hat, lieferten dagegen: Madrepora prolifera in 46 Stunden bei 90° 38.5 % $MgCO_3$, Madrepora humilis 41.4 % und Stylopora (sp.?) 41.9 % $MgCO_3$, woraus Klement den Schluss ableitet, dass die Korallen aus Aragonit bestehen, da ihm eben diese noch labilere Modification des kohlensauren Kalkes unbekannt war; die bedeutende Erhöhung aber, welche die Werthe der Magnesiaaufnahme bei den Korallen erfuhren, weist schon, abgesehen von der directen Beobachtung, auf das Vorhandensein einer noch labileren Modification hin, und dies ist eben der Conchit. Da alle riffbildenden Korallen Conchit-Skelette haben, so ist diese grosse Labilität und die leichte Möglichkeit einer Umwandlung in Dolomit für die Theorie der Entstehung des Dolomits von hoher Wichtigkeit.

---

[1]) Tscherm: Min. Petr. Mitth. 1894, 14. Auszug in Zeitsch. f. Kryst. 27, 330.

Amorphes Calciumcarbonat.

F. Link hat zuerst nachgewiesen, dass kohlensaurer Kalk bei seiner Fällung zunächst in kleinen Kügelchen sich ausscheidet, welche nicht auf das polarisirte Licht einwirken und die erst später krystallinisch werden. Ich fand nun im Verlaufe dieser Untersuchungen, dass das Calciumcarbonat in den beiden hinteren Kalkdrüsen des Regenwurms aus kleinen Kügelchen besteht, die gleichfalls einen solchen amorphen Zustand darstellen. Mit Wasser benetzt werden die Kügelchen rasch krystallinisch, wenn sie nicht bei 100° getrocknet sind und die letzten Spuren von Wasser durch Behandlung mit absolutem Alkohol entfernt worden sind; dann bleiben aber die Kügelchen auf die Dauer amorph.

Eine Erniedrigung der Temperatur hat keine Wirkung auf die Kügelchen; durch eine Behandlung bei der Temperatur der siedenden Luft während mehrerer Stunden war keine Veränderung hervorgerufen worden; aber eine Temperaturerhöhung auf 160°—170° genügt, um sie krystallinisch werden zu lassen.

Eine genaue Bestimmung des specifischen Gewichtes war nicht möglich, aber durch Bestimmungen des specifischen Gewichtes der getrockneten Kalkdrüsen und der organischen Materie in den Kalkdrüsen und aus dem Kalkgehalt der Drüsen selbst liess sich herausrechnen, dass das specifische Gewicht ungefähr 2,1 sein dürfte. Aehnliche Bestimmungen über den Panzer von Astacus oder Julus gaben Werthe von 2,2, aber diese sind noch ungenauer, da nicht nur $CaCO_3$, sondern auch ungefähr 6 Procent $Ca_3(PO_4)_2$ vorhanden ist.

Der Brechungsindex wurde durch mikroskopische Methoden gemessen und zu 1·538 bestimmt. Selbst mit der stärksten Vergrösserung und den empfindlichsten Methoden war gar keine Einwirkung auf das polarisirte Licht zu erkennen.

Solcher amorpher Kalk kommt sehr oft im Thierreich vor, z. B. im Schneckenschleim und (nicht als Kügelchen) in dem Panzer von Astacus, Squilla und Julus und in der Eierschale einer Natter. Durch Behandeln mit Wasser oder durch Erwärmen wird er immer krystallinisch, und dadurch wird wohl auch zu erklären sein, dass er im Mineralreich nicht beobachtet wurde.

Sitzung vom 13. Juni 1900.

1. Herr Hugo Seeliger legt eine Abhandlung des Herrn Professor Max Wolf in Heidelberg: „Ueber die Bestimmung der Lage des Zodiakallichtes und den Gegenschein“ vor.

2. Herr Alfred Pringsheim spricht „Ueber den sogenannten zweiten Mittelwerthsatz für endliche Summen und bestimmte Integrale“.

3. Herr Alfred Pringsheim legt ferner eine Abhandlung des Privatdozenten an der Universität Dr. Arthur Korn: „Ueber den sogenannten semidefinitiven Fall in der Theorie der Maxima und Minima“ vor.

4. Herr Adolf v. Baeyer hält einen Vortrag: „Ueber Aut-Oxydation“. Derselbe wird anderweit veröffentlicht werden.

Ueber die Bestimmung der Lage des Zodiakallichtes und den Gegenschein.

Von **Max Wolf.**

(*Eingelaufen 13. Juni.*)

(Mit Taf. IV.)

Während in dem früheren Observatorium in der Stadt Heidelberg das Zodiakallicht eigentlich niemals mit Sicherheit gesehen werden konnte, erscheint es von der Höhe des neuen Observatoriums auf dem Königstuhl fast stets recht hell und es konnte oft in so grosser Intensität gesehen werden, dass es heller als die Milchstrasse erschien. Seit dem Bestehen des neuen Observatoriums haben wir deshalb häufig Aufzeichnungen des Zodiakallichtes sowohl abends als morgens vorgenommen.

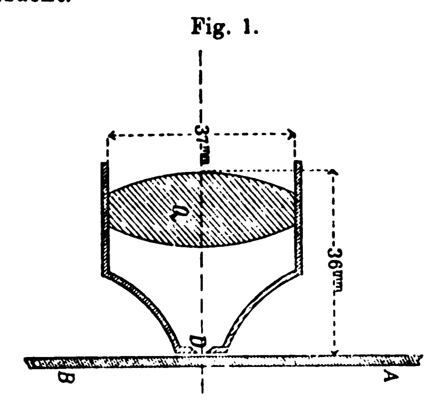
Aber diese Aufzeichnungen litten sehr unter der Unschärfe und der Langsamkeit der Intensitätszunahme des Lichtes von den Rändern gegen innen, so dass es, wie jeder, der das Zodiakallicht beobachtet hat, aus Erfahrung weiss, sehr schwer war, die Lage der Axe des Lichtkegels auch nur ganz roh zu bestimmen. Dazu kommt noch, dass man sich so leicht durch die Sterne der Umgebung irrleiten lässt. Abgesehen von ihrem störenden Eindruck auf das Auge ist man immer versucht, so sehr man sich auch dagegen bemüht, bei dem Anschluss der Konturen des Lichtes an die Sterne, diejenigen zu bevorzugen, die man in der betreffenden Gegend besser kennt.

Es regte sich deshalb in mir der Wunsch, das Zodiakallicht zu photographiren und aus dem Bild die Axenlage zu bestimmen. Verschiedene Versuche lehrten mich aber, dass

dieser Weg nicht viel mehr geben wird, als der optische. Die dazu nötigen lichtstarken Objective zeichnen nämlich stets bei dem grossen hierfür in Betracht kommenden Feld die Mittelpartien der Platte viel heller als die Randpartien, sodass man überhaupt nicht sicher weiss, ob man das Zodiakallicht photographirt hat, und wenn, so wird das Bild dadurch so entstellt, dass es schwer zu entscheiden ist, ob die grösste Intensität der Wirkung der Linse oder jener des Zodiakallichtes zuzuschreiben ist.

Ich habe deshalb diesen Weg nicht weiter verfolgt, sondern habe vielmehr auf andere Weise der Erscheinung näher zu treten versucht.

Fig. 1.



Im Beginne des Jahres 1899 liess ich mir von der Firma C. Zeiss in Jena ein Objectiv aus Quarz bauen, bei dem nur der allerzentralste Teil des Bildes in der optischen Axe brauchbar, in welchem also jede Strahlenvereinigung ausserhalb der Axe vernachlässigt wurde. Dagegen wurde möglichst grosse Lichtstärke (Flächenhelligkeit) erstrebt. In der That gelang es dort Dr. Harding, einen Quarzcondensor aus 3 Linsen zusammenzusetzen, der das eminente Oeffnungsverhältniss: Durchmesser zur Brennweite = 3 : 2 besitzt. Die Oeffnung ist etwa 37 mm, die Distanz des Bildes von der vordersten Fläche ist etwa 36 mm.

Die Disposition des damit gebauten Apparates ist aus der Figur 1 ersichtlich. Bei Q befindet sich das dreilinsige Quarz-

System. In seiner optischen Axe unmittelbar vor der Bildebene ist ein solid mit dem Objectiv verbundenes Diaphragma mit enger Oeffnung befestigt (*D*). Fast in Berührung mit und unmittelbar hinter dem Diaphragma liegt die photographische Platte (*A—B*). Dieselbe ist so gelagert, dass sie ihrer Länge nach in ihrer Ebene hinter dem Diaphragma vorbeigeschoben werden kann. Durch diese Verschiebung der Platte kann dann eine Reihe von Bildchen nebeneinander auf der Platte erzeugt werden und, wenn man durch Objectiv und Diaphragma Licht auf die Platte fallen lässt, so ist jedes so entstehende Bildchen genau in derselben Axe aufgenommen.

Auf diese Weise konnte ich erreichen, dass immer ein genau bestimmbarer Punkt des Himmels auf der Platte abgebildet und dabei doch jede Abblendung, also jeder Lichtverlust der Linse vermieden wird.

Dieses System wurde auf der Horizontalaxe eines Theodoliten so montirt, wie es der Lichtdruck auf der beigegebenen Tafel zeigt. Das Objectiv — der Quarz-Zeiss — ist fest verbunden mit der Horizontalaxe und steht mit seiner optischen Axe parallel mit der optischen Axe des Fernrohres des Theodoliten. Dadurch kann ich erreichen, den Quarz-Zeiss auf einen beliebigen Punkt des Himmels zu richten und dann durch sein Diaphragma von eben diesem beliebigen Punkt ein Bildchen auf der Platte zu erzeugen.

Die Platte sitzt in der hinter dem Objectiv sichtbaren Cassette und wird mit dieser durch die lange Schraube hinter dem Objectiv und seinem Diaphragma vorübergeschoben. Es ist wichtig die Bilder in gleichen Abständen auf der Platte zu erzeugen, weil dadurch die Arbeit des Einschätzens wesentlich erleichtert wird.

Der Apparat wurde von Mechaniker Schwall und mir in der Institutswerkstätte im Sommer 1899 gebaut.

Nach dem Verständnis der Anordnung des Apparates ist nun leicht ersichtlich, was erstrebt wurde. Es wird das Bild einer kleinen Stelle des Zodiakallichtes auf der Platte mit dem Quarz-Zeiss aufgenommen. Dann wird die Platte mit

der langen Schraube ein Stück weiter geschoben, der Apparat nach einer andern Stelle des Zodiakallichts gerichtet und abermals eine Aufnahme gemacht. An den Kreisen des Theodoliten wird die jeweilige Einstellung abgelesen und dadurch bekannt, welcher Punkt am Himmel photographirt ist. Fährt man so fort, so erhält man eine Serie von Ausschnitten aus dem Zodiakallicht — von bekannter Lage — schön nebeneinander auf der Platte abgebildet. Sind die Aufnahmezeiten genau gleichlang, so sind die Intensitäten der Bilder vergleichbar und man kann z. B. das intensivste Bild heraussuchen. Also jener Punkt des Zodiakallichtes, der am hellsten, oder diejenigen, welche unter sich gleich hell geleuchtet haben, lassen sich so bestimmen.

Um die Belichtungsdauer für alle Bilder gleich zu machen, wurde, wie auf der Tafel ersichtlich, vor dem Objectiv ein guter Momentverschluss (System Linhof) befestigt. Es wurde auf den Pendelschlag einer Uhr der Verschluss geöffnet und ebenso auf einen andern Secundenschlag wieder geschlossen. Bei der ausgezeichneten Beschaffenheit des Verschlusses kommen Unterschiede von einer Zehntelsecunde kaum vor, eine Genauigkeit, die für die Methode völlig genügt.

Der Theodolit wurde bei den im Folgenden beschriebenen Versuchen stets horizontal aufgestellt, sodass also Höhe und Azimut abgelesen wurde. Das bedingte jedesmal eine Umrechnung in Rectascension und Declination. Aus diesem Grunde stelle ich auch den Theodoliten jetzt parallaktisch auf.

Auf die beschriebene Art lässt sich an einem Abend bequem eine Anzahl verschiedener Schnitte durch das Zodiakallicht ziehen. Durch die Verbindung der hellsten Stellen in den verschiedenen Querschnitten kann man dann die Axe grösster Helligkeit in dem kegelförmigen Lichtschein festlegen.

Andererseits kann man die Punkte gleicher Intensität aufsuchen und durch mehrere Schnitte die Linien gleicher Helligkeit im Zodiakallicht bestimmen.

Das abnorm schlechte Wetter dieses Winters verhinderte mich leider, viel mit dem Apparat, den ich das „Schnitt-

Photometer" nennen möchte, zu arbeiten; nur wenige Versuche konnten gemacht werden, und von diesen will ich im Folgenden berichten.

Wie vorausberechnet, war das Schnitt-Photometer völlig lichtstark genug. So erhielt ich Anfang Februar 1900 schon mit 6 Secunden Belichtung einen deutlichen Eindruck vom Zodiakallicht.

Um aber so kräftige Eindrücke zu erzielen, dass ihre Intensitäten leicht verglichen werden konnten, musste länger exponirt werden.

Bei den im Folgenden besprochenen Aufnahmen wurde stets 40ˢ0 belichtet. Als das Zodiakallicht im März schwächer wurde, genügten aber 60ˢ kaum mehr, um brauchbare Schwärzungen zu geben.

Was die Sicherheit des Auffindens der grössten Schwärzung einer Serie betrifft, so ist dieselbe so gross, dass nie ein Zweifel vorkam. Ich bat Herrn Schwassmann, unabhängig von mir die dunkelsten Bildchen herauszusuchen, und er fand bei den unten besprochenen Querschnitten, genau die gleichen heraus, wie ich selbst. Sterne, die in den Bildfleck hineinkamen, störten nicht; denn ihre Spuren waren zu kurz und fein. Wir waren beide sehr überrascht über die nicht erwartete Sicherheit in der Bestimmung des hellsten Bildpunktes.

Ich habe sechs geeignete Querschnitte genauer untersucht. Die Azimute und Höhen wurden so controlirt, dass ein bekannter Stern im Fernrohr des Theodoliten eingestellt und damit der Meridian am Kreis festgelegt und der Indexfehler gefunden wurde. Die Abweichung von Visirlinie und optischer Axe des Schnitt-Photometers wurde durch Einstellung auf ein und dasselbe entfernte terrestrische Objekt abgeleitet. Aus den abgelesenen Azimuten und Höhen und der notirten Zeit der Aufnahmen wurden die Rectascensionen und Declinationen bestimmt. Die Berechnung geschah nur für die wichtigen Maximalwerte streng, während die andern Punkte der Schnitte aus Herrn Schwassmanns Curventafel graphisch abgeleitet wurden.

Es fanden sich die folgenden Punkte auf den Platten abgebildet:

1900 Februar 21:

		α (h m)	δ
Schnitt A: Punkt	1	0 1.8	+22.0°
	2	8.2	20.9
	3	15.5	19.6
	4	31.9	17.2
	5	40.1	16.1
	6	48.2	14.7
	7	0 55.2	12.6
	8	1 1.5	12.1
	9	15.0	10.0
	10	27.4	6.9
	11	44.3	4.5

Dieser Schnitt der nahezu parallel mit dem Horizont durch den Lichtkegel des Zodiakallichtes gelegt ist, — die weiter aussenliegenden Punkte sind hier weggelassen, — ist auf der Abbildung 2 mit *A* bezeichnet.

Durch Vergleich der gegenseitigen Helligkeiten der Bildpunkte ergab sich sofort der Punkt

$$\alpha = 0^h\ 48.2^m \qquad \delta = 14^0\ 39'$$

als der hellste Punkt des Schnittes durch das Zodiakallicht.

1900 Februar 21:

		α (h m)	δ
Schnitt B: Punkt	1	1 11.1	+ 14.4°
	2	7.4	15.6
	3	3.1	16.9
	4	0 59.0	18.1
	5	52.6	19.6

Der hellste Zodiakallichtpunkt auf diesem Schnitt lag in

$$\alpha = 1^h\ 9.7^m \qquad \delta = +\ 14^0\ 51'.$$

1900 Februar 21:

		α h m	δ
Schnitt C: Punkt	1	0 58.0	+20.1°
	2	1 7.5	18.8
	3	16.0	17.4
	4	25.1	15.6
	5	34.7	14.0
	6	43.6	12.3
	7	53.5	10.3

Maximum in

$\alpha = 1^h\ 25.1^m \qquad \delta = +\ 15^0\ 36'.$

1900 Februar 27:

		α h m	δ
Schnitt D: Punkt	1	1 55.1	+ 7.4°
	2	45.7	10.3
	3	29.2	13.5
	4	17.3	16.2

Maximum in

$\alpha = 1^h\ 27.7^m \qquad \delta = +\ 14^0\ 5'.$

1900 Februar 27:

		α h m	δ
Schnitt E: Punkt	1	1 19.2	+ 16.2°
	2	34.6	13.5
	3	54.4	10.3
	4	2 8.6	7.4

Maximum in

$\alpha = 1^h\ 30.2^m \qquad \delta = +\ 14^0\ 24'.$

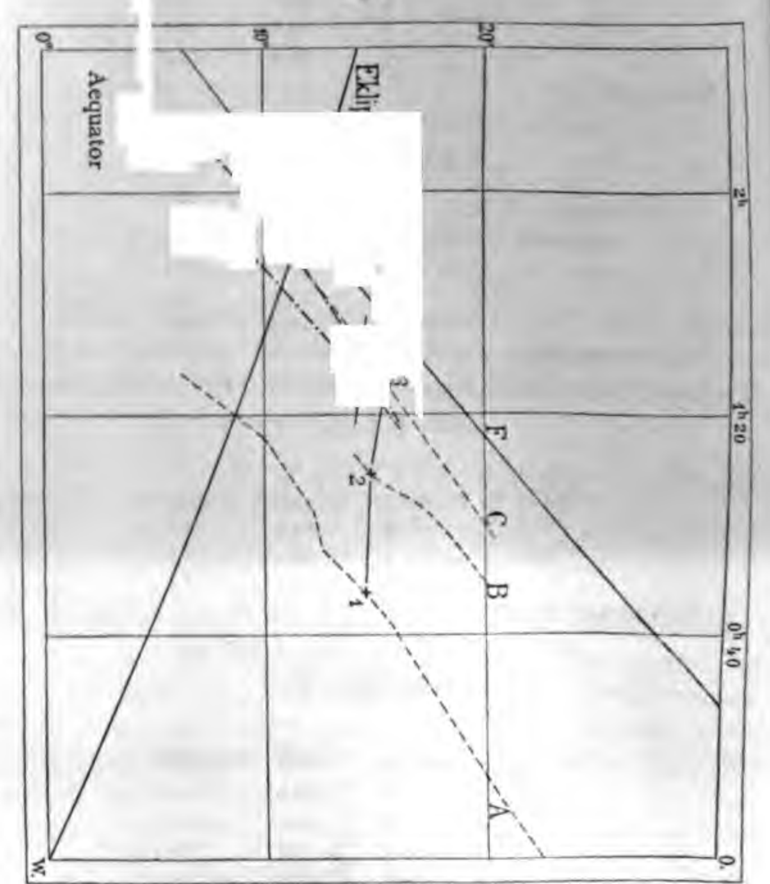
1900 März 1:

		α h m	δ
Schnitt F: Punkt	1	0 14.9	+32.5°
	2	1 23.5	18.3
	3	1 46.8	13.5
	4	2 0.3	10.9
	5	2 30.2	+ 5.4
	6	4 32.7	− 12.4

Bei diesem Schnitt war das Zodiakallicht abnorm schwach. Ueberhaupt machte es den Eindruck, als ob das Licht successive und rapid an Intensität von Anfang Februar auf An-

fang März [illegible]genommen hätte. Deshalb sind hier die Bildpunkte sehr schwach und bereits schwer zu schätzen. Jedenfalls wür[illegible] as Maximum ebenfalls nördlich von der Ekliptik, vielleicht [illegible] der Gegend des Sternes 105 Piscium anzunehmen s[illegible]

Fig. 2.



Auf Figur 2 sind die 6 Schnitte mit den Buchstaben *A*—*F* bezeichnet. Die Punkte maximaler Intensität sind durch kleine Kreuze angedeutet. Das Maximum von Schnitt *A* ist

mit 1, das von F mit 6 bezeichnet. Durch 1, 2, 3 ist die Linie der Maximalintensität für den 21. Februar gezogen, durch 4 und 5 die Linie grösster Intensität am 27. Februar.

Bei der Betrachtung der Lage der einzelnen Maxima springt nun sofort in die Augen, dass die hellste Stelle des Lichtes keineswegs, wie erwartet, auf der Ekliptik, sondern nördlich davon lag. Der Abstand der Linie grösster Intensität von der Ekliptik beträgt etwa 6° in der betrachteten Gegend.

Dass diese Erscheinung nicht durch die Absorption der Erdatmosphäre bedingt sein kann, folgt aus der steilen Lage des Zodiakallichts und der Betrachtung der fast parallel zum Horizont durchgelegten Schnitte.

Soviel ist also sicher, die Hauptmasse der Zodiakallichtmaterie hat in diesem Februar von uns aus gesehen nicht in der Ekliptik, sondern darüber gelegen, und zwar in einem beträchtlichen Abstand davon.

Nehmen wir einmal an, dass sich die Hauptmasse der Zodiakalmaterie um die Ebene des Sonnenäquators lagert. Da der Sonnenäquator seinen aufsteigenden Knoten in ca. 74° Länge liegen hat, so stehen wir zur Zeit des 6. December in der Ebene des Sonnenäquators, während zur Zeit des 6. März die nördliche Hälfte des Sonnenäquators uns zugekehrt ist.

Wir müssen also zur Zeit des 6. December das Zodiakallicht längs eines grössten Kreises sehen, der um die Neigung des Sonnenäquators also um ca. 7° gegen die Ekliptik aufsteigend geneigt erscheint. Die Teile des Zodiakallichtes, die wir wegen des Horizontes sehen können, sind dann relativ weit von uns entfernt, also schwach. Wir müssen daher das Zodiakallicht um diese Zeit relativ kurz sehen, und die Linie grösster Intensität des Zodiakallichtes muss unter einem Winkel von ca. 7° gegen die Ekliptik aufsteigend[1]) geneigt sein.

Ganz anders zur Zeit des 6. März. Wir sehen dann von Süden auf die Fläche der Zodiakallicht-Linse, und die gleich-

---

[1]) Oeffnung des Winkels nach Osten.

beleuchteten Teilchen stehen für uns dann viel günstiger. Es wird zwar wieder nach Sonnenuntergang durch den Horizont viel verdeckt, aber es sind uns viel näherliegende also hellere Teilchen sichtbar, als am 6. December. Die Linie grösster Intensität muss dann mehr parallel mit der Ekliptik verlaufen, und der uns am besten sichtbare Teil muss wegen der Lage des Horizontes zur Zeit der Beobachtung in absteigendem Sinne gegen die Ekliptik geneigt sein.

So müssen sich die Erscheinungen wohl darbieten, wenn die Zodiakalscheibe um den Sonnenäquator gelagert ist.

Betrachten wir nun die erlangten Resultate. Die Maximalintensität in einem Schnitt ist sehr sicher zu finden. Kleine Fehler können nur daher kommen, dass die Intervalle zu gross genommen werden, und solche stecken auch noch sicher in diesen ersten Versuchen.

Am sichersten sind die Maximalintensitäten der Schnitt-Curven A, C, D und E; 2 dürfte eine Spur verschoben sein, immerhin aber sehr wenig. Dagegen ist F unsicher und zwar besonders auch aus dem Grunde, dass, wie bereits bemerkt, das Zodiakallicht gegen Anfang März vielleicht aus meteorologischen Gründen rapid an Helligkeit abnahm.

Alle gefundenen Intensitätsmaxima liegen nun in der That nördlich von der Ekliptik. Jedenfalls fällt also die Zodiakal-Linse nicht in die Ekliptik. Die Lage der Linie grösster Intensität ist durch die drei Schnitte vom 21. Februar recht sicher bestimmt und es zeigt sich auf den ersten Blick, dass sie, wie von der Theorie verlangt, in absteigendem Sinne gegen die Ekliptik geneigt ist. Dasselbe gilt von den zwei Schnitten vom 27. Februar. Der 1. März gibt keinen Anhalt und ist überhaupt unsicher.

Es dürfte also gezeigt sein, dass die Zodiakal-Linse jedenfalls nicht in der Ekliptik zu suchen ist. Es dürfte ferner bereits durch die wenigen Versuche sehr wahrscheinlich gemacht sein, dass der Zodiakalring sich um die Ebene des Sonnenäquators lagert.

Es kommt jetzt darauf an, die Lagen der Linie der maximalen Intensität zu andern Jahreszeiten festzustellen. Es erscheint nach einigen Andeutungen nicht unmöglich, dass auch zeitweise mehrere Intensitätsmaxima vorhanden sind. Schliesslich wären aus der Lage und Ausdehnung der Schicht grösster Intensität und ihrem Verlauf, sowie der Verteilung der Intensitäten auf dem Kegel Schlüsse über die geometrische Form der Erscheinung zu ziehen. Diesen und ähnlichen Untersuchungen steht mit Hülfe des beschriebenen Apparates der Weg offen.

Da das Schnitt-Photometer so leicht photographische Eindrücke des Zodiakallichtes verschaffte, so lag der Gedanke nahe, dasselbe auch auf den Gegenschein anzuwenden. Leider hatten wir in diesem Frühjahr keine besonders klaren Nächte zur Verfügung und der Gegenschein war recht schwach. Immerhin konnte ich jüngst an zwei Abenden, am 27. und 28. April, mehrere Schnitte durch den Gegenschein ziehen.

Sie lassen auf den ersten Blick die Intensitätszunahme in der Gegend des Gegenscheines erkennen, und zeigen unzweideutig, dass dieses mehr geahnte als gesehene Licht thatsächlich vorhanden ist. Der Himmel war aber zu schlecht und unrein, als dass ich aus den Schnittserien den Punkt maximaler Intensität oder den Mittelpunkt des Gegenscheines hätte festlegen können.

Es mag noch erwähnt werden, dass ein Punkt im hellen Fleck in der Milchstrasse im Scutum Sobiesii bei 75 Secunden Belichtung photographisch nicht ganz so hell kam, als der Gegenschein bei 150 Secunden Belichtung.

Diese Untersuchungen sollen bei passender Gelegenheit weiter geführt werden. Vorerst genügt es gezeigt zu haben, dass der beschriebene Apparat auch dem Gegenschein näherzutreten gestattet.

Gr. Astrophys. Observ., Heidelberg 9. Mai 1900.

Ueber den sogenannten zweiten Mittelwerthsatz für endliche Summen und Integrale.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 13. Juni.*)

Der sogenannte zweite Mittelwerthsatz der Integral-Rechnung existirt in zwei verschiedenen Formen:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(I)} & \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx \\ \text{(II)} & \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = f(a)\cdot\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\cdot dx\end{array}\right\}(a \leqq \xi \leqq b),$$

die erste im wesentlichen von O. Bonnet,[1]) die zweite von P. Du Bois-Reymond[2]) herrührend. Dabei wird $f(x)$ in Gl. (I) für $a \leqq x \leqq b$ als positiv und niemals zunehmend, in (II) lediglich als monoton (niemals zu- oder niemals abnehmend) vorausgesetzt. Trotzdem nun der Satz (I) unter specielleren Voraussetzungen besteht, als der Satz (II), so ist er doch der allgemeinere von beiden. Denn während es,

---

[1]) Journal de Math. T. 14 (1849), p. 249. — Mémoires Acad. Belg. T. 23 (1850), p. 8. — B. giebt statt Gl. (I) die Ungleichungen:

$$A\cdot f(a) < \int_a^b \varphi(x)\cdot dx \leqq B\cdot f(a),$$

wo A, B das Minimum und Maximum von $\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx$ für $a \leqq \xi \leqq b$ bedeuten.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 69 (1868), p. 82.

ausser in dem besonderen Falle $f(b)=0$, zunächst unmöglich ist, den Satz (I) aus (II) herzuleiten, so ergiebt sich, wenn auch $f(x)$ lediglich als monoton vorausgesetzt wird, allemal die Anwendbarkeit des Satzes (I) auf $\pm f(x)+C$ (bei passender Wahl des zweifelhaften Vorzeichens und Limitirung von C), sodass ein noch etwas allgemeinerer Satz, als (II) resultirt, der schliesslich durch Specialisirung von C auch Gl. (II) liefert. Mit anderen Worten: Satz (I) ist keineswegs ein specieller Fall von (II), vielmehr erscheint (II) als ein blosses Corollar zu (I). Und da die Gleichung (I) für mancherlei Anwendungen die bei weitem bequemere ist, so findet man auch in den meisten Lehrbüchern zunächst die Bonnet'sche Form (I) als den eigentlichen Hauptsatz bewiesen und die Du Bois-Reymond'sche Form (II) auf dem eben angegebenen Wege daraus abgeleitet.[1]) Sogar Herr C. Neumann, der in der Vorrede (p. IV) seines Buches über Kugel-Functionen (Leipzig 1881)[2]) den Bonnet'schen Satz sehr kurz als einen „speciellen Fall" des Du Bois-Reymond'schen abthut, um dann diesen letzteren über Gebühr zu preisen, beweist schliesslich (p. 29 ff.) doch vor allem den Bonnet'schen Satz (I) unter der falschen Bezeichnung des „Du Bois-Reymond'schen" Mittelwerthsatzes[3]) und gewinnt daraus den Satz (II) als „Allgemeinere Form des Du Bois'schen Satzes" — eine Bezeichnung, die ebenfalls nicht correct erscheint, da der Satz (II), wie bemerkt, den Satz (I) zunächst nicht in sich enthält.

Nun existirt aber in der That eine solche allgemeinere Form des Satzes (II), die mir freilich in keiner seiner zahl-

[1]) Dabei wird dann gewöhnlich in (II) statt $f(a)$, $f(b)$ noch speciell $f(a+0)$, $f(b-0)$ geschrieben.

[2]) Der vollständige Titel lautet: Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-Functionen fortschreitenden Entwickelungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes.

[3]) Ebenso wenig scheint es angemessen, wenn Herr C. Jordan in seinem Cours d'Analyse (T. II, 2ième éd., p. 220) den Satz (II) schlechthin als von Bonnet herrührend bezeichnet, ohne den Namen Du Bois-Reymond's überhaupt zu erwähnen.

reichen Darstellungen begegnet ist, die aber von Du Bois-Reymond zwar nicht bei jener oben erwähnten ersten Formulirung oder einer späteren Vervollständigung des betreffenden Beweises,[1]) sondern bei anderer Gelegenheit kurz angegeben worden ist. In einer Besprechung der Thomae'schen Schrift: „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale“ (Halle, 1875)[2]) bemerkt er nämlich ausdrücklich, dass man in (II) statt $f(a)$ bezw. $f(b)$ auch jede Zahl $< f(a+0)$ bezw. $> f(b-0)$ (scil., wenn $f(x)$ als niemals abnehmend vorausgesetzt wird) substituiren kann, ohne dass ξ das Intervall $a \leqq \xi \leqq b$ verlässt. Die dafür einzig gegebene Begründung: „das Integral links bleibt dabei unverändert“ — scheint mir freilich unzulänglich; denn das Integral links bleibt ja auch unverändert, wenn man $f(a)$, $f(b)$ durch irgendwelche ganz beliebige Zahlen ersetzt. Es wäre daher zur genaueren Prüfung jener Bemerkung eine nochmalige Revision des betreffenden Beweises erforderlich,[3]) die dann in der That ihre Richtigkeit ergiebt. Man gewinnt auf diese Weise an Stelle des Satzes (II) den folgenden:

$$\text{(III)}\quad \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = A\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx + B\int_\xi^b \varphi(x)\cdot dx \begin{cases}\text{wo: } & A \leqq f(a+0) < f(b-0) \leqq B,\\ \text{oder: } & A \geqq f(a+0) > f(b-0) \geqq B,\end{cases}$$

welcher dann in der That nicht nur diesen letzteren, sondern auch den Satz (I) als speciellen Fall enthält.[4]) Hierbei

---

[1]) Journ. f. Math. Bd. 79 (1875), p. 42, Fussnote.

[2]) Zeitschr. f. Math. Bd. 20 (1875), Hist.-lit. Abth., p. 126.

[3]) Man kann sich dabei mit Vortheil der gerade von Herrn Thomae (a. a. O. p. 18) benützten Methode bedienen, dass man setzt:

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = \int_{a'}^{b'} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx,$$

wo: $a' < a < b < b'$ und $\varphi(x) = 0$ für $a' \leqq x \leqq a$ und $b \leqq x \leqq b'$, während $f(x)$ in den hinzugefügten Intervallen bis auf die Monotonie-Bedingung willkürlich bleibt.

[4]) Vgl. Du Bois-Reymond, Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen (Tübingen, [1880]), p. 58.

frappirt nun zunächst die ausserordentlich grosse Willkürlichkeit der beiden mit A, B bezeichneten Zahlen, und es gewinnt wohl zunächst den Anschein, als ob dieselbe auf einer infinitesimalen Eigenschaft des bestimmten Integrals beruhe, nämlich auf dem Umstande, dass die zu integrirende Function für die Stellen einer beliebigen unausgedehnten Punktmenge ganz willkürlich gedacht bezw. abgeändert werden darf, ohne dass der Integralwerth selbst eine Veränderung erleidet. Es erschien mir nun nicht ohne Interesse, festzustellen, dass die Willkürlichkeit in der Auswahl jener Zahlen A, B in Wahrheit ganz elementaren arithmetischen Ursprunges ist, indem nämlich auch für gewöhnliche endliche Summen ein Mittelwerthsatz besteht, der genau die Bauart der Formel (III) besitzt und deren eigentliche Grundlage bildet. Dieser, aus einer einfachen und sehr naheliegenden Umformung der bekannten Abel'schen Transformationsformel (partiellen Summation) hervorgehende Mittelwerthsatz wird in § 1 der folgenden Mittheilung zunächst abgeleitet und des näheren discutirt. In § 2 gebe ich dann einen darauf beruhenden Beweis der Integral-Formel (III), der mir mehr als irgend einer der bisherigen Beweise die äusserst erreichbare Allgemeinheit mit genügender Einfachheit zu verbinden scheint. Zur näheren Begründung dieser Ansicht werden dann noch in § 3 einige historische und kritische Bemerkungen über jene früheren Beweise hinzugefügt.

§ 1. Die Abel'sche Transformation und die daraus resultirenden Mittelwerthsätze für endliche Summen.

1. Es seien [illegible] $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ beliebig vorgelegte Zahlen und

$$(1) \quad [illegible] \sum [illegible]$$

Sodann setze [illegible]

[illegible] $1, 2, \ldots n$.

so ergiebt sich mit Hülfe der Substitution von

$$v_1 = V_1, \quad v_\nu = V_\nu - V_{\nu-1} \quad (\nu = 2, \dots n)$$

in Gl. (1) die bekannte Abel'sche Transformations-Gleichung:

$$(3) \qquad S_n = \sum_1^{n-1}{}^{\nu} (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_n V_n.$$

Um derselben eine etwas allgemeinere, für die weiteren Schlüsse zweckmässige Gestalt zu geben, bezeichne ich mit u_0, u_{n+1} zwei vollkommen willkürlich anzunehmende Zahlen, mit V_0 die Null. Alsdann besteht die Identität:

$$(4) \qquad 0 = (u_0 - u_1) \cdot V_0 - u_{n+1} V_n + u_{n+1} V_n$$

und es ergiebt sich, wenn man dieselbe zu Gleichung (3) addirt:

$$(A) \qquad S_n = \sum_0^{n}{}^{\nu} (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_{n+1} V_n.$$

2. Es seien jetzt die Zahlen $u_1, u_2, \dots u_n$ reell und so gegeben, dass sie eine monotone (gleichgültig ob niemals zu- oder niemals abnehmende) Folge bilden; und es mögen sodann u_0, u_{n+1} im übrigen zwar willkürlich, jedoch so angenommen werden, dass sie sich dieser monotonen Folge anschliessen (welcher Bedingung u. a. stets genügt wird, wenn man speciell $u_0 = u_1$, $u_{n+1} = u_n$ setzt). Ferner werde allgemein durch die Symbole:

$$\underset{\nu=m}{\overset{\nu=m+p}{\text{Max}}}\,(a_\nu) \qquad \underset{\nu=m}{\overset{\nu=m+p}{\text{Min}}}\,(a_\nu) \qquad \underset{\nu=m}{\overset{\nu=m+p}{\mathfrak{M}}}\,(a_\nu)$$

das Maximum, das Minimum, ein Mittelwerth

aus irgendwelchen Zahlen $a_m, a_{m+1}, \dots a_{m+p}$ bezeichnet.

Alsdann ergeben sich im Falle $u_\nu - u_{\nu+1} \gtrless 0$ aus Gl. (A) die Ungleichungen:

$$(B) \qquad S_n \begin{cases} > (u_0 - u_{n+1}) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Min}}}\,(V_\nu) \\ < (u_0 - u_{n+1}) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Max}}}\,(V_\nu) \end{cases} + u_{n+1} V_n$$

und entsprechend im Falle $u_\nu - u_{\nu+1} \leq 0$ die durch Vertauschung der Zeichen $\gtrless$ hieraus hervorgehenden. Man erhält daher in jedem dieser beiden Fälle, d. h. wenn die u_ν eine monotone Folge bilden, den folgenden Mittelwerthsatz:

$$\text{(C)} \qquad S_n = (u_0 - u_{n+1}) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1} V_n$$
$$= u_0 \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1} (V_n - \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)).$$

Da $\underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)$ einen mittleren Werth aus den Zahlen $V_0, V_1, \ldots V_n$ bedeutet, so muss es entweder mindestens ein bestimmtes $m < n$ geben,[1]) sodass:

$$\text{(5)} \qquad \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) = V_m ;$$

oder es tritt in der Reihe $V_0, V_1, \ldots V_n$ mindestens bei einem bestimmten Index m (wo: $0 \leq m < n$) der Fall ein:

$$\text{(6)} \qquad V_m < \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) < V_{m+1} .$$

Man kann also beide Fälle dahin zusammenfassen, dass:

$$\text{(7)} \qquad \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) = V_m + \vartheta (V_{m+1} - V_m), \text{ wo: } 0 \leq \vartheta < 1 ,$$

d. h. mit Rücksicht auf die Beziehung: $V_{m+1} - V_m = v_{m+1}$:

$$\text{(8)} \qquad \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) = \begin{cases} V_m + \vartheta \, v_{m+1} \\ V_{m+1} - (1 - \vartheta) \cdot v_{m+1} . \end{cases}$$

Durch Einführung der Ausdrücke (6) in den Mittelwerthsatz (C) nimmt dann derselbe noch die folgende Form an:

---

[1]) Wäre $m = n$ d. h. n der erste Index, für welchen:

$$\underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) = V_n ,$$

so müssen $V_0, V_1, \ldots V_{n-1}$ theils unterhalb, theils oberhalb $\underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)$ liegen, sodass also für ein $m < n - 1$ eine Ungleichung von der Form (6) besteht.

(D) $$S_n = u_0(V_m + \vartheta \cdot v_{m+1}) + u_{n+1}((1-\vartheta)\cdot v_{m+1} + (V_n - V_{m+1}))$$
$$= u_0\left(\sum_1^m{}^{\nu} v_\nu + \vartheta \cdot v_{m+1}\right) + u_{n+1}\left((1-\vartheta)\, v_{m+1} + \sum_{m+2}^{n}{}^{\nu} v_\nu\right),$$

wo also m eine b e s t i m m t e (möglicherweise auf mehrfache Art wählbare) Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots (n-1)$ bedeutet und $0 \leqq \vartheta < 1$. Dabei ist noch anzumerken, dass für die beiden äussersten Fälle $m = 0$ bezw. $m = n - 1$ die Beziehungen bestehen: $V_m \equiv V_0 = 0$ bezw. $V_n - V_{m+1} \equiv V_n - V_n = 0$, sodass man also den in diesen Fällen bei der zweiten Schreibweise auftretenden Symbolen: $\sum_1^0{}^{\nu} v_\nu$ bezw. $\sum_{n+1}^{n} v_\nu$ die Bedeutung von 0 beizulegen hat.

3. Sind die u_ν nicht nur m o n o t o n, sondern auch g l e i c h b e z e i c h n e t, in welchem Falle also auch die n u m e r i s c h e n W e r t h e der u_ν eine m o n o t o n e Folge bilden, so kann man, falls die letzteren n i e m a l s z u n e h m e n, also: $|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$, über u_{n+1} so verfügen, dass man $u_{n+1} = 0$ setzt; während man $u_0 = 0$ annehmen kann, wenn die $|u_\nu|$ n i e m a l s a b n e h m e n, also: $|u_\nu| \leqq |u_{\nu+1}|$. Der Mittelwerthsatz (C) liefert also in diesen beiden Fällen die folgenden Beziehungen:

(E) $$\begin{cases} (1)\ S_n = u_0 \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}}(V_\nu) & (|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|), \\ (2)\ S_n = u_{n+1} \cdot (V_n - \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}}(V_\nu)) & (|u_\nu| \leqq |u_{\nu+1}|), \end{cases}$$

die sich mit Hülfe von (D) auch in die folgende Form setzen lassen:

(F) $$\begin{cases} (1)\ S_n = u_0\left(\sum_1^m{}^{\nu} v_\nu + \vartheta \cdot v_{m+1}\right) & (|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|), \\ (2)\ S_n = u_{n+1}\left((1-\vartheta)\, v_{m+1} + \sum_{m+2}^{n}{}^{\nu} v_\nu\right) & (|u_\nu| \leqq |u_{\nu+1}|). \end{cases}$$

Hierzu bemerke ich, dass man Gl. (E, 1), n i c h t aber Gl. (E, 2) auch u n m i t t e l b a r, d. h. ohne den Weg über Gl. (C) zu nehmen, aus der Fundamental-Formel (A) herleiten kann: man hat dabei nur zu beachten, dass bei gleichbezeichneten u_ν und

$|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$ die Differenzen $u_\nu - u_{\nu+1}$ mit den u_ν, also speciell auch mit u_{n+1} gleiches Vorzeichen haben.

Andererseits ist aber hervorzuheben, dass Gl. (E, 1), trotzdem sie durch Einführung einer specielleren Voraussetzung über die u_ν und durch Specialisirung der willkürlichen Grösse u_{n+1} aus Gl. (C) hervorging, doch genau dieselbe Tragweite besitzt, wie die formal allgemeinere Gleichung (C), d. h. dass man auch umgekehrt Gl. (C) ohne weiteres aus Gl. (E, 1) herleiten kann. Denn angenommen, es stehe von den u_ν nur soviel fest, dass $u_\nu \geqq u_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots (n-1))$, so wähle man $u_{n+1} \leqq u_n$, im übrigen beliebig. Alsdann bestehen die Beziehungen:

$$(9) \qquad u_\nu - u_{n+1} \geqq u_{\nu+1} - u_{n+1} \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots (n-1)),$$

sodass also auch:

$$|u_\nu - u_{n+1}| \geqq |u_{\nu+1} - u_{n+1}|.$$

Hat man dagegen: $u_\nu < u_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots (n-1))$ und wird sodann $u_{n+1} \geqq u_n$ angenommen, so ergiebt sich:

$$(10) \qquad u_\nu - u_{n+1} < u_{\nu+1} - u_{n+1} < 0,$$

und daher wiederum:

$$|u_\nu - u_{n+1}| > |u_{\nu+1} - u_{n+1}|.$$

Die Terme $(u_\nu - u_{n+1})$ genügen somit, wenn nur die u_ν überhaupt monoton sind, allemal derselben Bedingung, wie die u_ν im Falle der Gleichung (E, 1). Wendet man also diese letztere auf die $(u_\nu - u_{n+1})$ an, so resultirt:

$$(11) \qquad \sum_1^n{}^\nu (u_\nu - u_{n+1}) \cdot v_\nu = (u_0 - u_{n+1}) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)$$

d. h.
$$\sum_1^n{}^\nu u_\nu v_\nu = u_0 \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1} \left(V_n - \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) \right)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (C).

4. Diese Beziehungen erleiden eine merkliche Verschiebung, wenn man statt von der verallgemeinerten Abelschen Transformations-Formel (A) von deren ursprünglicher

Form (3) ausgeht. An die Stelle des Mittelwerthsatzes (C) tritt dann offenbar der folgende:

$$(C') \qquad S_n = u_1 \overset{\nu=n-1}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_n \left(V_n - \overset{\nu=n-1}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) \right),$$

dem man (durch Anwendung einer der Relation (8) analogen Transformation auf $\overset{\nu=n-1}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)$) auch die folgende Form geben kann:

$$(D') \quad S_n = u_1 \left(\sum_1^m{}^\nu v_\nu + \vartheta \cdot v_{m+1} \right) + u_n \left((1-\vartheta)\, v_{m+1} + \sum_{m+2}^n{}^\nu v_\nu \right),$$

wo jetzt m eine gewisse Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots (n-2)$ bedeutet.[1])

Werden jetzt wiederum die u_ν noch dahin eingeschränkt, dass ausser der Monotonie der u_ν noch die Beziehung $|u_\nu| \geq |u_{\nu+1}|$ vorausgesetzt wird, so gelangt man von der Gl. (3) zu dem bekannten Abel'schen Lemma:

$$(E') \qquad S_n = u_1 \cdot \overset{\nu=n}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu),$$

während es andererseits schlechterdings unmöglich erscheint, diese Relation direkt[2]) aus der unter allgemeineren Voraussetzungen bestehenden Formel (C') zu erschliessen. Dagegen kann man umgekehrt durch Anwendung der Formel (E') auf

---

[1]) Es ist das, beiläufig bemerkt, diejenige Formel, welche Du Bois-Reymond (Freiburger Antrittsprogramm, p. 2) sonderbarer Weise als Folgerung aus dem entsprechenden Integralsatze herleitet, während sie doch unmittelbar aus der Abel'schen Transformation resultirt und gerade die Grundlage jenes Integralsatzes bildet.

[2]) D. h. ohne die Formel (C') durch Hinzufügung eines weiteren Summanden u_{n+1}, v_{n+1}, (wo $v_{n+1} = 0$, u_{n+1} nur der Monotonie-Bedingung zu genügen hat) ähnlich wie in Nr. 1 und 2 in die folgende überzuführen:

$$S_n = u_1 \overset{\nu=n}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1} \left(V_n - \overset{\nu=n}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) \right),$$

und sodann analog, wie beim Uebergange von Formel (C) zu (E) zu verfahren.

$|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$ die Differenzen $u_\nu - u_{\nu+1}$ mit den u_ν, also speciell auch mit u_{n+1} gleiches Vorzeichen haben.

Andererseits ist aber hervorzuheben, dass Gl. (E, 1), trotzdem sie durch Einführung einer specielleren Voraussetzung über die u_ν und durch Specialisirung der willkürlichen Grösse u_{n+1} aus Gl. (C) hervorging, doch genau dieselbe Tragweite besitzt, wie die formal allgemeinere Gleichung (C), d. h. dass man auch umgekehrt Gl. (C) ohne weiteres aus Gl. (E, 1) herleiten kann. Denn angenommen, es stehe von den u_ν nur soviel fest, dass $u_\nu > u_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots (n-1))$, so wähle man $u_{n+1} \leqq u_n$, im übrigen beliebig. Alsdann bestehen die Beziehungen:

$$(9) \qquad u_\nu - u_{n+1} > u_{\nu+1} - u_{n+1} \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots (n-1)),$$

sodass also auch:

$$|u_\nu - u_{n+1}| \geqq |u_{\nu+1} - u_{n+1}|.$$

Hat man dagegen: $u_\nu \leqq u_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots (n-1))$ und wird sodann $u_{n+1} \geqq u_n$ angenommen, so ergiebt sich:

$$(10) \qquad u_\nu - u_{n+1} < u_{\nu+1} - u_{n+1} < 0,$$

und daher wiederum:

$$|u_\nu - u_{n+1}| > |u_{\nu+1} - u_{n+1}|.$$

Die Terme $(u_\nu - u_{n+1})$ genügen somit, wenn nur die u_ν überhaupt monoton sind, allemal derselben Bedingung, wie die u_ν im Falle der Gleichung (E, 1). Wendet man also diese letztere auf die $(u_\nu - u_{n+1})$ an, so resultirt:

$$(11) \qquad \sum_1^n{}^\nu (u_\nu - u_{n+1}) \cdot v_\nu = (u_0 - u_{n+1}) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)$$

d. h.
$$\sum_1^n{}^\nu u_\nu v_\nu = u_0 \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1} \left(V_n - \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) \right)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (C).

4. Diese Beziehungen erleiden eine merkliche Verschiebung, wenn man statt von der verallgemeinerten Abelschen Transformations-Formel (A) von deren ursprünglicher

Form (3) ausgeht. An die Stelle des Mittelwerthsatzes (C) tritt dann offenbar der folgende:

$$(C') \qquad S_n = u_1 \overset{\nu=n-1}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_n \left(V_n - \overset{\nu=n-1}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) \right),$$

dem man (durch Anwendung einer der Relation (8) analogen Transformation auf $\overset{\nu=n-1}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)$) auch die folgende Form geben kann:

$$(D') \quad S_n = u_1 \left(\sum_1^m{}^\nu v_\nu + \vartheta \cdot v_{m+1} \right) + u_n \left((1-\vartheta) v_{m+1} + \sum_{m+2}^n{}^\nu v_\nu \right),$$

wo jetzt m eine gewisse Zahl aus der Reihe 1, 2, ... $(n-2)$ bedeutet.[1])

Werden jetzt wiederum die u_ν noch dahin eingeschränkt, dass ausser der Monotonie der u_ν noch die Beziehung $|u_\nu| \geq |u_{\nu+1}|$ vorausgesetzt wird, so gelangt man von der Gl. (3) zu dem bekannten Abel'schen Lemma:

$$(E') \qquad S_n = u_1 \cdot \overset{\nu=n}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu),$$

während es andererseits schlechterdings unmöglich erscheint, diese Relation direkt[2]) aus der unter allgemeineren Voraussetzungen bestehenden Formel (C′) zu erschliessen. Dagegen kann man umgekehrt durch Anwendung der Formel (E′) auf

---

[1]) Es ist das, beiläufig bemerkt, diejenige Formel, welche Du Bois-Reymond (Freiburger Antrittsprogramm, p. 2) sonderbarer Weise als Folgerung aus dem entsprechenden Integralsatze herleitet, während sie doch unmittelbar aus der Abel'schen Transformation resultirt und gerade die Grundlage jenes Integralsatzes bildet.

[2]) D. h. ohne die Formel (C′) durch Hinzufügung eines weiteren Summanden u_{n+1}, v_{n+1}, (wo $v_{n+1} = 0$, u_{n+1} nur der Monotonie-Bedingung zu genügen hat) ähnlich wie in Nr. 1 und 2 in die folgende überzuführen:

$$S_n = u_1 \overset{\nu=n}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1} \left(V_n - \overset{\nu=n}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) \right),$$

und sodann analog, wie beim Uebergange von Formel (C) zu (E) zu verfahren.

die Terme $(u_\nu - u_n)$, welche wiederum stets der Bedingung $|u_\nu - u_n| > |u_{\nu+1} - u_n|$ genügen, auch wenn von den u_ν lediglich die Monotonie vorausgesetzt wird, ohne weiteres die mit Gl. (C′) im wesentlichen gleichwerthige Beziehung erhalten:

$$S_n = u_0 \mathfrak{M}_{\nu=1}^{\nu=n}(V_\nu) + u_n\left(V_n - \mathfrak{M}_{\nu=1}^{\nu=n}(V_\nu)\right).$$

Es besitzt also hier die unter speciellerenVoraussetzungen bestehende Gleichung (E′) in Wahrheit einen weiteren Wirkungskreis, als die unter allgemeineren Bedingungen geltende Formel (C′), d. h. es besteht zwischen den Formeln (E′) und (C′) genau dasselbe Verhältniss, wie zwischen dem Bonnet'schen und dem Du Bois-Reymond'schen Satze (I) und (II).

---

§ 2. Der zweite Mittelwerthsatz für bestimmte Integrale.

1. Lehrsatz. Ist im Intervalle $x_0 \leq x \leq X$ die Function $f(x)$ *endlich* und *monoton*, $\varphi(x)$ und $f(x)\cdot\varphi(x)$ *integrabel*,[1]) so hat man:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = y_0\cdot\int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\cdot dx + Y\int_{\xi}^{X}\varphi(x)\cdot dx,$$

wo ξ einen gewissen, der Bedingung $x_0 < \xi \leq X$ genügenden Werth besitzt, während y_0, Y zwei der *monotonen* Folge der $f(x)$-Werthe bei $x = x_0$ und $x = X$ sich anschliessende, im übrigen willkürliche Zahlen bedeuten, sodass also entweder:

$$y_0 \geq f(x_0+0) > f(X-0) > Y,$$

oder:

$$y_0 < f(x_0+0) < f(X-0) < Y.$$

[1]) Ich nenne $\varphi(x)$ im Intervalle $x_0 < x < X$ integrabel, wenn nicht nur $\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx$, sondern auch $\int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\,dx$ für $x_0 < \xi < X$ existirt.

Bezüglich der in die Voraussetzung aufgenommenen Integrabilitäts-Eigenschaften von $\varphi(x)$ und $f(x) \cdot \varphi(x)$ bemerke ich folgendes. Die Function $f(x)$ ist auf Grund der vorausgesetzten Endlichkeit und Monotonie allemal integrabel, auch wenn sie im übrigen beliebig viele Unstetigkeiten besitzt.[1]) Ist dann $\varphi(x)$ endlich und integrabel oder besitzt $\varphi(x)$ nur solche Unendlichkeitsstellen,[2]) dass nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch $|\varphi(x)|$ integrabel ausfällt, so ist jedesmal $f(x) \cdot \varphi(x)$ eo ipso integrabel.[3]) Dies gilt sogar auch dann noch, wenn die als integrabel vorausgesetzte Function $\varphi(x)$ eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen besitzt, in deren Umgebung die absolute Integrabilität nicht vorhanden ist.[4]) Nur wenn Punkte der letztgenannten Art in unbegrenzter Anzahl auftreten, muss ausser der Integrabilität von $\varphi(x)$ noch diejenige von $f(x) \cdot \varphi(x)$ ausdrücklich in die Voraussetzung aufgenommen werden. Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass die Aussage, eine Function $\varphi(x)$, die in irgend einem Intervalle unendlich viele Unendlichkeits-Stellen besitzt, sei daselbst integrabel, allemal die Voraussetzung involvirt, dass jene Stellen eine unausgedehnte Menge bilden: hiermit ist nämlich, meines Wissens, die äusserste Grenze bezeichnet, bis zu welcher der Integral-Begriff überhaupt noch definirbar erscheint.[5])

---

1) S. z. B. Dini-Lüroth, p. 338, § 187, 6.

2) Also z. B., wie $\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}$, $\frac{1}{x^{1-\varepsilon}} \cdot \sin\frac{1}{x}$ bei $x = 0$.

3) Dini-Lüroth, p. 346, § 190, 5; — p. 419, § 226.

4) Ebendas. p. 422, § 227.

5) Herr Dini (a. a. O. p. 406, § 217) beschränkt die Definition auf den Fall, dass die Unendlichkeitsstellen eine Menge erster Gattung bilden (welche dann eo ipso auch unausgedehnt ist — s. z. B. Dini-Lüroth, p. 25, § 14) und beweist auch die Gültigkeit des Mittelwerthsatzes für diesen Fall: Serie di Fourier etc. (Pisa, 1880), p. 22. — Harnack (Math. Ann. Bd. 21 [1883], p. 325; ausführlicher Bd. 24 (1884), p. 220) definirt das Integral für den Fall, dass die Unendlichkeitsstellen eine beliebige unausgedehnte (von ihm als „discret" bezeichnete) Menge ausmachen und beweist (an der zuerst citirten Stelle) ebenfalls

2. **Beweis des Lehrsatzes.** Man theile das Intervall (x_0, X) durch Einschaltung der Punkte $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ in n Theil-Intervalle, sodass also:

$$(1) \quad J \equiv \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx \quad (\text{wo: } x_n = X)$$

gesetzt werden kann. Auf jedes dieser Theil-Integrale wende man die identische Umformung an:

$$(2) \quad \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f_\nu(x) \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx + \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(x) - f(x_\nu)\} \cdot \varphi(x) \cdot dx,$$

und zwar mag hier, falls etwa $f(x)$ an der Stelle x_ν unstetig sein sollte, unter $f_\nu(x)$ der (allemal eindeutig bestimmte) Werth $f(x_\nu - 0)$ verstanden werden: die Zahlen $f(x_\nu)$ bilden dann für $\nu = 1, 2, \ldots n$, wegen der Monotonie von $f(x)$, stets eine monotone Folge.

Durch Einführung der Umformung (2) in die rechte Seite von Gl. (1) ergiebt sich:

$$(3) \quad J = J_n + R_n$$

wo:

---

den Mittelwerthsatz in dem entsprechenden Umfange. Doch reichen die Erörterungen Harnack's nicht aus, um die Existenz des Integrals in dem Sinne zu gewährleisten, dass gleichzeitig mit $\int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx$ auch das Integral über jedes Theil-Intervall existirt (vgl. Stolz, Wiener Sitz.-Ber. Bd. 107² [1898], p. 3; Grundzüge der Diff.- und Integr.-Rechnung, Bd. III, p. 277). Dies ist, wenn die Unendlichkeits-Stellen eine Menge zweiter Gattung bilden, dann und nur dann der Fall, wenn ausser $\varphi(x)$ auch $|\varphi(x)|$ im Harnack'schen Sinne integrabel ist (vgl. Stolz, a. a. O. und Wiener Sitz.-Ber. Bd. 28² [1899], p. 1235). Für nicht absolut integrable $\varphi(x)$ muss es daher wohl bei der Dini'schen Voraussetzung sein Bewenden haben, dass die Unendlichkeitsstellen höchstens eine Menge erster Gattung bilden (so auch bei De La Vallée-Poussin, Journ. de Math. (4), T. 8 [1892], p. 453).

(4) $$J_n = \sum_1^n {}^{\nu} f(x_\nu) \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx$$

(5) $$R_n = \sum_1^n {}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(x) - f(x_\nu)\} \cdot \varphi(x) \cdot dx.$$

Der ganze Beweis des fraglichen Satzes besteht nun in der Anwendung der Abel'schen Transformation bezw. der daraus resultirenden Mittelwerth-Relation auf J_n und sodann in dem Nachweise, dass R_n bei hinlänglicher Vergrösserung von n beliebig klein wird.

Setzt man, mit Bezugnahme auf die in § 1 benützten Bezeichnungen, für $\nu = 1, 2, \ldots n$:

$$u_\nu = f_\nu(x),\quad v_\nu = \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx,\quad \text{also:}\quad V_\nu = \sum_1^\nu {}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx$$

und ausserdem: $u_0 = y_0$, $u_{n+1} = Y$, so nehmen die Ungleichungen (B), welche noch die Voraussetzung $f(x_\nu) > f(x_{\nu+1})$, also $f(x_0) > f(X)$ erheischen, die folgende Form an:

(6) $$J_n \begin{cases} > (y_0 - Y) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx \\ < (y_0 - Y) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx \end{cases} + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Dabei hätte man $Y < f(x_n - 0) = f(X - 0)$ und zunächst nur $y_0 > f(x_1 - 0)$ anzunehmen: dieser letzteren Bedingung wird aber (unabhängig von der Wahl des x_1) a fortiori genügt, wenn man $y_0 > f(x_0 + 0)$ festsetzt.

Zieht man jetzt statt der n Integrale $\int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx (\nu = 1, 2, \ldots n)$ alle möglichen Werthe des Integrals $\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx$ für $x_0 < x' < X$ in Betracht, so bestehen offenbar die Beziehungen:

$$\underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx \leq \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx, \quad \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx \geq \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot d\ldots$$

ass aus den Ungleichungen (6) a **fortiori** die folgende ergeben:

$$J_n \begin{cases} > (y_0 - Y) \cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx \\ < (y_0 - Y) \cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx \end{cases} + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx,$$

denen jetzt der Einfluss von n auf der rechten Seite vol ndig eliminirt erscheint. Angenommen nun, man könn ch passende Vergrösserung von n bei **jedem** $\varepsilon > 0$ e en, dass:

$$|R_n| < \varepsilon, \text{ also } R_n \begin{cases} > - \varepsilon \\ < + \varepsilon, \end{cases}$$

ergiebt sich durch Addition der beiden letzten Ungleich gen zu den entsprechenden Ungleichungen (8):

$$)\quad J \begin{cases} > (y_0 - Y) \cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx - \varepsilon \\ < (y_0 - Y) \cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx + \varepsilon \end{cases} + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx$$

l somit, da ε die untere Grenze Null besitzen sollte:

$$)\quad J \begin{cases} \geq (y_0 - Y) \cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx \\ \leq (y_0 - Y) \cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx \end{cases} + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Die entsprechenden Beziehungen mit Vertauschung de chen $\gtrless$ ergeben sich im Falle $f(x_0) > f(X)$. Man hat also, ern nur $f(x)$ für $x_0 \leq x \leq X$ monoton ist,

$$)\quad J = (y_0 - Y) \cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\mathfrak{M}}} \left(\int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\, dx \right) + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx$$

und da man dem betreffenden Mittelwerthe wegen der Stetigkeit von $\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx$ die Form: $\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx$, wo: $x_0 \leqq \xi < X$ geben kann, schliesslich, wie behauptet:

$$(13)\qquad \begin{aligned} J &= (y_0 - Y) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx \\ &= y_0 \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + Y \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

Es handelt sich somit einzig und allein noch um den Nachweis der Beziehung (9). Hierbei werde zunächst vorausgesetzt, dass nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch $|\varphi(x)|$ in dem fraglichen Intervalle integrabel sei.[1]) Aus Gl. (5) folgt zunächst:

$$(14)\qquad |R_n| \leqq \sum_1^n {}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(x) - f(x_\nu)| \cdot |\varphi(x)| \cdot dx.$$

Da nun, wegen der Monotonie von $f(x)$, für jedes einzelne Integrations-Intervall $x_{\nu-1} \leqq x \leqq x_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots n$) die Beziehung besteht:

$$(15)\qquad |f(x) - f(x_\nu)| \equiv |f(x) - f(x_\nu - 0)| \leqq |f(x_{\nu-1} + 0) - f(x_\nu - 0)|.$$

so ergiebt sich weiter:

$$(16)\qquad |R_n| \leqq \sum_1^n {}^{\nu} |f(x_{\nu-1} + 0) - f(x_\nu - 0)| \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |\varphi(x)| \cdot dx.$$

Wird jetzt $\varepsilon' > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so kann man die Theil-Intervalle $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ so weit verkleinern,[2]) dass:

---

[1]) Diese Bedingung ist an sich schon erfüllt, wenn die als integrabel vorausgesetzte Function endlich bleibt. Im übrigen beschränkt sie lediglich den Charakter, nicht aber die Anzahl der etwa zulässigen Unendlichkeitsstellen.

[2]) Dies ist ohne weiteres klar, wenn $\varphi(x)$ durchweg endlich bleibt, folgt aber auch für den Fall eines absolut integrablen, unendlichwerdenden $\varphi(x)$ unmittelbar aus der entsprechenden Definition eines Integrales von der Form $\int_a^b |\varphi(x)| \cdot dx$.

$$(17)\qquad \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |\varphi(x)|\cdot dx < \varepsilon' \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Alsdann wird aber:

$$|R_n| < \varepsilon' \cdot \sum_1^n{}^\nu |f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)|,$$

und da die Differenzen $f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)$ wegen der vorausgesetzten Monotonie von $f(x)$ sämmtlich gleichbezeichnet (eventuell auch Null) sind, also:

$$\sum_1^n{}^\nu |f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)| = |\sum_1^n{}^\nu \{f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)\}|$$
$$\leq |f(x_0+0) - f(X-0)|,$$

schliesslich:

$$(18)\qquad |R_n| < \varepsilon' \cdot |f(x_0+0) - f(X-0)|,$$

sodass also in der That $|R_n|$ — unter Voraussetzung eines absolut integrablen $\varphi(x)$ — durch passende Vergrösserung von n beliebig klein gemacht werden kann.[1])

Es möge nun zweitens $\varphi(x)$ auch solche Unendlichkeitsstellen a besitzen, dass zwar nicht mehr $|\varphi(x)|$, wohl aber $\varphi(x)$ und $f(x)\cdot\varphi(x)$ durchweg integrabel bleiben. Da die a im äussersten Falle eine unausgedehnte[2]) Menge bilden, so besagt die obige Integrabilitäts-Voraussetzung folgendes: Wird $\varepsilon'' > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so lassen sich die Stellen

[1]) Man kann dieses Resultat auch noch in anderer Weise erschliessen. Da $f(x)$ monoton ist und endlich bleibt, so kann es nur eine endliche Anzahl von Stellen x' geben, in deren Umgebung die Schwankung von $f(x)$ eine (beliebig klein vorzuschreibende) positive Zahl ε' erreicht oder übersteigt. Bei hinlänglicher Verkleinerung der Theil-Intervalle wird die Gesammtlänge der Intervalle, welche jene Punkte x' enthalten eine beliebig kleine Zahl δ, und zugleich in allen übrigen Intervallen:

$$|f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)| < \varepsilon'.$$

Man findet daher aus Ungl. (16):

$$R_n < \varepsilon' \cdot \int_{x_0}^{X} |\varphi(x)|\cdot dx + \delta\cdot |f(x_0+0) - f(X-0)|.$$

[2]) Vgl. übrigens p. 220, Fussnote.

a in eine endliche Anzahl von Intervallen: $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_p$, wo etwa:

$$(19) \qquad \delta_\varkappa = x_{m_\varkappa} - x_{m_\varkappa - 1} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots p),$$

einschliessen, so dass:

$$(20) \quad (a) \; \left|\sum_1^\lambda{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x)\cdot dx\right| < \varepsilon'', \quad (b) \; \left|\sum_1^\lambda{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx\right| < \varepsilon''$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots p).$$

Bezeichnet man sodann mit $\varphi_1(x)$ eine Function, die ausserhalb der Intervalle $\delta_\varkappa$ mit $\varphi(x)$ übereinstimmt, dagegen für $x_{m_\varkappa - 1} \leq x \leq x_{m_\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ verschwindet, so lässt sich R_n in die Form setzen:

$$(21) \; R_n = \sum_1^n{}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(x) - f(x_\nu)\}\cdot\varphi_1(x)\cdot dx + \sum_1^p{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} \{f(x) - f(x_{m_\varkappa})\}\cdot\varphi(x) dx.$$
$$= R_n' + S_p.$$

Da $\varphi_1(x)$ endlich bleibt, so gilt für R_n' das zuvor in Bezug auf R_n gefundene Ergebniss Ungl. (18), d. h. man erhält bei passender Vergrösserung von n:

$$(22) \qquad |R_n'| < \varepsilon' \cdot |f(x_0 + 0) - f(X - 0)|.$$

Ferner hat man:

$$(23) \qquad S_p = \sum_1^p{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx + \sum_1^p{}^\varkappa f(x_{m_\varkappa}) \cdot \int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x)\cdot dx.$$

Die erste dieser Summen liegt nach Ungl. (20^b) numerisch unter ε''. Auf die zweite kann man, wegen der Monotonie von $f(x_{m_\varkappa})$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots p$, den Mittelwerthsatz (C) des vorigen Paragraphen (p. 214) anwenden. Beachtet man, dass jede der in Betracht kommenden Summen und folglich auch jeder aus ihnen gezogene Mittelwerth nach Ungl. (20^a) numerisch unter ε'' liegt, so ergiebt sich:

$$(24) \; \left|\sum_1^p{}^\varkappa f(x_{m_\varkappa}) \cdot \int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x)\cdot dx\right| < |f(x_0 + 0) - f(X - 0)|\cdot\varepsilon'' + |f(X - 0)|\cdot\varepsilon'',$$

und daher schliesslich:

$$(25)\quad |R_n| < (\varepsilon' + \varepsilon'') \cdot |f(x_0+0) - f(X-0)| + \varepsilon''(1 + |f(X-0)|).$$

Damit ist aber der ausgesprochene Satz jetzt vollständig bewiesen.

3. Setzt man speciell: $y_0 = f(x_0 + 0)$, $Y = f(X - 0)$, so erhält man die zumeist übliche Form des fraglichen Satzes:

$$(26)\quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(x_0 + 0) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + f(X - 0) \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Und wenn sodann die $f(x)$-Werthe nicht nur monoton, sondern auch gleichbezeichnet sind, sodass man setzen kann: $Y = 0$, falls $|f(x_0 + 0)| > |f(X - 0)|$, dagegen $y_0 = 0$, falls $|f(x_0 + 0)| < |f(X - 0)|$, so folgt:

$$(27)\quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(x_0 + 0) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx \quad (|f(x_0 + 0)| > |f(X - 0)|).$$

$$(28)\quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(X - 0) \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx \quad (|f(x_0 + 0)| < |f(X - 0)|).$$

Will man lediglich — etwa im Rahmen einer Elementar-Vorlesung — die für die Anwendungen wichtigsten Formeln (26) (27) beweisen, so wird man am einfachsten im Anschlusse an das gewöhnliche Abel'sche Lemma[1]) und unter Einhaltung des (natürlich sich entsprechend vereinfachenden) Beweisverfahrens von Nr. 2 zunächst Gl. (27) und hieraus nach der in

---

[1]) In der bekannten, aus Gl. (3) des vorigen Paragraphen unmittelbar hervorgehenden Form:

$$u_1 \cdot \operatorname*{Min}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu) < S_n < u_1 \cdot \operatorname*{Max}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu).$$

Kehrt man die Reihenfolge der Glieder um, so ergiebt sich entsprechend:

$$u_n \operatorname*{Min}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_{\nu,n}) < S_n < u_n \operatorname*{Max}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_{\nu,n})$$

$$(\text{wo: } V_{\nu,n} = v_\nu + v_{\nu+1} + \ldots + v_n),$$

eine Beziehung, aus der dann analog Gl. (28) resultiren würde.

der Einleitung angedeuteten Methode Gl. (26) ableiten.[1]) Man gewinnt dabei gegenüber den sonst üblichen Beweisen immer noch den Vortheil, dass das Auftreten von Unendlichkeits-Stellen, welche die absolute Integrabilität von $\varphi(x)$ bestehen lassen, sowie dasjenige unendlich vieler Zeichenwechsel bei $\varphi(x)$ den Haupttheil des Beweises in keiner Weise complicirt.

---

§ 8. Ueber die bisherigen Beweise des zweiten Mittelwerthsatzes der Integralrechnung.

1. Bonnet bezeichnet seinen Integralsatz (Fussn. 1, p. 209) als eine unmittelbare Folge des Abel'schen Lemma's, ohne in eine genauere Discussion der erforderlichen Grenzübergänge einzutreten. Das entsprechende gilt von dem sogenannten Hankel'schen Beweise des Satzes in der gewöhnlichen Du Bois-Reymond'schen Form (p. 209, Gl. II).[2]) Hankel beweist in Wahrheit nur nochmals die Abel'sche Transformation für $\sum_{n}^{0}{}^{\nu} u_\nu v_\nu$ und leitet daraus diejenige Summen-Relation ab, welche der Mittelwerth-Formel (C') des § 1 bei Umkehrung der Gliederfolge entspricht. Im übrigen begnügt er sich mit dem Hinweise, dass daraus durch einen passenden Grenzübergang die fragliche Integralformel hervorgehe.

Immerhin lehren diese Beweis-Andeutungen so viel, dass der eigentliche Kern des fraglichen Satzes in der Abel'schen Transformation liegt, und zwar gleichgültig, ob man auf den Beweis der Bonnet'schen (I), der gewöhnlichen (II) oder der verallgemeinerten (III) Du Bois-Reymond'schen Form ausgeht: gelingt es nur, die Abel'sche Transformation in an-

[1]) Die directe Ableitung von Gl. (26) scheint mir aus dem Grunde unvortheilhaft, weil man alsdann die zur Abschätzung von Integralen mit der oberen Grenze ∞ besonders nützliche Formel (27) überhaupt nicht erhält. (So z. B. bei Thomae, a. a. O. p. 18; Stolz, Grundzüge der Diff.- und Int.-R., Bd. I, p. 420).

[2]) Zeitschr. f. Math. Bd. 14 (1869), p. 436.

gemessener Weise auf das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$ anzuwenden, so hängt die besondere Form des Endresultates lediglich davon ab, ob man (je nachdem $f(x)$ als monoton und gleichbezeichnet oder nur als monoton vorausgesetzt wird) für den Endschluss das gewöhnliche Abel'sche Lemma (E'), die Mittelwerth-Relation (C') oder deren verallgemeinerte Form (C) des § 1 (bezw. die diesen Gleichungen zu Grunde liegenden Ungleichungen) benützt. Was nun aber die Möglichkeit betrifft, jenes Integral mit Hülfe der Abel'schen Transformation umzugestalten, so ergeben sich hier zwei verschiedene Wege.

2. Am nächsten liegt es offenbar, die Umgestaltung des Integrals in eine Summe von der Form $\sum_{1}^{n} {}^{\nu}\, u_\nu\, v_\nu$ dadurch zu ermöglichen, dass man auf dessen Definition als Grenzwerth einer solchen Summe zurückgeht:

$$(1) \qquad J = \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = \lim_{n=\infty} \sum_{1}^{n} {}^{\nu}\, f(x_\nu) \cdot (\varphi(x_\nu) \cdot \delta_\nu).$$

Der erste Beweis dieser Art — und zwar für die Satzform (II) — ist wohl derjenige des Herrn Thomae (1875),[1]) etwas übersichtlicher (Satzform (I)) der des Herrn Dini (1878).[2]) Unvollständig scheint mir ein ebenfalls hierher gehöriger Beweis von Kronecker (1885),[3]) der auch in die von Herrn Netto herausgegebenen Vorlesungen über die Theorie der Integrale übergegangen ist,[4]) während andererseits der von Kron-

[1]) A. a. O. p. 18.

[2]) Dini-Lüroth, p. 387, § 204.

[3]) Mathesis, T. 5, p. 100. Es fehlt die Erörterung der Beziehung zwischen den dort mit m, M und m_0, M_0 bezeichneten Zahlen.

[4]) A. a. O. p. 59. Die in der vorigen Fussnote mit m, M und m_0, M_0 bezeichneten Zahlenpaare sind hier beide mit M_0, M bezeichnet. Dabei bedeuten M_0, M einmal eine untere und obere Schranke für

$$\sum_{1}^{\varkappa} {}^{\nu}\, \varphi(x_\nu) \cdot \delta_\nu \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

ecker bei dieser Gelegenheit ausgesprochene Zweifel, ob das Integral allemal eine stetige Function seiner oberen Grenze sei, schwerlich von vielen Mathematikern getheilt werden dürfte. Die bei dem Kronecker'schen Beweise nach meinem Dafürhalten bestehende Lücke ist wohl am zweckmässigsten in dem von Herrn Hölder[1]) gegebenen Beweise ausgefüllt, weniger scharf bei C. Jordan.[2])

Im übrigen scheint mir diese ganze Beweis-Methode bei vollkommen strenger Durchführung eine gewisse Schwerfälligkeit und Unübersichtlichkeit mit sich zu bringen, die gerade aus dem Zurückgreifen auf die Summen-Definition entspringt. Auch bezieht sie sich ausschliesslich auf den Fall eines endlich bleibenden $\varphi(x)$: das Auftreten eines einzigen Unendlichkeitspunktes einfachster Art erfordert wieder eine besondere Betrachtung.

3. Aus diesen Gründen halte ich die zweite Methode, die sich zur Ausführung der fraglichen Transformation des Integrals darbietet, für vortheilhafter. Sie besteht darin, das Integral in eine Summe von Theil-Integralen:

$$\sum_{1}^{n}{}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$$

zu zerlegen, diese letzteren auf die Form zu bringen:

$$u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x)\, dx,$$

oder zum mindesten auf die folgende:

$$u_\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx + r_\nu \text{ (wo: } \sum_{1}^{n}{}^{\nu} r_\nu \text{ mit } \frac{1}{n} \text{ gegen Null convergirt),}$$

---

das andere Mal Minimum und Maximum von

$$\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx \text{ für } x_0 < x' < X.$$

1) Gött. Anzeigen, 1894, p. 520.

2) Cours d'Analyse, T. II, p. 222.

und sodann auf $\sum_{1}^{n}{}^{\nu} u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx$ wiederum die Abel'sche Transformation anzuwenden.

Diese Methode liegt in Wahrheit dem sehr unübersichtlichen[1]) Beweise von Du Bois-Reymond[2]) zu Grunde: nur erscheint sie, da die betreffende Umformung nicht mit Hülfe einer allgemeinen Formel, sondern schrittweise vollzogen wird, und in Folge einer ganz besonders unglücklich gewählten Bezeichnungsweise bis zur Unkenntlichkeit verdunkelt.

In ihrer einfachsten Gestalt findet man sie bei dem Beweise des Herrn G. F. Meyer. Auf Grund der dort eingeführten beschränkenden Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ nur an einer endlichen Anzahl von Stellen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ das Vorzeichen wechseln solle, ergiebt sich durch Anwendung des ersten Mittelwerthsatzes auf $\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$ $(\nu = 1, 2, \ldots n;\ x_n = X)$:

$$J = \sum_{1}^{n}{}^{\nu} u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx, \tag{2}$$

wo u_ν einen (unbekannten) Mittelwerth von $f(x)$ für $x_{\nu-1} < x \leqq x_\nu$ bezeichnet. Da die u_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ gleichzeitig mit $f(x)$ monoton sind, so folgt dann alles weitere unmittelbar durch Anwendung der Abel'schen Transformation.

Der Beweis des Herrn Neumann[3]) beruht auf einer Zerlegung von folgender Form:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{1}^{n}{}^{\nu} u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx + \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} (f(x) - u_\nu) \cdot \varphi(x) \cdot dx \\ &= J_n + R_n, \end{aligned} \tag{3}$$

[1]) „Mühsam, aber lehrreich" sagt Kronecker: Vorl. über Integr. p. 60.

[2]) S. p. 209, Fussn. 2.

[3]) Math. Ann. Bd. 6 (1873), p. 315.

wo u_ν das arithmetische Mittel von $f(x)$ für $x_{\nu-1} \leqq x \leqq x_\nu$ bedeutet. Auf J_n wird dann wieder die Abel'sche Transformation angewendet, andererseits aber, um aus der Beziehung:

$$(4) \qquad |R_n| \leqq \sum_1^n{}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(x) - u_\nu| \cdot |\varphi(x)| \cdot dx$$

das Verschwinden von $\lim_{n=\infty} R_n$ zu erschliessen, die beschränkende Voraussetzung der abtheilungsweisen Stetigkeit von $f(x)$ eingeführt. In Folge dieser letzteren Bedingung ergiebt sich offenbar bei passender Wahl der x_ν und hinlänglicher Verkleinerung von $x_\nu - x_{\nu-1}$:

$$(5) \qquad |R_n| < \varepsilon \cdot \sum_1^n{}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |\varphi(x)| \cdot dx = \varepsilon \cdot \int_{x_0}^{X} |\varphi(x)| \cdot dx.$$

Die beim Meyer'schen Beweise angeführte Beschränkung bezüglich der Zeichenwechsel von $\varphi(x)$ kann durch ein von Du Bois-Reymond[1]) angegebenes Verfahren nachträglich wieder beseitigt werden. Auch der Neumann'sche Beweis lässt sich dahin ergänzen, dass die in Bezug auf $f(x)$ eingeführte Stetigkeits-Bedingung unnöthig erscheint.[2])

Da der im vorigen Paragraphen von mir angegebene Beweis, der ja ebenfalls dem hier charakterisirten Typus angehört,[3]) ohne irgendwelche nachträgliche Correctur zu erfordern, den fraglichen Satz sofort in der allgemeinsten Form und unter den denkbar allgemeinsten Voraussetzungen liefert, so dürfte er vielleicht immerhin einige Beachtung verdienen.

---

[1]) Journ. f. Math. Bd. 79 (1875), p. 42, Fussnote. Weniger allgemein bei Stolz, Grundzüge I, p. 422.

[2]) Vgl. Fussnote 1, p. 224.

[3]) Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerke ich, dass die Form, unter welcher ich hier den Meyer'schen und Neumann'schen Beweis dargestellt habe und welche ja mit derjenigen meines Beweises ausserordentliche Aehnlichkeit besitzt, keineswegs deren Originalform ist, vielmehr von mir nur gewählt wurde, um den eigentlichen Kern und das gemeinsame aller dieser Beweise möglichst scharf hervortreten zu lassen.

5. Von Beweisen des fraglichen Satzes, die nicht auf der Abel'schen Transformation beruhen, sind mir nur zwei bekannt geworden: der von Weierstrass in seinen Vorlesungen schon vor der Du Bois-Reymond'schen Publication gegebene und ein anderer, der von Herrn Netto herrührt. Der erstere[1]) basirt auf der partiellen Integration und erfordert demgemäss die Existenz einer integrablen Derivirten $f'(x)$, besitzt also erheblich geringere Tragweite, als irgend einer der bisher betrachteten Beweise und macht insbesondere die allgemeine Anwendbarkeit des Satzes auf den Convergenz-Beweis der Fourier'schen Reihe illusorisch. Im übrigen beruht dieser Beweis im Grunde genommen auf einem Umwege, durch dessen Benützung er gerade seine Allgemeinheit verliert. Denn die partielle Integration in ihrer Anwendung auf bestimmte Integrale ist schliesslich auch nur eine, gewisse specielle Voraussetzungen erheischende Folgerung aus der partiellen Summation.[2]) Es wird also der Mittelwerthsatz bei dem fraglichen Beweise statt aus der Abel'schen Transformation selbst, aus einer unter speciellen Bedingungen bestehenden Folgerung derselben hergeleitet.

Der Netto'sche Beweis[3]) sucht die Bonnet'sche Form des Satzes durch vollständige Induction zu begründen. Bedeuten wiederum $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die einzigen Stellen, bei welchen $\varphi(x)$ einen Zeichenwechsel erleidet, so gilt der Satz zunächst, wie unmittelbar zu sehen, für das Intervall $x_0 < x < x_1$. Sodann wird gezeigt, dass seine Gültigkeit stets über eine Stelle x' hinausreicht, sofern sie nur bis x' feststeht. Dabei wird aber offenbar stillschweigend vorausgesetzt, dass überhaupt eine Stelle x_1, d. h. eine erste Stelle existire, bei welcher ein Zeichenwechsel stattfindet. Mit anderen Worten, der Beweis wird hinfällig, wenn [illegible] in der Nachbarschaft

[1]) [illegible] du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. [illegible] p. 82 [illegible] p. 57.

[2]) Vgl. [illegible] Bd. 22 (1877), p. 401.

[3]) [illegible] 40 (189[illegible]) p. 180.

von $x_0 + 0$ unendlich viele Zeichenwechsel besitzt. Ferner: angenommen es erstrecke sich die Gültigkeit des Satzes, die ursprünglich bis x' festgestanden haben mag, nunmehr bis x'', von da bis x''' u. s. f., so ist es sehr wohl denkbar, dass die Folge $x', x'', \dots x^{(\nu)} \dots$ gegen einen Grenzwerth $X' < X$ convergire. Und, wenn auch diese Complication überwunden ist, so gilt schliesslich, im Gegensatz zu der von Herrn Netto am Schlusse gemachten Behauptung, dass über die Anzahl der Stellen x_ν keine beschränkende Voraussetzung erforderlich sei, der betreffende Beweis überhaupt nur, wenn die x_ν eine monoton zunehmende Folge mit einer einzigen Grenzstelle bilden. Für diesen Fall kommt man aber so sehr viel einfacher mit dem Meyer'schen Beweise zum Ziele, dass die Vorzüge der äusserst mühsamen Netto'schen Schlussweise nicht recht einleuchtend erscheinen.

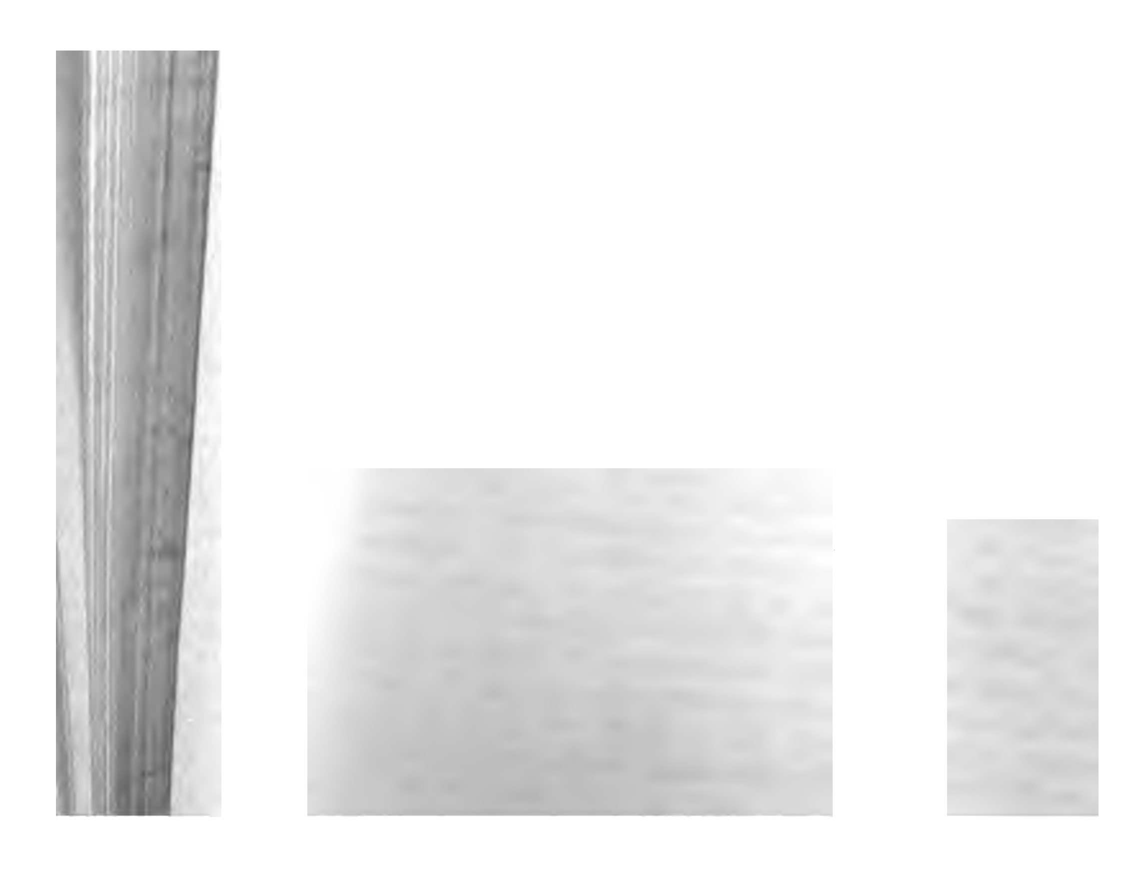
Druckfehler-Berichtigung.

In dem Aufsatze: „Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche", Sitz.-Ber. Bd. 28 (1898) muss es

p. 312, Zeile 3, Formel (34)
„ Fussnote, Zeile 4
p. 317, Zeile 1, Formel (54)
„ „ 4 „ (55)

durchweg heissen:

$$|b_\nu| - |a_\nu| \quad \text{statt:} \quad |a_\nu| - |b_\nu|.$$



Ueber den sogenannten semidefiniten Fall in der Theorie der Maxima und Minima.

Von **Arthur Korn.**

(Eingelaufen 18. Juni.)

Die Entscheidung, ob eine Funktion

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

von n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ an einer Stelle:

$$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \ldots n, \tag{1}$$

welche den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, 2 \ldots n \tag{2}$$

entspricht, ein wirkliches Maximum oder Minimum besitzt, hat nur in dem singulären Falle eine gewisse Schwierigkeit, falls die 2. Variation an der betreffenden Stelle:

$$\delta^2 f = \tfrac{1}{2} \sum_1^n{}^i \sum{}^\varkappa f_{i\varkappa}\, \delta x_i\, \delta x_\varkappa, \tag{3}$$

in der:

$$f_{i\varkappa} = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_\varkappa} \right|_{x_1=a_1,\, x_2=a_2 \ldots x_n=a_n}, \tag{4}$$

semidefinit ist, d. i. falls die Gleichung

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \varrho & f_{12} \cdots\cdots f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - \varrho \cdots f_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} \cdots\cdots f_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

r von null verschiedene Wurzeln gleichen Vorzeichens $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_r$ und $n - r$ Wurzeln:

$$6) \quad \varrho_{r+1} = \varrho_{r+2} = \ldots . = \varrho_{n-1} = \varrho_n = 0 \quad (0 < r \overline{\leq} n - 1)$$

besitzt. Dieser singuläre Fall, in dem die Untersuchung der 2. Variation zur Entscheidung nicht mehr ausreicht, ist zum ersten Male in strenger Weise für den Fall zweier unabhängiger Variabeln von L. Scheeffer (Math. Ann. Bd. 35), für den allgemeinen Fall von n unabhängigen Variabeln von A. Mayer (Berichte der k. Sächs. Ges. d. Wiss. 1892). O. Stolz (Berichte der Wiener Akademie Bd. 99. 100. 102), v. Dantscher (Math. Ann. Bd. 51) behandelt worden. Ohne mich auf diese Arbeiten zu stützen, will ich im folgenden einen einfachen Weg angeben, um in dem genannten singulären Falle zu den nächsten Kriterien des Maximums resp. Minimums zu gelangen.

§ 1.

Wir wollen die ursprüngliche Definition des Maximums resp. Minimums zu grunde legen:

Eine Funktion von n unabhängigen Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

hat an der Stelle:

$$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

ein Maximum oder Minimum, falls eine positive, im übrigen beliebig kleine Grösse ε existiert, so, dass die Differenz

$$7) \quad \delta f = f(a_1 + \delta x_1, a_2 + \delta x_2, \ldots a_n + \delta x_n) - f(a_1, a_2 \ldots a_n)$$

für beliebige $\delta x_1 \, \delta x_2 \ldots \delta x_n$, die den Ungleichungen entsprechen:

$$8) \quad -\varepsilon < \delta x_i < +\varepsilon, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

ein festes Zeichen hat, und zwar wird ein Maximum vorhanden sein, falls stets

$$\delta f < 0,$$

ein Minimum, falls stets

$$\delta f > 0$$

ist. Wir wollen dabei von der Funktion f stets voraussetzen, dass in den Intervallen 8) f mit allen seinen Ableitungen eindeutig und stetig und der Taylor'schen Entwickelung fähig sei, so dass:

$$\delta f = \delta^1 f + \delta^2 f + \delta^3 f + \delta^4 f + \dots, \tag{9}$$

wenn wir mit

$$\delta^1 f,\ \delta^2 f,\ \delta^3 f,\ \delta^4 f \dots$$

resp. die 1. 2. 3. 4. ... Variation von f bezeichnen.

§ 2.

Wir betrachten den Fall, dass an einer Stelle:

$$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \dots n,$$

welche den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \dots n$$

entspricht, die 2. Variation semidefinit ist, und untersuchen zunächst 2 Specialfälle:

1. Specialfall. Es ist identisch:

$$\delta^2 f \equiv 0,$$

dann ist bekanntlich für ein Maximum oder Minimum erforderderlich, dass identisch:

$$\delta^3 f \equiv 0,$$

und es wird dann sicher ein Maximum vorhanden sein, falls $\delta^4 f$ stets positiv, ein Minimum, falls $\delta^4 f$ stets negativ ist; für die 2. Singularität, dass $\delta^4 f$ zwar ein festes Zeichen hat, aber auch für nicht gleichzeitig verschwindende $\delta x_1\ \delta x_2 \dots \delta x_n$ gleich null werden kann, ist zur Entscheidung eine weitere Untersuchung notwendig, während für den Fall, dass $\delta^4 f$ beliebig positiv oder negativ gemacht werden kann, sicher kein Maximum oder Minimum vorhanden ist.

2. Specialfall. Die 2. Variation ist von der Form:

$$\delta^2 f = \tfrac{1}{2}\sum_1^r {}^h \varrho_h \, \delta x_h^2, \text{ [1]} \quad (1 \overline{\overline{<}} r \overline{\overline{<}} n - 1),$$

lass:

$$\delta f = \tfrac{1}{2}\sum_1^r {}^h \varrho_h \, \delta x_h^2 + \delta^3 f + \delta^4 f + \ldots .$$

Nennen wir ε_1 den absolut grössten Wert von

$$\delta x_1 \, \delta x_2 \ldots \delta x_r,$$

en absolut grössten Wert von

$$\delta x_{r+1}, \; \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n,$$

verden offenbar die beiden Fälle:

$$\text{I.} \quad \varepsilon_2 \overline{\overline{<}} \varepsilon_1$$

$$\text{II.} \quad \varepsilon_1 \overline{\overline{<}} \varepsilon_2$$

möglichen Fälle umfassen.

In dem Falle I. muss δf das Zeichen der ϱ_h haben, wir das Zeichen von δf nur noch für den Fall

$$\varepsilon_1 \overline{\overline{<}} \varepsilon_2 \overline{\overline{<}} \varepsilon$$

untersuchen haben. Wir schreiben hierzu die Gleichun in der Form:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta f = {} & \tfrac{1}{2}\sum_1^r {}^h \varrho_h \, \delta x_h^2 \\ & + \left| \delta f \right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0} \quad \text{[2]} \\ & + \sum_1^r {}^h \left| \delta \frac{\partial f}{\partial x_h} \right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0} \delta x_h \quad \text{[3]} \\ & + \text{Glieder 3. und höherer Ordnung, welche} \\ & \quad \delta x_1 \, \delta x_2 \ldots \delta x_r \text{ von wenigstens zweiter} \\ & \quad \text{Ordnung enthalten,} \end{aligned} \right.$$

---

[1] Die ϱ_h sind hier von null verschiedene Koefficienten gleichen eichens.

[2] Wir sammeln in der 2. Zeile die Glieder nullter Ordnung in g auf $\delta x_1 \, \delta x_2 \ldots \delta x_r$.

[3] Wir sammeln in der 3. Zeile die in bezug auf $\delta x_1 \, \delta x_2 \ldots \delta x_r$ ren Glieder.

oder:

$$14)\quad \begin{cases} \delta f = \frac{1}{2}\sum_1^r {}^h \varrho_h \delta x_h^2 \quad (1+E) \\ \quad + \mid \delta f \mid_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0} \\ \quad + \sum_1^r {}^h \left| \delta \frac{\partial f}{\partial x_h} \right| \delta x_h \Big|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0} \end{cases},$$

wo wir von den in dem Ausdruck E zusammengefassten Gliedern aussagen können, dass:

$$15)\quad \text{abs. } E \overline{\lessgtr} a \cdot \varepsilon_2,$$

wenn wir unter a eine endliche Konstante verstehen.[1]) Wir können nun 14) folgendermassen schreiben:

$$16)\quad \begin{cases} \delta f = \frac{1}{1+E}\left[\sum_1^r {}^h \frac{1}{2}\varrho_h \left(\delta x_h (1+E) + \frac{\left|\delta \frac{\partial f}{\partial x_h}\right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0}}{\varrho_h}\right)^2 \right. \\ \left. \quad + (1+E)|\delta f|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0} - \frac{1}{2}\sum_1^r {}^h \frac{\left|\delta \frac{\partial f}{\partial x_h}\right|^2_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0}}{\varrho_h}\right]. \end{cases}$$

Die Gleichung 16) zeigt, dass

1. δf ein festes Zeichen und zwar das Zeichen der ϱ_h jedenfalls dann hat, wenn der Ausdruck:

$$17)\quad (1+E)[\delta f] - \frac{1}{2}\sum_1^r {}^h \frac{\left[\delta \frac{\partial f}{\partial x_h}\right]^2}{\varrho_h},$$

---

[1]) Es ist nemlich:

$$E = \frac{\text{Glieder der 4. Zeile in 13)}}{\frac{1}{2}\sum_1^r {}^h \varrho_h \delta x_h^2}$$

$$\text{abs. } E < \varepsilon_2 \frac{\sum_1^r {}^h \delta x_h^2}{\frac{1}{2}\sum_1^r {}^h |\varrho_h| \delta x_h^2} \times \text{endl. Const.},$$

und der Bruch rechts hat ein endliches Maximum.

(wir wollen die Substitution

$$18)\qquad \delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0$$

durch Einschliessung in $[-]$ ausdrücken), das Zeichen der ϱ_h bei beliebigen $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ und genügend kleinem ε_2 besitzt; und dass

2. δf ein festes Zeichen jedenfalls dann **nicht** hat, falls man die $\delta x_{r+1}\, \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n$ so wählen kann, dass bei beliebigen $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_r$ (die nur der Bedingung 12) entsprechen) der Ausdruck 17) das entgegengesetzte Zeichen der ϱ_h erhält.

Der Ausdruck 17)[1] kann nun — bei Berücksichtigung der Ungleichung 15) — ein festes Zeichen nur dann haben, wenn identisch:

$$19)\qquad [\delta^3 f] \equiv 0$$

ist, und der Ausdruck:

$$20)\qquad \left[\delta^4 f - \tfrac{1}{2}\sum_1^r{}_h \frac{\left(\delta^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_h}\right)^2}{\varrho_h}\right]$$

ein festes Zeichen hat, und er wird in jedem Falle das Zeichen der ϱ_h haben, wenn die Identität 19) erfüllt ist und der Ausdruck 20) stets das Zeichen der ϱ_h hat. Wir sind somit bisher zu dem folgenden Resultat gelangt:

Es ist in unserem 2. Specialfalle für ein wirkliches Maximum oder Minimum notwendig, dass unter den Bedingungen:

$$21)\qquad \delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0$$

die Identität:

$$22)\qquad [\delta^3 f] \equiv 0$$

[1] Man kann denselben in der folgenden Form schreiben:

$$(1+E)([\delta^3 f] + [\delta^4 f] + \ldots)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_1^r{}_h \frac{1}{\varrho_h}\left[\delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_h} + \delta^3 \frac{\partial f}{\partial x_h} + \ldots\right]^2.$$

stattfinde; es wird dann sicher ein Maximum resp. Minimum vorhanden sein, falls bei den Bedingungen 21) der Ausdruck:

$$\text{23)} \qquad \delta^4 f - \tfrac{1}{2} \sum_1^r {}^h \frac{1}{\varrho_h} \left(\delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_h} \right)^2$$

für beliebige $\delta x_{r+1}\, \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n$ das Zeichen der ϱ_h hat; es wird sicher kein Maximum oder Minimum stattfinden, falls der Ausdruck 23) unter den Bedingungen 21) durch geeignete Wahl der $\delta x_{r+1}\, \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n$ das entgegengesetzte Zeichen der ϱ_h erhalten kann; für den Fall, dass der Ausdruck 23) bei den Bedingungen 21) zwar ein festes Zeichen hat, aber auch verschwinden kann, ohne dass $\delta x_{r+1}\, \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n$ gleichzeitig null sind, ist eine weitere Untersuchung notwendig.[1])

§ 3.

Man kann nun jede beliebige semidefinite 2. Variation

$$\tfrac{1}{2} \overline{\underline{\sum^i \sum^\varkappa}}_1^n f_{i\varkappa}\, \delta x_i\, \delta x_\varkappa$$

durch die Jacobi'sche Transformation auf die Form:

$$\tfrac{1}{2} \sum_1^r {}^h \varrho_h\, \delta y_h^2, \quad (0 \overline{\overline{<}} r \overline{\overline{<}} n-1)$$

bringen, also auf einen der beiden Specialfälle des vorigen Paragraphen zurückführen, indem man:

$$\text{24)} \qquad x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{in} y_n, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

setzt und die Konstanten $a_{i\varkappa}$ und ϱ_h durch die Gleichungen:

$$\text{25)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_{11} a_{1h} + f_{21} a_{2h} + \ldots + f_{n1} a_{nh} = \varrho_h a_{1h}, \\ f_{12} a_{1h} + f_{22} a_{2h} + \ldots + f_{n2} a_{nh} = \varrho_h a_{2h}, \\ \text{— — — — — — — — — — —} \\ f_{1n} a_{1h} + f_{2n} a_{2h} + \ldots + f_{nn} a_{nh} = \varrho_h a_{nh}, \end{array} \right. \qquad h = 1, 2 \ldots n$$

$$\text{26)} \qquad \sum_1^n {}^\varkappa a_{\varkappa h}^2 = 1$$

bestimmt.

[1]) Man vgl. hierzu v. Dantscher (Math. Ann. 51).

Zwischen den Variationen δx_i und δy_i bestehen dann die Relationen:

$$27)\quad \begin{cases} \delta x_i = a_{i1}\,\delta y_1 + a_{i2}\,\delta y_2 + \ldots + a_{in}\,\delta y_n, \\ \delta y_i = a_{1i}\,\delta x_1 + a_{2i}\,\delta x_2 + \ldots + a_{ni}\,\delta x_n, \end{cases} \quad i = 1, 2 \ldots n.$$

Wir können somit die Resultate des vorigen Paragraphen sofort auf den allgemeinen Fall übertragen:

Es ist im Falle einer semidefiniten 2. Variation für ein wirkliches Maximum oder Minimum notwendig, dass unter den Bedingungen:

$$28)\qquad \delta y_1 = \delta y_2 = \ldots\ldots = \delta y_r = 0$$

die Identität:

$$29)\qquad \delta^3 f \equiv 0$$

stattfinde; es wird dann sicher ein Maximum resp. Minimum vorhanden sein, falls bei den Bedingungen 28) der Ausdruck:

$$30)\qquad \delta^4 f - \tfrac{1}{3}\sum_1^r{}_k \frac{1}{\varrho_k}\left(\delta^2 \frac{\partial f}{\partial y_k}\right)^2$$

für beliebige $\delta y_{r+1}\, \delta y_{r+2} \ldots \delta y_n$ das Zeichen der $\varrho_1\, \varrho_2 \ldots \varrho_r$ (resp. im Falle $r = 0$ ein festes Zeichen) hat: es wird sicher kein Maximum oder Minimum stattfinden, falls der Ausdruck 30) unter den Bedingungen 28) durch geeignete Wahl der $\delta y_{r+1}\, \delta y_{r+2} \ldots \delta y_n$ das entgegengesetzte Zeichen der $\varrho_1\, \varrho_2 \ldots \varrho_r$ erhalten kann (resp. im Falle $r = 0$ bald positiv bald negativ gemacht werden kann); für den Fall, dass der Ausdruck 30) bei den Bedingungen 28) zwar ein festes Zeichen hat, aber auch verschwinden kann, ohne dass $\delta y_{r+1}\, \delta y_{r+2} \ldots \delta y_n$ gleichzeitig null sind, ist eine weitere Untersuchung notwendig.

§ 4.

Die soeben gefundenen Kriterien setzen in der letztgenannten Form noch die Bekanntschaft mit der Jacobi'schen Transformation voraus; wir wollen uns nunmehr von dieser Voraussetzung befreien.

Zunächst sind, wie bekannt, die r Gleichungen 28) mit den n Gleichungen:

$$31)\qquad \sum_1^n {}^{\varkappa} f_{i\varkappa}\, \delta x_\varkappa = 0, \quad i = 1, 2 \,.\,.\, n$$

äquivalent, von denen nur r von einander unabhängig sind. Es handelt sich daher lediglich noch darum, den Ausdruck 30) so umzuformen, dass er die Kenntnis der Jacobi'schen Transformation nicht erfordert.

Es ist nun:

$$\frac{\partial f}{\partial y_h} = \sum_1^n {}^{\varkappa} a_{\varkappa h} \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}, \quad h = 1, 2 \ldots n,$$

$$\delta^2 \frac{\partial f}{\partial y_h} = \sum_1^n {}^{\varkappa} a_{\varkappa h}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

$$\left(\delta^2 \frac{\partial f}{\partial y_h}\right)^2 = \overline{\sum {}^i \sum {}^{\varkappa}}_1^n\, a_{ih}\, a_{\varkappa h}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

somit:

$$32)\qquad \sum_1^r {}^h \frac{1}{\varrho_h} \left(\delta^2 \frac{\partial f}{\partial y_h}\right)^2 = \overline{\sum {}^i \sum {}^{\varkappa}}_1^n\, c_{i\varkappa}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

wo:

$$33)\qquad c_{i\varkappa} = \sum_1^r {}^h \frac{1}{\varrho_h}\, a_{ih}\, a_{\varkappa h}, \quad (i, \varkappa = 1, 2 \ldots n).$$

Diese $c_{i\varkappa}$ wollen wir in etwas anderer Form darstellen. Wir multiplicieren die Gleichungen 25) resp. mit $a_{1h}\, a_{2h} \ldots a_{nh}$ und addieren, dann folgt mit Rücksicht auf 26):

$$34)\qquad \overline{\sum {}^i \sum {}^{\varkappa}}_1^n\, f_{i\varkappa}\, a_{ih}\, a_{\varkappa h} = \varrho_h, \quad h = 1, 2 \,.\,.\, n.$$

Die ϱ_h sind Wurzeln der Determinantengleichung 5); denken wir uns dieselben aus jener Gleichung als Funktionen der $f_{i\varkappa}$ berechnet und differenzieren wir nach Substitution dieser Lösungen ϱ_h 34) nach $f_{i\varkappa}$, dann folgt:

35)[1]
$$\left\{\begin{array}{ll} 2\, a_{ih}\, a_{\varkappa h} = \dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{i\varkappa}}, \quad i \neq \varkappa & \Bigg| \; i, \varkappa = 1, 2 \ldots n \\ a^2_{\varkappa h} = \dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{\varkappa\varkappa}} & \Bigg| \; h = 1, 2 \ldots r \end{array}\right.$$

Setzen wir nun die Werte 35) der $a_{i\varkappa}$ in 33) ein, so ergiebt sich:

36)
$$\left\{\begin{array}{ll} c_{i\varkappa} = \frac{1}{2} \sum\limits_1^r{}^h \dfrac{1}{\varrho_h} \dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{i\varkappa}}, \quad i \neq \varkappa & \Bigg| \\ c_{\varkappa\varkappa} = \sum\limits_1^r{}^h \dfrac{1}{\varrho_h} \dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{\varkappa\varkappa}}, & \Bigg| \; i, \varkappa = 1, 2 \ldots n, \end{array}\right.$$

oder:

37)
$$\left\{\begin{array}{ll} c_{i\varkappa} = \dfrac{1}{2P} \dfrac{\partial P}{\partial f_{i\varkappa}}, \quad i \neq \varkappa & \Bigg| \\ c_{\varkappa\varkappa} = \dfrac{1}{P} \dfrac{\partial P}{\partial f_{\varkappa\varkappa}}, & \Bigg| \; i, \varkappa = 1, 2 \ldots n, \end{array}\right.$$

wenn:

38)
$$P = \varrho_1\, \varrho_2 \ldots \varrho_r .$$

Es ist nun $(-1)^r P$ nichts anderes als der Koefficient a_r von ϱ^{n-r} in der nach Potenzen von ϱ geordneten Determinantengleichung 5):

39)
$$\varrho^n + a_1\, \varrho^{n-1} + a_2\, \varrho^{n-2} + \ldots + a_r\, \varrho^{n-r} = 0 .$$

---

[1] Wir haben zu berücksichtigen, dass ($\mu, \nu = 1, 2 \ldots n$; $h = 1, 2 \ldots r$):

$$\sum_1^n{}^i \sum{}^\varkappa f_{i\varkappa} \frac{\partial a_{ih}}{\partial f_{\mu\nu}} a_{\varkappa h} = \sum_1^n{}^i \frac{\partial a_{ih}}{\partial f_{\mu\nu}} \sum_1^n{}^\varkappa f_{i\varkappa}\, a_{\varkappa h},$$

$$= \varrho_h \sum_1^n{}^i a_{ih} \frac{\partial a_{ih}}{\partial f_{\mu\nu}}, \text{ (nach 25))}$$

$$= 0, \text{ (nach 26))}$$

und analog:

$$\sum_1^n{}^i \sum{}^\varkappa f_{i\varkappa}\, a_{ih} \frac{\partial a_{\varkappa h}}{\partial f_{\mu\nu}} = 0 .$$

Wir können daher folgendes Endresultat aussprechen:

Ist die 2. Variation an einer Stelle

$$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \ldots n,$$

welche den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

entspricht, semidefinit, so dass in der Gleichung:

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + a_2 \varrho^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \varrho + a_n = 0,$$

welche die nach Potenzen von ϱ geordnete Relation:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \varrho & f_{21} & \ldots f_{n1} \\ f_{1} & f_{22} - \varrho & \ldots f_{n2} \\ - & - & - \\ f_{1n} & f_{2n} & \ldots f_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

darstellt, die Koefficienten

$$a_{r+1}, \; a_{r+2}, \ldots a_n \quad (0 \gtreqless r \gtreqless n - 1)$$

verschwinden, während die Koefficienten:

$$(a_0 =) \, 1, \; a_1, \; a_2 \ldots a_r$$

entweder r Zeichenfolgen oder r Zeichenwechsel aufweisen, dann lauten die nächsten Kriterien für das Auftreten eines Maximums oder Minimums an der betrachteten Stelle:

Es ist für ein wirkliches Maximum oder Minimum notwendig, dass unter den Bedingungen:

A) $$\sum_1^n{}^{\varkappa} f_{i\varkappa} \, \delta x_\varkappa = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

(von diesen sind infolge der Semidefinitheit der 2. Variation nur r von einander unabhängig) die Identität:

B) $$\delta^3 f \equiv 0$$

stattfinde; es wird dann sicher ein **Maximum** resp. **Minimum** vorhanden sein, falls bei den Bedingungen A) der Ausdruck:

$$\text{C)} \qquad \delta^4 f - \tfrac{1}{2} \overline{\sum^i \sum^\varkappa}_1^n c_{i\varkappa}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

in dem:

$$\text{D)} \qquad \begin{cases} c_{i\varkappa} = \dfrac{1}{2a_r} \dfrac{\partial a_r}{\partial f_{i\varkappa}}, \quad i \neq \varkappa & \Big| \; i, \varkappa = 1, 2 \ldots n \\ c_{\varkappa\varkappa} = \dfrac{1}{a_r} \dfrac{\partial a_r}{\partial f_{\varkappa\varkappa}} & \Big| \; r = 0 \\ c_{i\varkappa} = 0, \quad \Big| \; i, \varkappa = 1, 2 \ldots n, \; r = 0, \end{cases}$$

das Zeichen von $(-\alpha_1)$ [resp. im Falle $r = 0$ ein festes Zeichen] hat; es wird sicher kein Maximum oder Minimum stattfinden, falls der Ausdruck C) unter den Bedingungen A) durch geeignete Wahl der $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ auch das Zeichen von $(+\alpha_1)$ erhalten kann [resp. im Falle $r = 0$ bald positiv, bald negativ gemacht werden kann]; für den Fall, dass der Ausdruck C) bei den Bedingungen A) zwar ein festes Zeichen hat, aber auch verschwinden kann, ohne dass $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ gleichzeitig null sind, ist eine weitere Untersuchung erforderlich.[1]) (Fall der 2. Singularität.)

---

[1]) Ich habe den obigen Satz zum ersten Male in einer Vorlesung über Variationsrechnung (München Winter 1896/97) ausgesprochen. Herr Prof. A. Mayer machte mich, als ich ihm den Beweis mitteilte, auf eine Lücke in demselben aufmerksam, die ich durch die obige Untersuchung ausgefüllt habe; ich hatte in meinem früheren Beweise die in dem Ausdruck E zusammengefassten Glieder in Formel 14) als für das Vorzeichen von δf belanglos fortgelassen; dass dies für die nächsten Kriterien der Fall ist, bedurfte des nunmehr hinzugefügten Beweises, und es ist zu bemerken, dass diese Glieder im Falle der 2. Singularität sehr wohl auf das Zeichen von δf von Einfluss sein können.

Sitzung vom 7. Juli 1900.

1. Herr F. Lindemann legt eine Abhandlung des Herrn Prof. Josef Schick vor: „Beziehungen zwischen Isogonalcentrik und Invariantentheorie.“

2. Herr W. Dyck überreicht eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten Eduard v. Weber: „Ueber die Reduzirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen.“



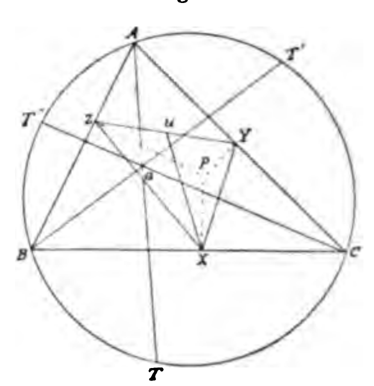
Beziehungen zwischen Isogonalcentrik und Invariantentheorie.

Von **J. Schick.**

(*Eingelaufen 7. Juli.*)

§ 1. Bekanntlich lässt sich ein Doppel-Verhältniss von vier Punkten in der complexen Ebene auf einfache Weise geometrisch darstellen. Seien A, B, C, P (Fig. 1) vier Punkte

Fig. 1.



mit den complexen Coordinaten z_1, z_2, z_3, z_4, so ist der absolute Wert des Doppel-Verhältnisses $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$

$$\text{abs}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}};$$

das Argument aber ist nach **Wedekind** gleich dem Winkel der Kreise $z_1\, z_2\, z_3$ und $z_1\, z_3\, z_4$, d. h. der Kreise, welche be-

ziehungsweise durch die Punkte A, B, C und A, C, P hindurchgehen (bei richtiger Wahl des Sinnes).

Diese beiden Elemente, absoluter Wert und Argument, lassen sich nun leicht in einem Dreieck vereinigt zur Anschauung bringen, nemlich dem Fusspunktsdreieck von P in Bezug auf das Dreieck ABC. Denn in diesem ist (vgl. Fig. 1), da $CXPY$ ein Kreisviereck,

$$XY = CP \cdot \sin ACB,$$

ebenso

$$ZY = AP \cdot \sin BAC,$$

also

$$\frac{XY}{ZY} = \frac{CP}{AP} \cdot \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{CP}{AP} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{CB} : \frac{AP}{CP},$$

also gleich dem absoluten Wert des betrachteten Doppel-Verhältnisses $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$. Der Winkel aber, den diese beiden Seiten des Fusspunktsdreiecks einschliessen, nemlich $\sphericalangle XYZ$, ist

$$= \sphericalangle XYP + \sphericalangle ZYP = \sphericalangle XCP + \sphericalangle ZAP$$
$$= \sphericalangle APC - \sphericalangle B,$$

d. h. gleich der Differenz zwischen den Peripheriewinkeln der Kreise APC und ABC, also gleich dem Winkel dieser beiden Kreise selbst, oder gleich dem Argument des gegebenen Doppel-Verhältnisses.

Bei linearer Transformation von der Form

$$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

bleibt aber das Doppel-Verhältniss von vier Punkten ungeändert; folglich muss von Dreieck XYZ bei der Transformation in die ζ-Ebene sowohl $XY : ZY$, als auch der eingeschlossene Winkel XYZ invariant bleiben; es bleibt also überhaupt die Form des Fusspunktsdreiecks XYZ ungeändert.

Man erhält somit den bemerkenswerthen Satz:

Bei linearer Transformation von vier Punkten in der complexen Ebene behält das Fusspunktsdreieck je des vierten Punktes in Bezug auf das Dreieck der drei übrigen Punkte invariante Form.

Dies ist der Fall, trotzdem alle bei Construction des Fusspunktsdreiecks benutzten Linien nicht invarianten Charakter haben, sondern in Kreise übergehen, die für die Construction des neuen Fusspunktsdreiecks keine Bedeutung haben.

§ 2. Aus dem angeführten Satze wird unmittelbar erhellen, dass die Theorie der Fusspunktsfiguren — die „Isogonalcentrik" — von einiger Wichtigkeit für die Invariantentheorie zu werden verspricht. Vor Jahren habe ich solche Fusspunktsfiguren, insbesondere Dreiecke, einer genaueren Untersuchung unterzogen und namentlich die Frage behandelt, welche geometrischen Oerter das „Orthogonalcentrum" P der Fusspunktsfigur (allgemeiner „Isogonalcentrum", wenn die Strahlen PX, PY, PZ nicht „orthodrom", sondern „isoloxodrom", d. h. nicht gerade je unter einem rechten, sondern unter einem beliebigen gleichen Winkel ξ gezogen werden) beschreiben muss, damit gewisse Elemente dieser Figur constant bleiben.

§ 3. Dabei zeigt sich z. B., dass die Seiten des Fusspunktsdreiecks YZ, XZ, XY (bezeichnet mit a_f, b_f, c_f) constant sind, wenn das Isogonalcentrum P sich auf Kreisen um die Dreiecksspitzen A, B, C bewegt. Weiter ist, wie längst bekannt, der Inhalt J_f des Fusspunktsdreiecks constant für Kreise, die concentrisch sind mit dem Umkreis des Originaldreiecks.

§ 4. Ferner ist die Transversale (Mittellinie) $t_f = XU$ constant für Kreise um einen Punkt T (den „Transversalpol"), der, im Sinne der complexen Ebene, der vierte harmonische Punkt ist zu A, B, C. Bekanntlich liegt dieser Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC so, dass das Verhältniss $BT : CT = BA : CA$ ist; auch leuchtet ein, dass man bei cyklischer Permutation zwei weitere Transversalpole T' und T'' erhalten wird: diese liefern im Fusspunktsdreieck constante Transversalen t_f' und t_f'' (vgl. meine Grundlagen einer Isogonalcentrik, Tübingen 1887, § 29), und das ganze Punkt-System T, T' und T'' bildet die Covariante Q der binären cubischen Form (ABC).

§ 5. Auch wenn YZ in U nicht halbiert, sondern in beliebigem gegebenen Verhältniss $m : n$ geteilt sein soll, so gilt dieser Satz

noch mutatis mutandis: man erhält dann für constantes $XU = t_f$ im Fusspunktsdreieck wiederum einen Kreis als geometrischen Ort; der Mittelpunkt liegt auch hier auf dem Umkreis (in einfach zu bestimmender Lage). Lässt man $m:n$ beliebig variieren, so umläuft das Centrum der Kreisscharen die Peripherie des Umkreises: letzterer ist also der Träger von Satellitenkreisen (oder der „deferierende" Kreis von Epicykelscharen), die die Oerter für constante „Barytome" t_f bilden.

§ 6. Zieht man AT, BT', CT'', so schneiden sich diese Linien in einem Punkte Q, der die Eigenschaft hat, dass Kreise um ihn die Träger von Isogonalcentren sind, die im Fusspunktsdreieck constante Summen der Seitenquadrate haben, so dass also

$$XY^2 + XZ^2 + YZ^2 = a_f^2 + b_f^2 + c_f^2 = \text{Const.}$$

Ich habe diesen Punkt früher selbständig untersucht und ihn den „Schwerpol" des Dreiecks genannt (vgl. Grundlagen, §§ 23, 34 ff.); später fand ich, dass derselbe auch von Grebe und dem um die Geometrie des Dreiecks hochverdienten Lemoine untersucht worden war und in neueren Werken bald nach dem einen, bald nach dem andern benannt wird. (Vgl. über diesen Punkt auch unten § 27.)

§ 7. Die Höhen eines Fusspunktsdreiecks, h_f, h_f', h_f'' sind constant, wenn das Isogonalcentrum sich auf Konchoiden mit Kreis ABC als Basis und den Ecken des Dreiecks A, resp. B und C, als Doppelpunkten bewegt (Grundlagen, § 108); ähnliches gilt von den Projectionen einer Seite auf eine andere: in diesem Falle wird die circulare Basis der Konchoiden gebildet von Orthogonalkreisen an den Umkreis ABC, die zugleich je durch die Endpunkte einer Seite gehen.

§ 8. Sollen im Fusspunktsdreiecke die Verhältnisse von zwei Seiten, z. B. $b_f : c_f$, constant sein, so bekommt man als Oerter für das Isogonalcentrum apollonische Kreise zu B und C (also den Punkten, die selbst die Centren für Kreisscharen mit constanter Länge der betreffenden Seiten b_f und c_f im Fusspunktsdreieck sind).

Soll $b_f = c_f$ sein, so geht der gesuchte Kreis durch A und den Transversalpol T; er ist dann ein „Aequilateralkreis“ des Dreiecks. Soll in ähnlicher Weise etwa das Verhältniss der Transversalen t_f' und t_f'' constant sein, so erhält man als Oerter für das Isogonalcentrum apollonische Kreise zu T' und T'' u. s. w.

§ 9. Sollen endlich die Winkel des Fusspunktsdreiecks constant sein, so erhält man Kreisbogen über den Seiten BC, AC, AB des Dreiecks als geometrische Oerter; für constante Winkel zwischen a_f und t_f Kreisbogen über AT, für constante Winkel zwischen t_f' und t_f'' Kreisbogen über $T'\,T''$ u. s. w.

§ 10. Die ersten der obigen Sätze, die von Strecken und Flächen handeln (§§ 3—7), werden für die Invariantentheorie keine Bedeutung haben, wohl aber die letzteren, die sich auf Verhältnisse, und jedenfalls diejenigen, die sich auf Winkel beziehen (§§ 8 und 9). Insbesondere handelt es sich um die Lage des Isogonalcentrums, wenn die Winkel X, Y, Z des Fusspunktsdreiecks bei gegebenem Urdreieck ABC vorgeschriebene Grösse haben sollen, und verwandte Dinge. Diesen Teil der „Isogonalcentrik“ hoffe ich demnächst in einem besonderen Kapitel, der „Isomorphopolcentrik“, zu behandeln; die Sätze, die ich hieraus für den gegenwärtigen Zweck benötige, werde ich je an geeigneter Stelle anführen.

§ 11. Zunächst vermittelt nun die Kenntniss des elementaren Hauptsatzes der Isomorphopolcentrik eine schnelle und unmittelbare Einsicht in das Theorem von der Invarianz der Form von Fusspunktsdreiecken bei linearer Transformation. Der angezogene Satz — dessen Beweis in den Ausführungen des § 1 oben liegt — lautet: Ein Winkel α_f eines Fusspunktsdreiecks ist gleich dem Winkel des Umkreises ABC mit dem Kreise durch B, P und C. Nun bleibt letzterer Winkel als Kreiswinkel bei der Transformation constant, also auch α_f, und natürlich in cyklischer Folge auch β_f und γ_f. Q. e. d.

§ 12. Des weiteren lehrt die Isomorphopolcentrik, dass, wenn ein Punkt P im Fusspunktsdreieck die Winkel λ, μ, ν hat, auch der (in Bezug auf den Umkreis) zu ihm „reciproke“

Punkt Q im Fusspunktsdreieck dieselben Winkel λ, μ, ν hat. Dies stimmt mit der bekannten Thatsache, dass das Verhältniss der Reciprocität bei linearer Transformation nicht zerstört wird. Man kann deshalb den Punkt Q den „Antiisomorphopol" zu P nennen.

§ 13. Natürlich sind verschiedene Anordnungen der Winkel λ, μ, ν bezüglich ihrer Lage an den drei Seiten des Dreiecks a, b, c möglich; die folgende Tabelle vermittelt die Uebersicht über dieselben:

a	b	c
λ	μ	ν
λ	ν	μ
μ	λ	ν
μ	ν	λ
ν	λ	μ
ν	μ	λ

Diesen sechs möglichen Anordnungen werden sechs Isomorphopole entsprechen, wozu dann noch je der zugehörige Antiisomorphopol tritt; im Ganzen erhält man also zwölf Punkte, deren Fusspunktsdreiecke in Bezug auf $A\ B\ C$ die Winkel λ, μ, ν aufweisen.

§ 14. Ist einer dieser Isomorphopole P gegeben, so können alle andern natürlich leicht gefunden werden. Ein zweiter P' wird z. B. auf dem Kreisbogen $B\ P\ C$ liegen müssen (für alle Punkte dieses Bogens ist a_f constant $= \lambda$); ferner müssen sich die Kreise $A\ P\ B$ und $A\ C\ P'$ auf dem „Aequilateralkreis" durch A und T schneiden (vgl. § 8, S. 253).

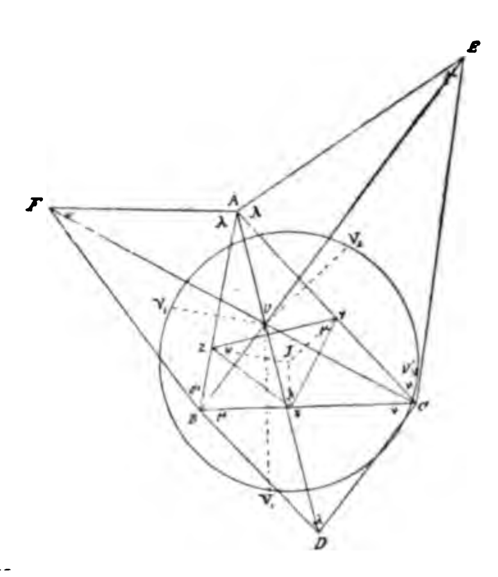
§ 15. Auch ist es leicht, die allgemeinen Gruppen von zwölf Punkten algebraisch zu definieren. Jede zerfällt (da die Winkel einmal positiv, einmal negativ angetragen werden) in zwei Gruppen von je sechs Punkten, die (bei verschiedener Anordnung) mit den gegebenen drei Punkten dasselbe Doppelverhältniss bilden, und demnach durch eine Covariante der Form

$$\varkappa\, \Delta^3 + \lambda\, Q^2 = 0$$

dargestellt werden.[1])

§ 16. Weitere Einsicht in die Lage eines Isomorphopols vermittelt die Betrachtung seines „Gegenpunkts.“[2]) Man construire über den Seiten des Dreiecks $A\ B\ C$ (zunächst nach aussen), in der in Figur 2 angedeuteten Ordnung, die ähnlichen

Fig. 2.



[1]) Vgl. Clebsch, Theorie der algebraischen Formen, p. 351 ff. Die Lage solcher sechs Punkte auf der Kugelfläche (wenn diese zur Darstellung der complexen Ebene dient) hat Klein angegeben: Vergleichende Betrachtungen, p. 47 (Erlangen 1872).

[2]) Zwei Punkte P und P' nennt man bekanntlich „Gegenpunkte“ in Bezug auf ein Dreieck, wenn sie zusammengehörige Brennpunkte eines Kegelschnitts sind, der die Seiten des Dreiecks berührt.

Dreiecke $B\,D\,C$, $C\,E\,A$, $A\,F\,B$ mit den Winkeln λ, μ, ν. Es gehen dann bekanntlich die Geraden $A\,D$, $B\,E$, $C\,F$ durch einen Punkt V, von dem aus die Seiten des Dreiecks unter den Supplementarwinkeln zu λ, μ, ν gesehen werden, so dass also $\sphericalangle B\,V\,C = 2\,R - \lambda$, $\sphericalangle A\,V\,C = 2\,R - \mu$, $\sphericalangle A\,V\,B = 2\,R - \nu$. Dieser Punkt V ist dann der „Gegenpunkt" des $(\lambda\mu\nu)$-Isomorphopols.

§ 17. Für diesen Punkt ist auch die Summe

$$D_{\lambda\mu\nu} = \sin\lambda \cdot A\,V + \sin\mu \cdot B\,V + \sin\nu \cdot C\,V$$

ein Minimum (wo V variabel bei constantem A, B, C und λ, μ, ν). Ich nenne diesen Ausdruck deswegen die $(\lambda\,\mu\,\nu)$-Minimal-Distanz, und es gilt für sie die Formel:

$$D_{\lambda\mu\nu} = \sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu\,\{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4\,J\}}.$$

§ 18. Einen Punkt V' mit ähnlichen Eigenschaften erhält man, wenn man die Dreiecke über den Seiten von $A\,B\,C$ alle nach innen errichtet. Im Hinblick auf die angegebenen Eigenschaften kann man die Punkte V und V' die (λ, μ, ν)-„Visirpunkte" oder „(Minimal-)Distanzpunkte" des Dreiecks nennen.

Es sei noch bemerkt, dass Punkt V auf dem Kreise liegt, welcher durch die Spiegelpunkte V_1, V_2, V_3 von V in Bezug auf die Dreiecksseiten geht (dessen Centrum der „Gegenpunkt" von V ist, also nach obigem der (λ, μ, ν)-Isomorphopol).

§ 19. Für die Isogonalcentrik ist wegen seiner grossen Allgemeinheit der Satz von Wichtigkeit, dass die $(\lambda\,\mu\,\nu)$-Minimaldistanz in Bezug auf ein Fusspunktsdreieck $X\,Y\,Z$ constant ist, wenn das Orthogonalcentrum sich auf Kreisen um den $(\lambda\,\mu\,\nu)$-Isomorphopol bewegt.

§ 20. Im Anschluss an obige Ausführungen ergeben sich leicht (aus ähnlichen Dreiecken) die Formeln für die Abstände der (λ, μ, ν)-Isomorphole von den Ecken, nemlich:

$$A\,P = \frac{b\,c \cdot \sin\lambda}{D}; \quad B\,P = \frac{a\,c \cdot \sin\mu}{D}; \quad C\,P = \frac{a\,b \cdot \sin\nu}{D}$$

wo $D = \sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu\,\{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4\,J\}}$.

Alsbald erkennt man, dass das Doppel-Verhältniss

$$\frac{BP}{CP}:\frac{BA}{CA}=\frac{c\cdot\sin\mu}{b\cdot\sin\nu}:\frac{c}{b}=\frac{\sin\mu}{\sin\nu}$$

nur von μ und ν abhängt, wie es nach § 1 sein muss. Auch sieht man leicht, dass in diesen Formeln eine geschlossene Lösung des Pothenot'schen Problems enthalten ist.

Weiter zeigt sich, dass man bei cyklischer Vertauschung für den (λ, ν, μ)-Isomorphol P' die Formeln erhält:

$$AP'=\frac{bc\cdot\sin\lambda}{\sqrt{\sin\lambda\cdot\sin\mu\cdot\sin\nu\cdot\{a^2\cdot\operatorname{ctg}\lambda+b^2\cdot\operatorname{ctg}\nu+c^2\cdot\operatorname{ctg}\mu+4J\}}}$$

u. s. w., und für die Antiisomorphole (mit negativem Zeichen vor $4J$):

$$AQ=\frac{bc\cdot\sin\lambda}{\sqrt{\sin\lambda\cdot\sin\mu\cdot\sin\nu\cdot\{a^2\cdot\operatorname{ctg}\lambda+b^2\cdot\operatorname{ctg}\mu+c^2\cdot\operatorname{ctg}\nu-4J\}}}$$

u. s. w.

§ 21. Wir haben im obigen gesehen, dass jeder Punkt in der Ebene eines Dreiecks, betrachtet als (λ, μ, ν)-Isomorphopol, invariant ist. Es wird sich verlohnen, die wichtigsten der merkwürdigen Punkte eines Dreiecks unter diesem Gesichtspunkt Revue passiren zu lassen.

Sind zunächst alle drei Winkel λ, μ und ν einander gleich, also je $=\frac{\pi}{3}$, so wird das Fusspunktsdreieck XYZ gleichseitig. Leicht erkennt man, dass alsdann die zwölf Punkte sich auf zwei (reciproke) Punkte J und J' reduciren, die sogenannten äquianharmonischen Punkte (oder, da sie gleichseitige Fusspunktsdreiecke geben, die „Aequilateralpole"). Sie liegen harmonisch zum Schwerpol und Umkreiscentrum; Kreise um sie sind die Träger von Isogonalcentren, für welche die „Minimaldistanz" d_f, resp. d'_f, im Fusspunktsdreieck constant ist (vgl. Grundlagen, §§ 21, 73, 74, 135).

§ 22. Ebenso sieht man leicht, dass die drei Transversalpole T, T' und T'' eines Dreiecks invariant sind. Dieselben liegen auf der Peripherie des Umkreises; ihre Fusspunkte

liegen demnach auf einer geraden Linie („Wallace-Linie", früher fälschlich „Simson-Linie" genannt; vgl. Cantor, Geschichte der Mathematik III, 522 f.). Da ferner für Punkt T

$$BT:CT = AB:AC$$

ist, so ist offenbar $XY = XZ$. Das Dreieck XYZ bekommt also in dieser Grenzform die Winkel 0, 0, 180°, und das Seitenverhältniss 1 : 1 : 2; all dies bleibt invariant.

Die Transversalpole sind, wie schon in § 3 angedeutet, die vierten harmonischen Punkte zu den Ecken des Dreiecks, und müssen ja als solche natürlich invariante Eigenschaft haben.

§ 23. Es sei des weitern angedeutet, dass merkwürdige Dreieckspunkte invarianter Natur ferner bei den Figuren zum Vorschein kommen, welche sich aus der stereographischen Projection des Oktaëders und Ikosaëders ergeben (vgl. z. B. Möbius, Theorie der symmetrischen Figuren, Ges. Werke Band II, Klein, Vorlesungen über das Ikosaëder — die Figur am Ende —, oder Forsyth, Theory of Functions, p. 570 und 572). Man hat in beiden Figuren Kreisbogen und gerade Linien, die sich unter bekannten Winkeln $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5} \text{ etc.}\right)$ schneiden. Nimmt man zu drei bestimmten Punkten einer solchen Figur einen vierten Punkt derselben Figur hinzu, so zeigt sich (bei geeigneter Lage), dass der vierte Punkt auf Kreisbogen über den Seiten des zum Ausgang genommenen Dreiecks liegt. Das Fusspunktsdreieck des 4. Punktes in Bezug auf die drei ersten wird alsdann bestimmte Winkel haben $\left(\text{z. B. } \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, so dass also der vierte Punkt ein bestimmter Isomorphopol dreier anderer ist und so das ganze System invariant bleibt.

§ 24. In den vorhergehenden Beispielen haben wir stets Punkte gehabt, die in beiden Dreiecken, dem Dreieck ABC der z-Ebene und dem Dreieck $A'B'C'$ der ζ-Ebene, gleich definiert waren. So werden die „Aequilateralpole" des ersten

Dreiecks wieder „Aequilateralpole" des zweiten, die „Transversalpole" des ersten wieder „Transversalpole" des zweiten u. s. w. Man kann Punkte dieser Art, welche absolute, von den Elementen des Urdreiecks unabhängige Coordinaten λ, μ, ν haben, Punkte primärer Invarianz nennen.

Anders steht es mit einer Gruppe anderer merkwürdiger Punkte des Dreiecks. So wird z. B. das Umkreiscentrum O des Dreiecks $A B C$ keineswegs in das Umkreiscentrum des Dreiecks $A' B' C'$ transformirt, ist also in dieser Eigenschaft nicht invariant. Das Umkreiscentrum ist aber auch Orthogonalcentrum eines Fusspunktsdreiecks, dessen Winkel α, β, γ, d. h. die Winkel des Urdreiecks selbst sind. Nach § 21, resp. § 11, muss der Punkt O, als (α, β, γ)-Isomorphopol von $A B C$ betrachtet, invariant sein, d. h. der entsprechende Punkt O' muss in seinem Fusspunktsdreieck auf $A' B' C'$ auch die Winkel α, β, γ des ersten Dreiecks haben.

Hier hängen also die Coordinaten der Punkte O und O' von den Elementen des Urdreiecks ab; das Umkreis-Centrum ist nicht als solches invariant, sondern nur in einer Eigenschaft von secundärer Bedeutung. Wir werden solche Punkte als Punkte secundärer Invarianz bezeichnen.

§ 25. Im Anschluss an die Betrachtungen des vorigen Paragraphen können wir nun auch leicht den unendlich fernen Punkt der z-Ebene in der ζ-Ebene entsprechend darstellen. Als reciproker Punkt des Umkreiscentrums wird der unendlich ferne Punkt im Fusspunktsdreieck auch die Winkel α, β, γ haben; in der ζ-Ebene wird ihm also der reciproke Punkt zu O' (der Antiisomorphopol von O') entsprechen.

§ 26. Aehnliches wie vom Umkreis-Centrum und vom unendlich fernen Punkt gilt von den Brocard'schen Punkten des Dreiecks, oder den „Paraklinenpunkten", wie ich früher sie zu nennen versucht war (weil sie durch Kreise construiert werden, die sich an die Dreiecksseiten anlehnen). Die Fusspunktsdreiecke der zwei Brocard'schen Punkte (die bekanntlich „Gegenpunkte" sind), sind auch dem Urdreieck $A B C$

ähnlich, doch so, dass nun für den einen der zwei Punkte der Winkel β, für den andern der Winkel γ an die erste Seite BC des Urdreiecks zu liegen kommt (während im Fusspunktsdreieck von O der erste Winkel an der ersten Seite liegt). Auch im transformierten Dreieck haben also die entsprechenden Punkte die Winkel α, β, γ (in bestimmter Reihenfolge) im Fusspunktsdreieck; aber natürlich sind die neuen Punkte nun nicht auch die „Paraklinenpunkte" des neuen Dreiecks: dazu müssten die Fusspunktsdreiecke die Winkel α', β', γ' des transformierten Dreiecks haben.

Es mag hier noch erwähnt werden, dass auch die höheren Fusspunktsdreiecke der Brocard'schen Punkte (wenn also von ihnen aus neue Senkrechte auf die Seiten des ersten Fusspunktsdreiecks, dann auf die Seiten des so entstandenen secundären, tertiären etc. Fusspunktsdreiecks gefällt werden) sammt und sonders in infinitum einander ähnlich sind und die Winkel des Urdreiecks α, β, γ enthalten.

§ 27. Nur von secundärer Invarianz ist weiter ein anderer, höchst merkwürdiger Punkt des Dreiecks, der sog. Grebe'sche oder Lemoine'sche Punkt, Q (vgl. oben § 6). Er ist der Gegenpunkt des Schwerpunkts, der Pol der Pascal-schen Geraden des Dreiecks, das Centrum von Kreisscharen, die constante Summe der Seitenquadrate im Fusspunktsdreieck haben u. s. w.; sein eigenes Fusspunktsdreieck hat zu Winkeln die drei Transversalenwinkel des Urdreiecks τ_1, τ_2, τ_3. Letztere Eigenschaft hat natürlich (neben den andern zehn Isomorphopolen) auch der reciproke Punkt zu Q, der nichts anderes ist als der Fusspunkt des vom Umkreiscentrum auf die Pascal'sche Gerade gefällten Perpendikels. Dieser Punkt ist also nur secundär invariant, nemlich als (τ_1, τ_2, τ_3)-Isomorphopol des Dreiecks ABC.

§ 28. Wenn wir nun unsere Blicke auf das Viereck, oder auch auf höhere Polygone werfen, so lassen sich natürlich auf der Stelle gleich eine Menge invarianter Punkte angeben. Die

Kreise über den Partialdreiecken ABC, ACD, ABD, BCD sind ja invariant, also auch Kreise, die diese halbieren, trisecieren, überhaupt mit ihnen gleiche Winkel bilden; solche Kreise werden sich dann auch wieder in invarianten Punkten schneiden. Oder man construiere beliebige entsprechende Punktternionen in der z- und ζ-Ebene: die Kreise, die hierdurch bestimmt werden, schneiden sich in neuen invarianten Punkten u. s. w. Dadurch erhält man nun freilich nur Punkte, die zunächst keine weiteren interessanten Eigenschaften aufweisen, insbesondere sich nicht mit bereits bekannten und wichtigen merkwürdigen Punkten des Vierecks (oder Vierseits — die Scheidung ist für unsere Zwecke kaum von Wichtigkeit) decken. Die Theorie der letzteren ist freilich noch ziemlich vernachlässigt; doch dürften als einige der merkwürdigsten Punkte des Vierecks die in den folgenden Paragraphen zur Beschreibung kommenden bezeichnet werden.

§ 29. Die vier Seiten eines Vierseits bestimmen vier Dreiecke, deren Umkreise sich in einem Punkte schneiden; dieser ist der Brennpunkt der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel. Ich nenne ihn deshalb die E s c h a r a des Vierseits (altgriechisch ἐσχάρα 'Herd'; in neugriechischen mathematischen Schriften ist ἐσχάριον = focus, Brennpunkt).

Der Punkt ist für die Isogonalcentrik von grossem Interesse, da seine Fusspunkte in Bezug auf die vier Seiten in gerader Linie liegen, der Flächeninhalt seines Fusspunktsvierecks also gleich Null ist.

Vier Punkte bestimmen sechs Gerade, die in drei Doppelpaaren angeordnet werden können; jedes Doppelpaar hat seine eigene Eschara: wir bekommen also ein „E s c h a r e n d r e i e c k", dessen Seiten sich sehr einfach aus gewissen Elementen des Vierecks bestimmen lassen.

§ 30. Um einen dieser Punkte P auf die Eigenschaft der Invarianz zu prüfen, berechne man seine Abstände von den Ecken A, B, C und D. Man findet, wenn a, b, c, d die Seiten, e und f die Diagonalen bezeichnen (vgl. Fig. 3):

$$AP = \frac{a\,d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2}} = \frac{a\,d}{2\,t};$$

$$BP = \frac{ab}{2\,t};\ CP = \frac{b\,c}{2\,t};\ DP = \frac{c\,d}{2\,t}.$$

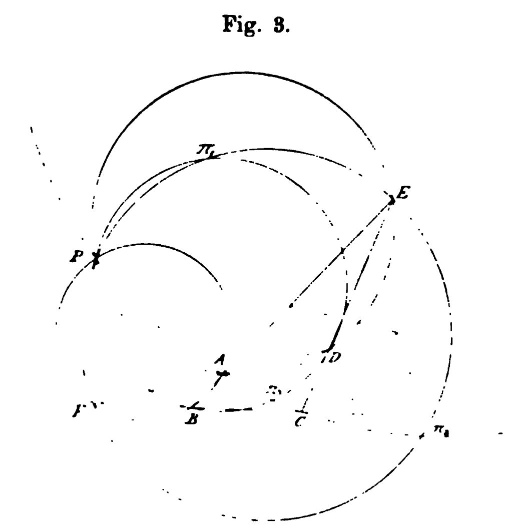
So ergibt sich für das Doppelverhältniss die Formel:

$$\frac{BP}{AP} : \frac{BC}{AC} = \frac{b}{d} : \frac{b}{e} = \frac{e}{d}.$$

Da nun offenbar $e:d$ nicht invariant ist, so ist es auch das genannte Doppelverhältniss nicht, womit die Eschara als nicht invarianter Punkt erwiesen ist.

§ 31. Nebst den Escharen verdient eine Gruppe weiterer merkwürdiger Punkte unser Interesse, die meines Wissens die Aufmerksamkeit der Geometer noch nicht auf sich gezogen haben. Man kann die Aufgabe stellen, bei gegebenem Viereck

Fig. 3.



einen Punkt zu suchen, so dass dessen Fusspunktsviereck ein Parallelogramm ist. Die Lösung ist folgende:

Construiere zu dem gegebenen Viereck $A\,B\,C\,D$ (Fig. 3) die Eschara P (Schnitt der Kreise $A\,B\,F$, $A\,D\,E$, $C\,D\,F$, $B\,C\,E$);

dann beschreibe die Kreise ACP, BDP und EFP; sie schneiden sich ausser in P noch in drei Punkten Π_1, Π_2, Π_3, die die verlangte Eigenschaft haben (in Figur 3 ist das zu Π_2 gehörige Fusspunktsparallelogramm angedeutet). Diese Construction lässt sich noch zwei Mal cyklisch permutieren (indem man statt AC und BD nunmehr AB und CD, resp. AD und BC als Diagonalen des Vierecks fasst), so dass man zusammen neun solcher Punkte erhält.

§ 32. Die Aufgabe, ein Fusspunktsparallelogramm zu construieren, ist nur ein specieller Fall einer allgemeineren. Euler ist es schon gewesen, der am Viereck die Verbindungslinie der Diagonalenmitten, $MN = t$, ins Auge gefasst hat. Bekanntlich hat er bewiesen, dass sie sich sehr einfach in den Seiten und Diagonalen des Vierecks ausdrücken lässt, nemlich:

$$t^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2).$$

Aehnliches gilt von den Verbindungslinien t' und t'' der Mitten von AB und CD, resp. AD und BC. Man thut wohl am besten, den Namen Medianen, den besonders französische Geometer bevorzugen, für die bezeichneten Verbindungslinien anzunehmen.

Die Aufgabe ist nun, den geometrischen Ort des Isogonalcentrums P anzugeben, wenn eine bestimmte Mediane im Fusspunktsdreieck constant sein soll. Es zeigt sich, dass Kreise um die Punkte Π diese geometrischen Oerter darstellen, und so bezeichnen wir diese Punkte Π am besten als Medianenpole.

§ 33. Für die Entfernung des Punktes Π_3 von A, B, C, D gelten die Formeln:

$$A\Pi_3 = \frac{e \cdot \sin\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin^2\delta - \sin^2\varepsilon - \sin^2\zeta}} = \frac{e \cdot \sin\gamma}{\sigma};$$

$$B\Pi_3 = \frac{f \cdot \sin\delta}{\sigma}; \quad C\Pi_3 = \frac{e \cdot \sin\alpha}{\sigma}; \quad D\Pi_3 = \frac{f \cdot \sin\beta}{\sigma}.$$

Wenn man die entsprechenden Doppelverhältnisse bildet, wie in § 30, so findet man, dass auch die „Medianenpole" nicht invariant sind.

§ 34. Man kann Punkt Π_3 auch noch durch Specialisierung eines hübschen Satzes vom Sechseck finden. Die [illegible] Escharen eines Pentagramms liegen bekanntlich nach [illegible] Satz von Miquel auf einem Kreis, der „Pentaphorie“, [illegible] die sechs Pentaphorieen eines Hexagramms schneiden sich [illegible] einem Punkt, der „Hexeschara“. Der Medianenpol Π_3 [illegible] nun die Hexeschara eines Hexagramms, das von den vier Seiten und zwei Diagonalen eines Tetragramms gebildet wird.

§ 35. Interessante Punkte entstehen ferner am vollständigen Vierseit, wenn man über den drei Diagonalen AC, BD, EF als Durchmessern Kreise beschreibt. Diese schneiden sich bekanntlich in zwei Punkten, die auf der Steiner'schen Höhengeraden liegen, den sogenannten „cyklischen Punkten“ Z und Z' des Vierecks.

§ 36. Invariant sind aber auch diese Punkte nicht. Denn Kreis AZC über der Diagonale AC des Vierecks AB [illegible] schneidet diese Diagonale unter rechten Winkeln; die Diagonale AC geht aber bei der Transformation nicht wieder in die Diagonale $A'C'$ über, sondern in einen beliebigen [illegible] $A'QC'$ durch $A'C'$; der Kreis über $A'C'$ als Durchmesser [illegible] [illegible] Punkte des [illegible]-Vierecks liegen [illegible] [illegible] dem Orthogonalkreis [illegible] [illegible] Kreis AZC der [illegible]-Ebene entspricht.

§ 37. [illegible] Punktepaar mag noch erwähnt werden [illegible] in der [illegible] eine Rolle spielt [illegible] „Triorth[illegible]“. Es ist [illegible] [illegible] Vierseit [illegible] Mi[illegible] [illegible] [illegible] Wenn [illegible] M [illegible] BC, AC, AB [illegible] [illegible] [illegible]

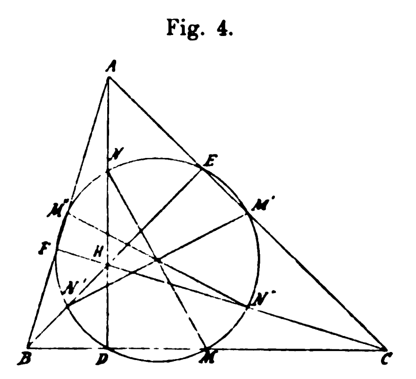
[illegible] M [illegible] $M N = M N$ [illegible]

[illegible]

BH [illegible] CH [illegible] AB [illegible]

Wenn man nun verlangt, dass bei gegebenem Viereck ein Fusspunktsviereck gefunden werde, so dass die drei Medianen gleich seien (oder alle drei Diagonalenwinkel rechte seien), so sind die genannten Punkte die Orthogonalcentren. Sie sind die Schnittpunkte von Orthogonalkreisen, die je durch die Enden einer Diagonale zu den „Escharenkreisen" APC, BPD, EPF gezogen werden können. Eine ähnliche Ueberlegung wie in § 36 ergibt, dass auch diese Punkte nicht invariant sind.

Fig. 4.



§ 38. Zur Auffindung wirklich invarianter Punkte am Viereck (und wohl auch an höheren Figuren) kann man sich aber des folgenden einfachen Princips mit Nutzen bedienen.

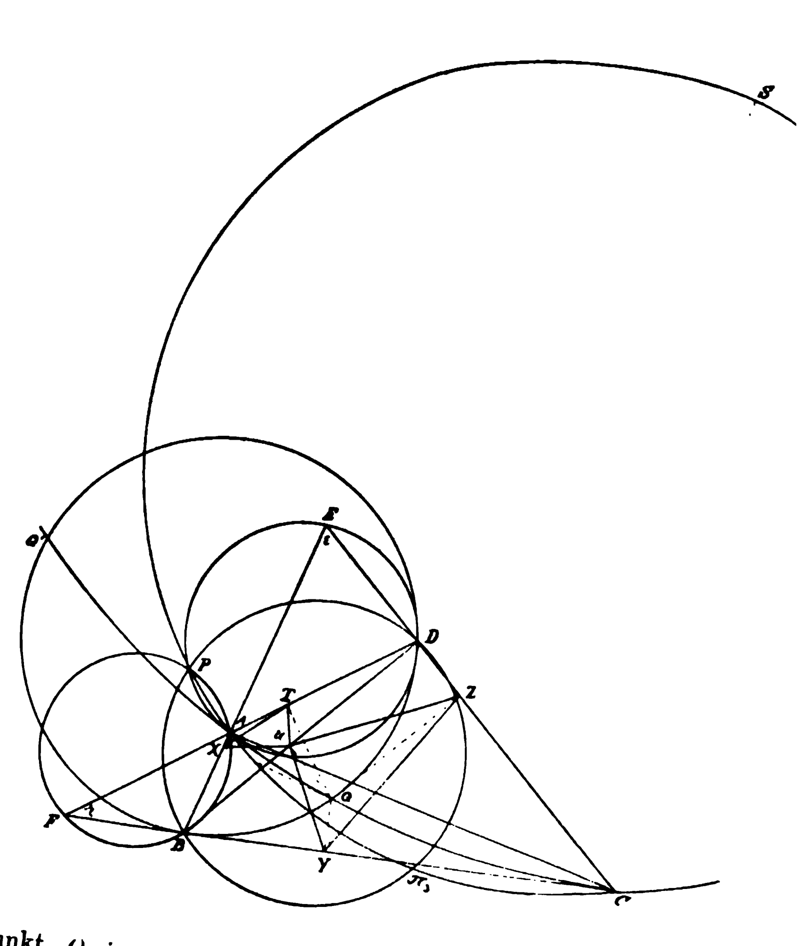
Wenn die Fusspunktsdreiecke XYZ und $X_1\,Y_1\,Z_1$ eines Punktes P in Bezug auf zwei beliebige Dreiecke, etwa ABC und $A_1\,B_1\,C_1$, ähnlich sind, so heisst das in der complexen Ebene nach § 1, dass die Doppelverhältnisse $(P\,A\,B\,C)$ und $(P\,A_1\,B_1\,C_1)$ gleich sind. Offenbar ist dadurch Punkt P bestimmt (endlich vieldeutig)[1], und zwar als primär invarianter Punkt.

§ 39. Auf das Viereck lässt sich nun dieses Princip z. B. auf folgende Weise anwenden.

[1]) Die Bestimmung des Punktes führt auf interessante Curven, die nach den obigen Ausführungen für die Invariantentheorie von grosser Wichtigkeit sein müssen.

Fällt man von einem Punkte Q (Fig. 5) die Senk[rechten] auf die vier Seiten und eine Diagonale des Vierecks,

Fig. 5.



Punkt Q invariant sein, wenn $\triangle\, XUT \sim YUZ$, und es handelt sich nur darum, einen Punkt mit dieser Eigenschaft zu construieren. Es sei nun $\sphericalangle\, XUT = \sphericalangle\, YUZ$, so folgt

$$A B Q + A D Q = B Q D - \gamma,$$

oder $$4 R - \alpha - B Q D = B Q D - \gamma, \quad \text{also}$$

(1) $$B Q D = 2 R - \frac{\alpha - \gamma}{2} = 2 R - \frac{\varepsilon + \zeta}{2}.$$

Es sei weiter $\sphericalangle X T U = \sphericalangle U Y Z$, also

$$A Q D - A B D = B Q C - B D C,$$

$$B Q C - A Q D = B D C - A B D = \varepsilon,$$

oder links $A Q B$ addiert und subtrahiert:

$$4 R - A Q C - B Q D = \varepsilon;$$

aber $$B Q D = 2 R - \frac{\alpha - \gamma}{2}, \quad \text{also}$$

(2) $$A Q C = 2 R - \frac{\delta - \beta}{2} = 2 R - \frac{\varepsilon - \zeta}{2}.$$

Die Schnittpunkte der beiden Kreise $A Q C$ und $B Q D$ müssen also nach obigem invariante Punkte sein.

§ 40. Es lässt sich nun zunächst leicht zeigen, dass der Kreis $A C Q$ den Winkel der Kreise $A B C$ und $A C D$, sowie der Kreis $B D Q$ den Winkel der Kreise $A B D$ und $B C D$ halbiert. Dies gibt eine sehr einfache Construction der gefundenen invarianten Punkte, die wir fortan Γ und Γ' nennen wollen. Auch sieht man hier unmittelbar, dass wir es mit invarianten Punkten zu thun haben; denn es kommt ja den Kreisen $A B C$ und $A C D$, sowie $A B D$ und $B C D$ die Eigenschaft der Invarianz zu, also auch den respectiven Halbierungskreisen und deren Schnittpunkten.

§ 41. Bekanntlich haben die Punkte Γ und Γ' die Eigenschaft, dass sie zu dem Punktepaar $A C$, sowie zu dem Paar $B D$ im Sinn der complexen Ebene harmonisch liegen (Γ ist Transversalpol zu $A C \Gamma'$ und $B D \Gamma'$, Γ' Transversalpol zu $A C \Gamma$ und $B D \Gamma$).

Man kann die Punkte deshalb die **autoharmonischen**, oder vielleicht auch schlechtweg die **harmonischen** Punkte des Vierecks nennen.

§ 42. Nach den Angaben der §§ 31 und 39 ist es auch leicht, die Lage der Punkte Γ und Γ' gegen die Eschara und den Medianenpol zu bestimmen. Der Winkel, den der Kreis $P A \Pi_2 C$ (wo P die Eschara, Π_2 Medianenpol) über $A C$ fasst, ist offenbar $= \varepsilon - \zeta$, respective $2R - (\varepsilon - \zeta)$: allein der Kreisbogen $A \Gamma C$ fasst nach § 39 den Winkel $2R - \frac{\varepsilon - \zeta}{2}$, folglich liegt sein Mittelpunkt S im Zenith des Bogens $A C$ gegenüber Π_2, und der Kreis $A \Gamma C$ halbiert den Winkel der Geraden $A C$ und des Kreisbogens $A \Pi_2 C$.

§ 43. Die Isogonalcentrik lehrt, dass für Kreise über den Diagonalen eines Vierecks die Diagonalenwinkel des Fusspunktsvierecks constant sind: so haben die Fusspunktsvierecke aller Punkte auf dem Kreise $A \Gamma C$ einen der Diagonalenwinkel constant $= \frac{1}{2}(\delta - \beta) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \zeta)$; ähnlich auf Kreis $B \Gamma D$

$$\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \frac{1}{2}(\varepsilon + \zeta).$$

Zwei der Diagonalenwinkel des Fusspunktsvierecks der autoharmonischen Punkte sind also bezüglich $= \frac{1}{2}(\varepsilon - \zeta)$ und $\frac{1}{2}(\varepsilon + \zeta)$. Es sei noch bemerkt, dass man selbstverständlich durch cyklische Permutation im ganzen sechs solche Punkte Γ erhält. Diese sechs Punkte repräsentieren bekanntlich die Covariante T (Functionaldeterminante der Grundform und ihrer Hesse'schen Covariante) der biquadratischen Form $(A B C D)$.

§ 44. Auch für das Fünfeck lassen sich nach dem angegebenen Princip bemerkenswerte invariante Punkte construieren. Es sei nemlich (Fig. 6) $A B C D E$ ein beliebiges Fünfeck, und es sei nun P ein solcher Punkt, dass das Doppelverhältniss $(P A E D) = (P B E C)$ sei: diese Eigenschaft würde dem Punkt P offenbar die Eigenschaft der Invarianz geben. Nach unseren Ausführungen müssen dann die Fusspunktsdreiecke des Punktes P in Bezug auf die Dreiecke $A D E$ und $B E C$, nemlich $F_1 F_2 F_3$ und $G_1 G_2 G_3$, einander ähnlich sein. Wenn nun $\sphericalangle F_2 F_1 F_3 = G_2 G_1 G_3$ ist, so folgt nach den Sätzen der Angularcentrik:

$$A P E - A D E = B P E + B C E,$$

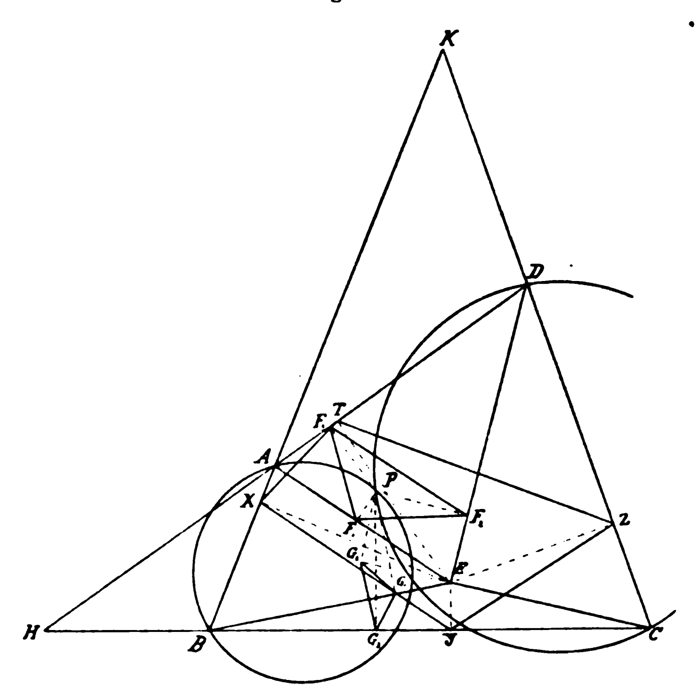
also $$A P E - B P E = A D E + B C E,$$

oder $$A P B = A D E + B C E = C E D - C H D,$$

also, wenn man das Fusspunktsviereck $X Y Z T$ des Punktes E in Bezug auf $A B C D$ construiert,

(1) $$\sphericalangle A P B = \sphericalangle Y Z T.$$

Fig. 6.



Letzterer Winkel ist natürlich bei gegebener Lage der Punkte A, B, C, D, E bekannt, und somit wird P einmal auf einem leicht zu construierenden Kreisbogen über $A B$ liegen.

Wenn ferner $\sphericalangle F_1 F_2 F_3 = \sphericalangle G_1 G_2 G_3$ sein soll, so ist in ähnlicher Weise:

$$E\,P\,D - E\,A\,D = E\,P\,C + E\,B\,C,$$

also $$E\,P\,D - E\,P\,C = E\,A\,D + E\,B\,C,$$ oder

(2) $$C\,P\,D = A\,H\,B + A\,E\,B = Y\,X\,T;$$

also liegt P auch auf einem Kreisbogen über $C\,D$, der den bekannten Winkel $Y\,X\,T$ fasst. Die Kreise $A\,P\,B$ und $C\,P\,D$ werden sich natürlich noch in einem weitern Punkte P' schneiden. Die Construction der Kreise $A\,P\,B$, resp. $C\,P\,D$, geht wohl am leichtesten so vor sich, dass man durch A eine Parallele mit $T\,Z$, durch B mit $Y\,Z$ zieht; der Schnittpunkt der beiden wird, neben A und B, einen dritten Punkt des Kreises $A\,P\,B$ bilden. Analog natürlich für Kreis $C\,P\,D$.

Diese Construction wird sich ferner ebensowohl auf das Seitenpaar $B\,C$ und $A\,D$ des Vierecks $A\,B\,C\,D$, wie für $A\,B$ und $C\,D$, anwenden lassen: so dass man also über $A\,D$ einen Kreis mit $\sphericalangle\, X\,Y\,Z$, und über $B\,C$ einen Kreis mit $\sphericalangle\, X\,T\,Z$ zu beschreiben hat, um zwei weitere invariante Punkte P'' und P''' zu erhalten, u. s. w.

Alle obigen Constructionen werden sich in cyklischer Folge fünfmal machen lassen, indem man statt E der Reihe nach die andern Punkte A, B, C, D vor den übrigen auszeichnet.

§ 45. Punkt E hatte im vorigen Paragraphen eine beliebige Lage gegen die vier übrigen Punkte A, B, C, D des Fünfecks. Man wird die Lage so specialisiren können, dass Punkt E mit einem der invarianten Punkte P, P', P'', P''' zusammenfalle. Offenbar ist dann ein solcher Punkt ein invarianter Punkt des Vierecks $A\,B\,C\,D$, und es erhebt sich die Frage, was für ein merkwürdiger Punkt des Vierecks $A\,B\,C\,D$ alsdann E sein wird.

Es muss für den Zusammenfall von E und P natürlich

(1) $\sphericalangle\, A\,P\,B = A\,E\,B$, und (2) $C\,P\,D = C\,E\,D$ sein.

Aus der ersten Bedingung ergibt sich, da $A\,P\,B = T\,Z\,Y$ sein soll, die Gleichung:

$$\sphericalangle\, A\,E\,B = T\,Z\,Y = C\,E\,D - C\,H\,D = C\,E\,D - \zeta;$$

aus der zweiten $CED = TXY = AEB + \zeta$, eine Gleichung, die mit der vorigen identisch ist. Die Aufgabe ist also unbestimmt, und man wird noch die Forderung hinzustellen können, dass etwa auch P'' mit E zusammenfalle. Dann muss auch

$$AED = XYZ = BEC - BKC = BEC - \varepsilon;$$

verknüpft man dies mit obiger Gleichung

$$AEB = CED - \zeta,$$

so bekommt man

$$BED = 4R - BED - (\varepsilon + \zeta), \text{ also}$$

$$BED = 2R - \frac{\varepsilon + \zeta}{2}. \tag{1}$$

Weiter muss bei dem Zusammenfall von E und P'' auch sein:

$$\sphericalangle BEC = XTZ = AED + \varepsilon;$$

dazu nehme man abermals die Gleichung:

$$AEB = CED - \zeta,$$

und man erhält durch Addition:

$$4R - AEC = AEC + \varepsilon - \zeta, \text{ oder}$$

$$AEC = 2R - \frac{\varepsilon - \zeta}{2}. \tag{2}$$

Wir gelangen also auf diesem Wege abermals zu den „autoharmonischen Punkten" als invarianten Punkten: E ist dann ein Punkt der Covariante T, welche zu der biquadratischen Form $(ABCD)$ gehört (vgl. oben § 43).

Soll ein Punkt einer binären Form fünfter Ordnung zur Covariante T der übrigen vier Punkte gehören, so muss nach Clebsch[1]) die schiefe Invariante R der Form fünfter Ordnung verschwinden. Wenn umgekehrt $R = 0$ ist, so tritt entweder der genannte Fall ein, oder der Punkt E gehört einem von drei Quadrupeln an, die aus einer gewissen cubischen Gleichung bestimmt werden.

[1]) Vgl. Clebsch a. a. O., p. 354 f.

Der aufmerksame Leser wird bereits gesehen haben, dass die vorangehenden Paragraphen auf Schritt und Tritt zu weiterer Ausgestaltung drängen und zu neuen Problemen führen. Für jetzt habe ich nur die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf den Satz des § 1 lenken, und zugleich einige sich leicht ergebende Illustrationen und Anwendungen desselben geben wollen. Auf genauere Determinationen, auf analytische Untersuchungen u. s. w., musste ich gegenwärtig verzichten: ich möchte auch lieber zuerst gewisse hieher gehörige Teile der Isogonalcentrik — namentlich die Isomorphopolcentrik — in eigenen Artikeln ausführen und begründen.

Zum Schlusse dieser Ausführungen aber möchte ich noch ein wärmstes Wort des Dankes an einen hochverehrten Freund entrichten, und auf seinen massgebenden Einfluss auf ihr Zustandekommen hinweisen. Der Grundgedanke dieser Paragraphen ist aus den Vorlesungen von Herrn Prof. Dr. Lindemann über Invarianten- und Functionentheorie herausgewachsen; auch manches Detail geht auf diese Vorlesungen zurück.

Ueber die Reducirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen.

Von **Eduard von Weber.**

(Eingelaufen 7. Juli.)

1. Eines der zunächst sich darbietenden und wichtigsten Probleme in der allgemeinen Theorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen ist die Beantwortung der Frage: Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein gegebenes System von $n-m$ Pfaff'schen Gleichungen in n Variabeln:

$$(1) \qquad d x_{m+h} = \sum_1^m {}^s\, a_{sh}(x_1, \ldots x_n)\, d x_s \quad (h = 1, 2, \ldots n-m)$$

sich auf eine Form mit nur τ Differentialelementen:

$$(2) \qquad \sum_1^\tau {}^s\, F_{sh}\, d f_s = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots n-m)$$

bringen lässt, wo $f_1, f_2, \ldots f_\tau$ unabhängige Funktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ bedeuten, und unter τ eine Zahl verstanden wird, die nicht kleiner als $n-m$ und nicht grösser als $n-2$ ist?

Wir wollen die Beantwortung dieser Frage „das Problem A" nennen.

Die Annahme $\tau = n-1$ führt auf eine triviale Aufgabe, die Annahme $\tau = n-m$ auf den Fall, dass das System (1) unbeschränkt integrabel ist; dazu ist bekanntlich notwendig und hinreichend, dass man identisch habe:

$$a_{iks} \equiv 0 \quad (i, k = 1 \ldots m;\ s = 1 \ldots n - m),$$

wenn gesetzt wird:

$$A_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-m} {}^{\lambda}\, a_{i\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_{m+\lambda}}; \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

$$a_{iks} \equiv - a_{kis} \equiv A_i a_{ks} - A_k a_{is},$$

oder, für die unaufgelöste Form des Systems (1):

$$\sum_1^{n} {}^{k}\, \xi_{ik}\, dx_k = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n - m),$$

dass die alternirenden bilinearen Gleichungen:

$$\sum_1^{n} {}^{k} \sum_1^{n} {}^{l} \left(\frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial \xi_{il}}{\partial x_k} \right) dx_k\, \delta x_l = 0$$

vermöge der Relationen:

$$\sum_1^{n} {}^{k}\, \xi_{ik}\, dx_k = \sum_1^{n} {}^{k}\, \xi_{ik}\, \delta x_k = 0 \quad (i = 1 \ldots n - m)$$

identisch stattfinden.

2. Es gilt zunächst der Satz: Damit sich das System (1) in der Form (2) darstellen lasse, ist notwendig und hinreichend, dass in der alternirenden Matrix:

$$(3) \qquad \begin{array}{ccccccc}
0, & \sum^s \lambda_s a_{12s} & \ldots & \sum^s \lambda_s a_{1ms}, & A_1 f_1 & \ldots & A_1 f_\varrho \\
\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\sum^s \lambda_s a_{m1s}, & \sum^s \lambda_s a_{m2s} & \ldots\ldots & 0, & A_m f_1 & \ldots & A_m f_\varrho \\
A_1 f_1, & A_2 f_1 & \ldots & A_m f_1 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
A_1 f_\varrho, & A_2 f_\varrho & \ldots & A_m f_\varrho & 0, & \ldots & 0
\end{array}$$

alle $2\varrho + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten identisch, d. h. für jedes beliebige Werthsystem

$$c_1 \ldots c_n,\ \lambda_1 \ldots \lambda_{n-m}$$

verschwinden, wenn

$$\varrho = r - n + m$$

gesetzt wird.

In der That, aus unserer Annahme folgt, dass das Pfaff'sche System

$$(4) \qquad d x_{m+h} = \sum a_{ih}\, d x_i ; \quad d f_1 = 0, \ldots d f_\varrho = 0$$

unbeschränkt integrabel sein muss; dazu ist nach dem oben gesagten notwendig und hinreichend, dass die $n - m$ bilinearen Gleichungen:

$$(5) \qquad \sum_1^m {}^i \sum_1^m {}^k a_{iks}\, d x_i\, \delta x_k = 0 \quad (s = 1 \ldots n - m)$$

vermöge der Relationen (4) und der dazu congruenten, in den δx geschriebenen, d. h. also vermöge der Gleichungen:

$$(6) \qquad \sum_1^m A_i f_k\, d x_i = 0, \; \sum_1^m A_i f_k\, \delta x_i = 0 \quad (k = 1 \ldots \varrho)$$

identisch bestehen; dasselbe muss also auch für die Relation

$$\sum \sum \sum \lambda_s\, a_{iks}\, d x_i\, \delta x_k = 0$$

bei beliebigen Werten der λ stattfinden, und diese Bedingung findet bekanntlich[1]) ihren Ausdruck in dem Verschwinden aller $2\varrho + 2$-reihigen Determinanten in (3).

Umgekehrt, sind diese Bedingungen erfüllt, die Gleichungen (4) also unbeschränkt integrabel und $f_1, \ldots f_\varrho, f_{\varrho+1}, \ldots f_r$ ihre Integrale, so kann das System (1) augenscheinlich in der Form (2) geschrieben werden. Eine erste notwendige (aber, wie sich zeigen wird, keineswegs hinreichende) Bedingung für die Möglichkeit der Darstellung (2) ist also die, dass der Rang der Matrix

$$(7) \qquad \sum_1^{n-m} {}^s \lambda_s\, a_{iks} \quad (i, k = 1, \ldots m)$$

nicht grösser als 2ϱ sei.[2])

3. Die obigen Bedingungen können offenbar auch so formulirt werden:

---

[1]) Vgl. z. B. mein Buch: „Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem" Leipzig 1900, S. 308 ff.

[2]) Diese Bedingung wurde schon von H. Grassmann ausgesprochen; vgl. Herrn Engels Note in Grassmanns Werken Bd. I, Abt. 2, pag. 480.

Damit sich das Pfaff'sche System (1) auf eine Form mit nur τ Differentialelementen reduciren lasse, ist notwendig und hinreichend, dass

1) überhaupt wenigstens ein System von $\varrho = \tau - n + m$ congruenten Relationenpaaren

$$\xi_{1i}\, dx_1 + \ldots + \xi_{mi}\, dx_m = 0 \quad (i = 1 \ldots \varrho) \tag{8}$$

$$\xi_{1i}\, \delta x_1 + \ldots + \xi_{mi}\, \delta x_m = 0 \quad (i = 1 \ldots \varrho) \tag{9}$$

existire, vermöge dessen alle $n - m$ bilinearen Gleichungen (5) identisch erfüllt sind;

2) dass sich unter diesen Relationensystemen eines so auswählen lasse, dass die Gleichungen (1) (8) zusammen ein unbeschränkt integrables System bilden.

Bei der Lösung des Problems A handelt es sich natürlich darum, die Bedingungen für die Möglichkeit einer Darstellung (2) durch Gleichungen zwischen den Coefficienten a_{ik} des gegebenen Systems (1) allein auszudrücken, also die $f_1 \ldots f_\varrho$ aus den Bedingungen der vorigen Nr. zu eliminiren. Für die einfachsten Fälle $m = 3$ und $m = 4$ reicht dazu, wie wir sehen werden, der Satz dieser Nr. vollständig aus.

In allen Fällen erhält man aus der Forderung, dass in der Matrix (3) alle $2\varrho + 2$-reihigen Determinanten identisch verschwinden, in den Unbekannten $f_1 \ldots f_\varrho$ und den Independenten $x_1 \ldots x_n$ ein Differentialsystem 1. O., das auf seine Integrabilität hin zu untersuchen ist.

4. Statt dieses Differentialsystems wollen wir indes ein anderes betrachten, das für unsere Zwecke, insbesondere für die Behandlung des sogleich zu besprechenden „Problems B" besonders geeignet ist.

Aus der Darstellung (2) des Pfaff'schen Systems (1) folgt, dass die Relationen

$$f_1 = c_1,\ f_2 = c_2, \ldots f_\tau = c_\tau$$

für jedes Wertsystem der arbiträren Constanten c ein τ-gliedriges Integraläquivalent, also wenn wir die Ausdrucksweise der Geometrie in dem n-dimensionalen Punktraum $R_n\,(x_1 \ldots x_n)$ heran-

ziehen, eine „$n - \tau$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit," oder kurz eine „Integral-$M_{n-\tau}$" des Pfaff'schen Systems (1) darstellen. Durch jeden Punkt $x_1^0 \dots x_n^0$ geht eine und nur eine solche $M_{n-\tau}$ hindurch. Wird eine dieser $M_{n-\tau}$ durch die Relationen

$$(10) \qquad x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots u_\nu) \quad (i = 1 \dots n;\ \nu = n - \tau)$$

dargestellt, wo die u wesentliche unabhängige Parameter bedeuten, so genügen die x identisch den Differentialgleichungen

$$(11) \qquad \frac{\partial x_{m+h}}{\partial u_r} = \sum_1^m {}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (r = 1, \dots \nu;\ h = 1, \dots n - m)$$

und somit auch den folgenden:

$$(12) \qquad \sum_1^m {}^i \sum_1^m {}^k a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, \dots \nu;\ h = 1, 2, \dots n - m),$$

die sich durch Derivation von (11) nach $u_1 \dots u_\nu$ und Vergleichung der links auftretenden Ableitungen $\frac{\partial^2 x_{m+h}}{\partial u_r \partial u_s}$ ergeben. Wir wollen das System (11) (12) mit S_ν bezeichnen. Umgekehrt liefert jedes Integral (10) des Differentialsystems S_ν von der Eigenschaft, dass in der Matrix

$$(13) \qquad \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_r} & \frac{\partial x_2}{\partial u_r} & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_n}{\partial u_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| \quad (r = 1, \dots \nu)$$

nicht alle ν-reihigen Determinanten identisch verschwinden, eine Integral-$M_{n-\tau}$ von (1).

Ist ferner das Differentialsystem S_ν so beschaffen, dass durch jeden Punkt $x_1^0 \dots x_n^0$ eines gewissen n-dimensionalen (also nur durch Ungleichungen definirten) Gebietes des R_n wenigstens e i n e Integral-$M_{n-\tau}$ hindurchgeht, so lässt sich das Pfaff'sche System (1) in der Form (2) schreiben, und umgekehrt.

5. Aus der allgemeinen Theorie der Systeme partieller Differentialgleichungen [1]) ergeben sich jetzt nachstehende Resultate.

Fügt man zu dem System S_ν der Reihe nach diejenigen Gleichungen, die aus ihm durch wiederholte Derivation nach $u_1 \dots u_\nu$ hervorgehen, so gelangt man nach einer endlichen Anzahl solcher Derivationen entweder (durch Elimination der partiellen Ableitungen der x) zu Widersprüchen, ev. Relationen in den Variabeln x allein, oder zu einem Differentialsystem, das durch Auflösung nach gewissen partiellen Ableitungen der x in ein „canonisches, passives System“ Σ verwandelt werden kann. Als canonische Form [2]) kann man dabei immer eine solche wählen, die aus lauter Relationen der Form

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu} x_i}{\partial u_1^{\alpha_1}\,\partial u_2^{\alpha_2}\dots\partial u_\nu^{\alpha_\nu}} = \varphi_{i,\alpha_1\dots\alpha_\nu}\left(x_1,\dots x_n,\dots\frac{\partial^{\beta_1+\dots\beta_\nu} x_k}{\partial u_1^{\beta_1}\dots\partial u_\nu^{\beta_\nu}}\dots\right)$$

mit folgenden Eigenschaften besteht: Keine der links vorkommenden Ableitungen tritt auf einer der rechten Seiten auf; für jede in $\varphi_{i,\alpha_1\dots\alpha_\nu}$ vorkommende Ableitung $\frac{\partial^{\beta_1+\dots+\beta_\nu} x_k}{\partial u_1^{\beta_1}\dots\partial u_\nu^{\beta_\nu}}$ ist $\Sigma\beta < \Sigma\alpha$; gilt das Gleichheitszeichen, so ist $k < i$, und im Falle $k = i$ die erste nicht verschwindende der Differenzen $\beta_1 - \alpha_1$, $\beta_2 - \alpha_2 \dots$ positiv. Bezeichnet man mit Riquier die auf den linken Seiten der Gleichungen Σ vorkommenden partiellen Ableitungen und alle die unbegrenzt vielen, durch Derivation nach $u_1 \dots u_\nu$ daraus hervorgehenden Ableitungen als „principale“, die Variabeln $x_1 \dots x_n$ selbst und die noch übrigen partiellen Ableitungen der x als „parametrische“ Grössen des Systems Σ, so findet die Passivität des letzteren darin ihren Ausdruck, dass man vermöge der Gleichungen Σ und der daraus durch unbegrenzte Derivation folgenden Relationen jede principale Ableitung auf eine und nur eine Weise durch die parametrischen Grössen allein ausdrücken kann.

[1]) Vgl. C. Riquier, Ann. éc. norm 1893, p. 65, 123, 167; Par. sav. [étr.] 32; A. Tresse, Acta math. 18 p. 1 (1894) u. a.

[2]) Vgl. A. Tresse a. a. O.

Sind dann $u_1^0 \dots u_\nu^0$ beliebige Constante, so besitzt das Differentialsystem Σ — und infolgedessen auch das System S_ν — ein und nur ein System an der Stelle u^0 regulärer Integralfunktionen $x_1 \dots x_n$ von der Eigenschaft, dass sich die x und ihre sämtlichen parametrischen Ableitungen $\frac{\partial^{i+k+\dots+l} x_h}{\partial u_1^i \, \partial u_2^k \dots \partial u_\nu^l}$ vermöge der Gleichungen $u_1 = u_1^0 \dots u_\nu = u_\nu^0$ bezw. auf die willkürlich vorgeschriebenen „Anfangswerte"

$$x_1^0 \dots x_n^0, \dots \left(\frac{\partial^{i+k+\dots+l} x_h}{\partial u_1^i \, \partial u_2^k \dots \partial u_\nu^l}\right)_0 \dots$$

reduciren, vorausgesetzt, dass die rechten Seiten der Gleichungen Σ in der Umgebung dieser Anfangswerte regulär sind, und die n Potenzreihen

$$\sum \left(\frac{\partial^{i+k+\dots+l} x_h}{\partial u_1^i \dots \partial u_\nu^l}\right)_0 (u_1 - u_1^0)^i \dots (u_\nu - u_\nu^0)^l \ ^{1)}$$

einen gemeinsamen n-dimensionalen Convergenzbezirk besitzen.

Insbesondere besitzt also das System Σ wenigstens eine Integral-M_ν, die den willkürlich gewählten (nur durch Ungleichungen beschränkten) Punkt $x_1^0 \dots x_n^0$ enthält; hieraus und aus der vorigen Nr. folgt:

„Damit das Pfaff'sche System (1) sich in der Form (2) darstellen lasse, worin die τ Funktionen $f_1 \dots f_\tau$ von einander unabhängig sind, ist notwendig und hinreichend, dass aus den Relationen S_ν und den Gleichungen, die hieraus durch unbegrenzt wiederholte Derivation nach $u_1 \dots u_\nu$ hervorgehen, weder das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten der Matrix (13), noch eine Relation zwischen den Variabeln $x_1 \dots x_n$ allein folge. Ob diese Bedingungen erfüllt sind, oder nicht, lässt sich in jedem einzelnen Fall durch eine endliche Zahl von Differentiationen und Eliminationen entscheiden.

[1]) Die Summe erstreckt sich über alle parametrischen Ableitungen von x_h.

Bezeichnet man allgemein mit S_λ das System:

$$\frac{\partial x_{m+h}}{\partial u_r} = \sum_1^m {}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (r = 1 \,.\,.\, \lambda;\ h = 1 \,.\,.\, n - m)$$

$$\sum_1^m {}^i \sum_1^m {}^k a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, \,.\,.\, \lambda;\ h = 1, 2, \,.\,.\, n - m),$$

und besitzt S_ν die im vorigen Satze genannte Eigenschaft, so gilt Analoges a fortiori für alle Systeme S_λ, wo $\lambda < \nu$.

Verlangt man, um die Ideen zu fixiren, dass die $n - \nu = \tau$ Funktionen f_i hinsichtlich $x_{\nu+1} \,.\,.\, x_{\nu+2} \,.\,.\, x_n$ unabhängig seien, so kann man in S_ν die Variabeln $x_1 \,.\,.\, x_\nu$ statt $u_1 \,.\,.\, u_\nu$ als Independente einführen.

6. Die Bedingungen der vorigen Nr. verlangen natürlich vor allem, dass nicht schon aus den Relationen (11) (12) selber das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten in (13) oder eine Relation zwischen den x allein hervorgehe, m. a. W., dass sich ν linear unabhängige Funktionensysteme

$$(14) \qquad \eta_{1s}, \eta_{2s}, \,.\,.\, \eta_{ms} \quad (s = 1, 2, \,.\,.\, \nu)$$

derart bestimmen lassen, dass die Beziehungen

$$(15) \qquad \sum_1^m {}^i \sum_1^m {}^k a_{ikh}\, \eta_{ir}\, \eta_{ks} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, \,.\,.\,.\, \nu;\ h = 1, 2, \,.\,.\, n - m)$$

erfüllt sind. Es ist dies nichts anderes als die in Nr. 3 unter 1) aufgestellte Forderung. In der That, gibt es $\nu = n - \tau = m - \varrho$ Grössensysteme (14) der genannten Eigenschaft, so besitzen die Gleichungen

$$\sum \eta_{is}\, \xi_i = 0 \quad (s = 1, 2, \,.\,.\, m - \varrho)$$

genau ϱ linear unabhängige Lösungensysteme

$$\xi_{1i}, \xi_{2i} \,.\,.\,.\, \xi_{mi} \quad (i = 1, 2, \,.\,.\, \varrho),$$

und die bilinearen Gleichungen (5) sind offenbar vermöge der ϱ linear unabhängigen Relationenpaare (8) (9) identisch erfüllt. Umgekehrt, ist letzteres der Fall, und bedeuten die Grössen

(14) die ν linear unabhängigen Lösungensysteme der Relationen:

$$\xi_{1i}\eta_1 + \ldots + \xi_{mi}\eta_m = 0 \quad (i = 1 \ldots \varrho),$$

so bestehen offenbar auch die Beziehungen (15), was zu zeigen war.

7. Bemerkenswert ist der Spezialfall, dass schon das Differentialsystem S_ν selber durch Auflösung nach gewissen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial u_r}$ in ein canonisches passives System verwandelt werden kann. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass das System S_ν und die Gleichungen, die hieraus durch unbegrenzte Derivation nach den u folgen, weder das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten (13) noch auch irgend eine nicht in S_ν enthaltene Relation zwischen den Grössen

$$x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (i = 1, \ldots n;\ r = 1, \ldots \nu)$$

zur Folge haben. Alle Systeme $S_2, S_3, \ldots S_{\nu-1}$ besitzen dann a fortiori die analogen Eigenschaften.

8. Eine weitere Spezialisirung der Annahme der letzten Nr. ist für die allgemeine Theorie der partiellen Differentialprobleme von besonderem Interesse. Es seien für das System S_ν die Bedingungen der vorigen Nr. erfüllt, und es werde die Forderung hinzugefügt, dass aus S_ν und den aus ihm durch Derivationen folgenden Gleichungen keine andern Relationen in den Variabeln

$$(16) \qquad x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_1}, \frac{\partial x_i}{\partial u_2}, \ldots \frac{\partial x_i}{\partial u_{\nu-1}} \quad (i = 1 \ldots n)$$

folgen, als solche, die vermöge $S_{\nu-1}$ (vgl. Nr. 5) identisch bestehen, ebenso, dass aus dem System $S_{\nu-1}$ und den daraus durch unbegrenzte Derivation folgenden Gleichungen für die Variabeln

$$x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_1}, \ldots \frac{\partial x_i}{\partial u_{\nu-2}} \quad (i = 1 \ldots n)$$

keine andern Relationen hervorgehen können, als solche, die in $S_{\nu-2}$ enthalten sind, u. s. w., endlich dass S_2 zu S_1 in der analogen Beziehung stehe. Betrachten wir jetzt eine beliebige Integral-$M_{\nu-1}$ des Differentialsystems $S_{\nu-1}$:

$$(17) \qquad x_i = \varphi_i(u_1 u_2 \ldots u_{\nu-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

und beachten, dass jede partielle Ableitung der x, die in der canonischen Auflösung von $S_{\nu-1}$ parametrisch ist, infolge unserer Annahmen sich offenbar auch unter den parametrischen Ableitungen der canonischen Form von S_ν findet, so erschliesst man nach Nr. 5 die Existenz einer Integral-M_ν des Systems S_ν, die jene Integral-$M_{\nu-1}$ vollständig enthält. Eine Ausnahme würde nur dann eintreten, wenn für jedes Wertsystem der Grössen (16), das durch die Relationen (17) definirt wird, die rechten Seiten der canonischen Auflösung von S_ν aufhörten, sämtlich regulär zu sein. Da dies aber, wie man leicht erkennt, nur für besondere Integral-$M_{\nu-1}$ eintreten kann, die ausser $S_{\nu-1}$ noch andere partielle Differentialgleichungen erfüllen, so schliesst man:

Unter den zu Anfang dieser Nr. gemachten Voraussetzungen geht durch jede Integral-M_1 des gegebenen Pfaff'schen Systems im Allgemeinen wenigstens **eine** Integral-M_2, durch jede Integral-M_2 wenigstens **eine** Integral-M_3 etc., endlich durch jede Integral-$M_{\nu-1}$ wenigstens **eine** Integral-M_ν.

Die Aufstellung der hiezu notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten a_{ih} des Pfaff-schen Systems bezeichnen wir als das „Problem B." Es erhebt sich in jedem einzelnen Fall insbesondere die Frage nach der grössten Zahl ν von der angegebenen Beschaffenheit.

9. Damit die Forderungen der vorigen Nr. erfüllt seien, ist vor allem nötig, dass ausser den Bedingungen der Nr. 6 noch die folgenden erfüllt seien: Bezeichnet man allgemein mit G_λ das Relationensystem

$$\sum_1^m{}^i \sum_1^m{}^k a_{ikh}\, \eta_{ir}\, \eta_{ks} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, .. \lambda;\ h = 1, 2, .. n - m),$$

so dürfen aus den Relationen G_ν durch Elimination der $\eta_{i\nu}$ nur solche Relationen folgen, die vermöge $G_{\nu-1}$ identisch erfüllt sind, ebenso dürfen aus $G_{\nu-1}$ durch Elimination der $\eta_{i,\nu-1}$ nur solche Gleichungen hervorgehen, die in $G_{\nu-2}$ enthalten sind, u. s. w.

In den einfachsten Fällen $m = 3$ und $m = 4$ wird sich herausstellen, dass diese Bedingungen zusammen mit denjenigen der Nr. 6 bereits die Passivität des Differentialsystems S_ν zur Folge haben.

10. In den Fällen $m = 1$ und $m = 2$ sind die Probleme A und B trivial. Wir betrachten daher zunächst das Pfaff'sche System:

$$(18)\quad dx_{3+h} = a_{1h}\, dx_1 + a_{2h}\, dx_2 + a_{3h}\, dx_3 \quad (h = 1, 2, .. n - 3),$$

und fragen, unter welchen Bedingungen sich dieses System auf eine Form mit $n - 2$ Differentialelementen bringen lässt.

Soll zunächst durch jede Integral-M_1 (oder „Integralcurve") des Systems eine Integral-M_2 gehen, so müssen die Gleichungen

$$(19)\quad \sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k a_{ikh}\, \xi_i\, \eta_k = 0 \quad (h = 1, 2, .. n - 3)$$

für jedes Wertsystem $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ ein davon linear unabhängiges Lösungensystem $\eta_1\, \eta_2\, \eta_3$ zulassen, und dies kann offenbar nur dann eintreten, wenn sich die $n - 3$ bilinearen Gleichungen (19) auf eine einzige reduciren, d. h. wenn in der Matrix

$$(20)\quad \left\| \begin{matrix} a_{121} & a_{231} & a_{311} \\ a_{122} & a_{232} & a_{312} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

alle zweireihigen Determinanten identisch verschwinden. Sind also etwa die Elemente der ersten Zeile nicht alle null, so muss man haben:

$$a_{ikh} = \varrho_h\, a_{ik1} \quad (h = 2, 3, .. n - m;\ i, k = 1, 2, 3).$$

Ich habe diese Annahme in einer früheren Abhandlung[1]) ausführlich untersucht. Es sei hier nur hervorgehoben, dass ein Pfaff'sches System (18) dieser Art unbegrenzt viele Integral-M_2 besitzt, und dass jede dieser M_2 von ∞^1 „charakteristischen Curven" erzeugt wird, die durch das simultane System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$dx_{3+h} = \sum a_{ih}\, dx_i;\quad dx_1 : dx_2 : dx_3 = a_{231} : a_{311} : a_{121}$$

definirt sind; man erhält die M_2, die durch eine beliebig vorgegebene Integral-M_1 des Systems (18) hindurchgeht, indem man alle diejenigen ∞^1 charakteristischen Curven, die bezw. von den ∞^1 Punkten der Integral-M_1 auslaufen, zu einer M_2 zusammenfasst. Dieser einfache Satz enthält als Spezialfall Cauchy's Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Independenten, sowie die Theorie der von Lie[2]) so genannten „Darboux'schen Systeme" erster Klasse, d. h. derjenigen partiellen Differentialprobleme in zwei Independenten, auf welche sich Cauchy's Methode übertragen lässt.

11. Soll das System (18) überhaupt eine Darstellung

$$(21)\qquad df_h = F_h\, df \quad (h = 1, 2, \ldots n - 3)$$

zulassen, so muss es nach Nr. 3 ein Funktionensystem $u_1\, u_2\, u_3$ geben, derart, dass die Gleichungen

$$(22)\qquad \sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k a_{ikh}\, dx_i\, \delta x_k = 0 \quad (h = 1, \ldots n - 3)$$

vermöge der Relationen

$$(23)\qquad \begin{aligned} u_1\, dx_1 + u_2\, dx_2 + u_3\, dx_3 &= 0 \\ u_1\, \delta x_1 + u_2\, \delta x_2 + u_3\, \delta x_3 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind; also hat man

[1]) „Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen", Leipziger Berichte 1898, p. 207.

[2]) Leipziger Berichte 1895, p. 71.

$$(24)\quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12h} & a_{13h} & u_1 \\ a_{21h} & 0 & a_{23h} & u_2 \\ a_{31h} & a_{32h} & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } a_{23h}\, u_1 + a_{31h}\, u_2 + a_{12h}\, u_3 = 0;$$

in der Matrix (20) müssen also alle dreireihigen Determinanten identisch verschwinden. Sind nun nicht alle zweireihigen Determinanten null, so besitzen die Gleichungen (24) eine und nur eine Auflösung, und es kommt noch die weitere Forderung hinzu, dass die Gleichungen (18) (23) zusammen ein unbeschränkt integrables System bilden. Man findet hierfür die Bedingung:

$$0 \equiv u_1 (A_2 u_3 - A_3 u_2) + u_2 (A_3 u_1 - A_1 u_3) + u_3 (A_1 u_2 - A_2 u_1).$$

Durch Betrachtung spezieller Fälle überzeugt man sich leicht, dass diese Bedingung nicht für jedes beliebige System (18) stattfindet; ist sie erfüllt, so erhält man durch Integration des Systems (18) (23) eine und wesentlich nur eine Darstellung (21).

Die Probleme A und B sind damit für $m = 3$ vollständig erledigt.

12. Soll das Pfaff'sche System

$$(25)\qquad dx_{4+h} = \sum_1^4 a_{ih}\, dx_i \quad (h = 1, 2, \ldots n - 4)$$

auf eine Form

$$(26)\qquad df_h = F_h\, df \quad (h = 1, 2, \ldots n - 4)$$

gebracht werden können, so muss zunächst der Rang der Matrix

$$(27)\qquad \left\| \sum_1^{n-4} {}^h\, a_{ikh}\, \lambda_h \right\| \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

gleich zwei sein. Deuten wir daher $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3\, \xi_4$ und ebenso $\eta_1 \ldots \eta_4$ als homogene Punktcoordinaten eines R_3, so sind alle linearen Complexe des R_3, die in der Schaar:

$$(28) \qquad \sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k \left(\sum_1^{n-4}{}^h a_{ikh} \lambda_h\right) \xi_i \eta_k = 0$$

enthalten sind, speziell.

Es werde mit $\varkappa$ der Rang der Matrix

$$(29) \qquad \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{12h} & a_{13h} & a_{14h} & a_{23h} & a_{24h} & a_{34h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| \quad (h = 1, \ldots . n - 4)$$

bezeichnet. Ist dann $\varkappa = 1$, d. h. reducirt sich die Zahl linear unabhängiger Complexe der Schaar (28) auf eins, so kommen wir auf den Fall zurück, den ich in meiner pag. 284 citirten Arbeit betrachtet habe. Die Reduktion auf die Form (26) ist auf unendlich viele Arten möglich, und zwar gehen durch jede Integral-M_1 unbegrenzt viele Integral-M_2, durch jede der letzteren wenigstens eine Integral-M_3 hindurch. Umgekehrt, soll dies der Fall sein, so muss zwei der Rang von (27) und eins derjenige von (29) sein; in der That folgt nach Nr. 9 aus der gemachten Annahme, dass durch jeden Punkt ξ des R_3 wenigstens eine Gerade gehen muss, die allen Complexen der Schaar (28) gemeinsam ist, und durch jede solche Gerade eine Ebene, deren sämtliche Geraden den Complexen der Schaar gemeinsam sind, und dies kann offenbar nur eintreten, wenn alle Complexe der Schaar (28) speziell und identisch sind.

13. Ist der Rang der Matrix (27) gleich 2 und $\varkappa = 2$, d. h. enthält die Schaar (28) zwei und nur zwei linear unabhängige Complexe, so bilden die Leitgeraden der ∞^1 Complexe der Schaar ein ebenes Büschel. Ist

$$(30) \qquad w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 + w_4 \xi_4 = 0$$

die Gleichung der Büschelebene, so ist das Relationenpaar

$$(31) \qquad w_1 \, dx_1 + \ldots + w_4 \, dx_4 = 0$$

$$(32) \qquad w_1 \, \delta x_1 + \ldots + w_4 \, \delta x_4 = 0$$

das einzige, vermöge dessen alle bilinearen Gleichungen:

$$(33) \qquad \sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k a_{ikh} \, dx_i \, \delta x_k = 0 \quad (h = 1, \ldots n - 4)$$

identisch erfüllt sind. Es gibt dann eine (und nur eine) Darstellung (26), wenn das Pfaff'sche System (25) (31) unbeschränkt integrabel ist, d. h. wenn in der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} 0 & \beta_{12} & \cdot & \beta_{14} & w_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \cdot & 0 & w_4 \\ w_1 & w_2 & \cdot & w_4 & 0 \end{matrix} \right\| \quad (\beta_{ik} = A_i w_k - A_k w_i)$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden. Dieser Fall lässt sich leicht auf denjenigen der Nr. 11 zurückführen. Unter der gemachten Annahme gibt es nämlich ein Funktionensystem $\xi_1 \ldots \xi_4$, das den Relationen

$$(34) \qquad \sum_1^4{}^i a_{ikh}\, \xi_i = 0 \quad (k = 1 \ldots 4;\ h = 1, \ldots n - 4)$$

genügt, indem ξ den gemeinsamen Schnittpunkt der Leitgeraden der Complexe (28) bezeichnet; also gestattet das Pfaff'sche System (25) die infinitesimale Transformation[1])

$$Xf = \xi_1 A_1 f + \ldots + \xi_4 A_4 f,$$

und wird, indem man die $n - 1$ Integrale der Gleichung

$$(35) \qquad \xi_1 A_1 f + \ldots + \xi_4 A_4 f = 0$$

als neue Variable einführt, auf ein n — 4-gliedriges Pfaff'sches System in $n - 1$ Variabeln reducirt, für das also m den Wert 3 hat. Da die Anzahl unabhängiger bilinearer Covarianten durch die Transformation sich nicht ändert,[1]) so erhalten wir in der That den Fall der Nr. 11.

Ist 2 der Rang von (27) und $\varkappa = 3$, sind also 3 und nicht mehr linear unabhängige Complexe in der Schaar (28) vorhanden, so besteht letztere aus ∞^2 speziellen Complexen, deren Leitgeraden entweder durch einen Punkt $\xi_1 \ldots \xi_4$ gehen, oder eine Ebene (30) erfüllen, je nachdem die Gleichungen (34) eine Lösung besitzen oder nicht. Im letzteren Falle ergeben sich für die Möglichkeit einer Darstellung (26) ganz analoge

---

[1]) S. meine Arbeit, Leipziger Berichte 1898, p. 209.

Bedingungen wie soeben; im ersteren Falle ist eine Darstellung (26) überhaupt nicht möglich.

Da nun unter der Annahme, dass 2 der Rang der Matrix (27) sei, in der Schaar (28) mehr als drei linear unabhängige Complexe nicht enthalten sein können, so sind die Probleme A und B für den Fall $m = 4$, $\nu = 3$ völlig erledigt.

14. Wir wenden uns zu dem Problem B unter der Annahme $m = 4$, $\nu = 2$; der Rang der Matrix (27) werde mit 2σ bezeichnet.

1) $2\sigma = 4$, $\varkappa = 1$. Nach meiner oben citirten Abhandlung kann das Pfaff'sche System (25) auf unbegrenzt viele Arten in der Form

$$d f_1 = F\, d f + \Phi\, d \varphi;\; d f_2 = 0, \ldots d f_{n-4} = 0$$

geschrieben werden, worin die n Funktionen

$$f, \varphi, f_1, f_2, \ldots f_{n-4}, F, \Phi$$

unabhängig sind; durch jede Integral-M_1 gibt es unbegrenzt viele Integral-M_2.

2) $2\sigma = 4$, $\varkappa = 2$. Die Schaar (28) enthält nur zwei (im allgemeinen verschiedene) spezielle Complexe. Durch jeden Punkt ξ, der nicht auf einer Leitgeraden eines der speziellen Complexe liegt, geht eine einzige, den Complexen (28) gemeinsame Gerade, so dass die Bedingungen der Nr. 9 erfüllt sind. Ferner hat das System S_2 hier die Form:

$$\frac{\partial x_{4+h}}{\partial u_r} = \sum_1^4{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (h = 1, \ldots n-4;\; r = 1, 2) \tag{36}$$

$$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} = 0 \quad (h = 1, \ldots n-4), \tag{37}$$

(wobei man von den Relationen (37) nur die zwei ersten beizubehalten braucht), und kann nach den Grössen

$$\frac{\partial x_3}{\partial u_2}, \frac{\partial x_4}{\partial u_2}, \frac{\partial x_{4+h}}{\partial u_1}, \frac{\partial x_{4+h}}{\partial u_2} \quad (h = 1 \ldots n-4)$$



aufgelöst werden; diese Auflösung ist canonisch, und offenbar passiv, da die zwei Werte, die sich für jede der Ableitungen $\frac{\partial^2 x_{4+k}}{\partial u_1 \partial u_2}$ durch Derivation von (36) ergeben, vermöge (37) identisch ausfallen. Dementsprechend geht durch jede Integralcurve des Pfaff'schen Systemes (25) mindestens eine, und, wie man leicht erkennt, auch nur eine Integral-M_2 hindurch. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn die gegebene Integral-M_1, die wir durch Gleichungen der Form

$$x_i = \psi_i(u_1) \quad (i = 1 \ldots n)$$

definirt denken, ausser den Relationen

$$\frac{\partial x_{4+k}}{\partial u_1} = \sum_1^4{}^i a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_1}$$

auch noch das eine oder das andere der Gleichungspaare:

$$\sum_1^4{}^k \omega_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} = 0; \quad \sum_1^4{}^k \bar{\omega}_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

erfüllt, wobei die beiden Relationenpaare

$$\sum{}^k \omega_{ik} \xi_k = 0, \quad \sum \bar{\omega}_{ik} \xi_k = 0 \quad (i = 1, 2)$$

bezw. die Direktricen der in der Schaar (28) enthaltenen zwei speziellen Complexe definiren sollen. Eine solche Integral-M_1 heisse eine „Charakteristik"; sie ist auf unbegrenzt vielen zweifach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten des Pfaff'schen Systems (25) enthalten. Umgekehrt enthält jede Integral-M_2 je einfach unendlich viele Charakteristiken eines jeden der beiden Systeme.

Wie man sieht, ergibt sich hier eine Theorie, die den bekannten Sätzen über partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung mit zwei Independenten ganz analog ist, und auch wirklich nicht nur die zuletzt genannte Theorie, sondern auch diejenige der sog. Darboux'schen Systeme zweiter Klasse als Spezialfälle in sich schliesst. Indem wir wegen weiterer Einzel-

heiten teils auf eine frühere Abhandlung,[1]) teils auf eine anderer Stelle zu gebende ausführliche Darlegung verweisen müssen, erwähnen wir hier nur noch, dass jedes $n - m$-gliedrige Pfaff'sche System in n Variabeln, dessen bilineare Covarianten sich auf genau $m - 2$ linear unabhängige reduciren, zu einer analogen Theorie Anlass gibt, indem es im Allgemeinen eine und nur eine Integral-M_2 besitzt, die eine gegebene Integral-M_1 enthält.

Ist $2\sigma = 4$, so kann, falls die Bedingungen der Nr. 9 für $\nu = 2$ erfüllt sein sollen, $\varkappa$ nicht > 2 sein, da sonst nicht durch jeden Punkt des R_3 eine den Complexen (28) gemeinsame Gerade hindurchgehen könnte.

3) Es sei $2\sigma = 2$; dann ist $\varkappa < 3$.

Ist $\varkappa = 1$, so kann die Zahl ν der Nr. 8 gleich 3 genommen werden.

Ist $\varkappa = 2$, so kann das Differentialsystem (36) (37), genau wie beim vorhergehenden Fall, ohne weiteres die canonische passive Form erhalten, und man schliesst, dass durch jede Integral-M_1 des Pfaff'schen Systems (25) im allgemeinen eine und nur eine Integral-M_2 geht. Diese Integralmannigfaltigkeit wird aber nunmehr durch Integration eines simultanen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden. In der That reducirt sich das Pfaff'sche System (25) unter der gemachten Annahme durch Einführung der Integrale der in Nr. 13 betrachteten Gleichung (35) als neuer Variabler auf ein System mit $n - 1$ Variabeln, oder etwas anders ausgedrückt, die durch eine gegebene Integral-M_1 gehende Integral-M_2 wird erzeugt von den ∞^1 charakteristischen Curven der Gleichung (35), die bezw. von den ∞^1 Punkten der M_1 ausgehen.

Soll endlich im Falle $2\sigma = 2$, $\varkappa = 3$ durch jeden Punkt des R_3 eine gemeinsame Gerade der ∞^2 speziellen Complexe (28) gehen, so müssen die Leitgeraden der letzteren einen Punkt

---

[1]) „Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen", Sitzungsber. der math.-phys. Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss., Bd. XXV, p. 423 (1895).



$\xi_1 \ldots \xi_4$, also die Gleichungen (34) auch jetzt wieder ein Lösungensystem gemein haben. Dann aber geht durch jede Integral-M_1 eine Integral-M_2, die genau wie vorhin von den charakteristischen Curven der partiellen Differentialgleichung (35) erzeugt wird.

Wir können die Ergebnisse dieser Nr. so zusammenfassen: Damit durch jede Integral-M_1 des Pfaff'schen Systems (25) eine Integral-M_2 hindurchgehe, ist notwendig und hinreichend, dass entweder in der Matrix (29) alle dreireihigen Determinanten identisch verschwinden, oder dass die Gleichungen (34) ein Lösungensystem besitzen.

15. Indem wir nun dazu übergehen, für die noch übrigen Fälle, die sich unter der Annahme $\nu = 2$, $m = 4$ darbieten, das Problem A, d. h. die Möglichkeit einer Darstellung

$$(38) \qquad d f_{4+h} = F_h \, d f + \Phi_h \, d \varphi \quad (h = 1, 2, \ldots n - 4)$$

des Pfaff'schen Systems (25) zu erörtern, betrachten wir zunächst

1) den Fall $2\sigma = 2$, $\varkappa = 3$ unter der Annahme, dass die Leitgeraden der ∞^2 speziellen Complexe der Schaar (28) nicht durch einen Punkt gehen, sondern in einer Ebene liegen, die im $R_3 (\xi_1 \ldots \xi_4)$ durch die Gleichung

$$w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 + w_4 \xi_4 = 0$$

definirt werde. Dann sind die Relationen (37) mit den folgenden

$$\sum w_i \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = 0, \quad \sum w_i \frac{\partial x_i}{\partial u_2} = 0$$

algebraisch äquivalent, d. h. jede Integral-M_2 des Pfaff'schen Systems (25) erfüllt auch die Pfaff'sche Gleichung

$$(39) \qquad w_1 \, d x_1 + \ldots + w_4 \, d x_4 = 0.$$

Wenn wir von dem in Nr. 13 behandelten Fall absehen, dass das System (25) (39) unbeschränkt integrabel ist, und beachten, dass die bilinearen Gleichungen (33) vermöge der Relation (39) und der dazu congruenten identisch verschwinden, so erkennen wir in den Gleichungen (25) (39) ein $n - 3$-gliedriges

Pfaff'sches System mit n Variabeln, dessen bilineare Covariante sich auf eine einzige

$$\sum_1^4 \sum_1^4 \beta_{ik}\, d x_i\, \delta x_k = 0 \quad (\beta_{ik} = A_i x_k - A_k x_i)$$

reduciren. In Nr. 10 wurde gezeigt, dass dieses System, mithin auch das gegebene Pfaff'sche System (25) sich [illegible] begrenzt vielen Weisen auf eine Form mit $n-2$ Differentialelementen reduciren lässt. Diese Reduction verlangt die Integration einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die offenbar in der Gestalt:

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & x_1, & A_1 f \\ \beta_{21} & 0 & \beta_{23} & \beta_{24} & x_2, & A_2 f \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 & \beta_{34} & x_3, & A_3 f \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & 0 & x_4, & A_4 f \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann [illegible] durch jede Integral-M_1 des [illegible] System [illegible] und nur eine [illegible] Charakt[illegible] Differentialgleichung (40) [illegible] Integral M [illegible]

[illegible] es werde ferner [illegible] nommen [illegible] in der Schaar (28) [illegible] allgemeine Regel [illegible] letzteren besteht dann [illegible] allen [illegible] Geraden, und [illegible] durch die [illegible]

$$(41)\qquad \left|\begin{matrix} [illegible] & \sum [illegible] = 0; \\ [illegible] & \sum [illegible] = 0 \end{matrix}\right.$$

dargestellt werden [illegible] bedeutet. Es [illegible] leicht, [illegible] auszudrück

doch ist die explicite Aufstellung der betreffenden Formeln für unsere Zwecke nicht nötig. Das allgemeinste Relationenpaar in $dx_1 \ldots dx_4$, das mit dem congruenten zusammen alle bilinearen Gleichungen (33) identisch erfüllt, hat darnach die Form:

$$(42) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum \mu_i \, dx_i + \varrho \, (\sum \nu_i \, dx_i) = 0; \\ \sum \bar{\mu}_i \, dx_i + \varrho \, (\sum \bar{\nu}_i \, dx_i) = 0, \end{array} \right.$$

worin ϱ eine arbiträre Funktion der x bedeutet; diese ist jetzt so zu bestimmen, dass das $n - 2$-gliedrige Pfaff'sche System (25) (42) unbeschränkt integrabel wird. Zu diesem Zweck betrachten wir die Gleichungen (25) (42) als ein Pfaff'sches System in $n + 1$ Variabeln $\varrho, x_1 \ldots x_n$. Die bilinearen Covarianten desselben reduciren sich auf die beiden folgenden:

$$\sum \sum (\mu_{ik} + \varrho \, \nu_{ik}) \, dx_i \, \delta x_k + \sum \nu_i \, (d\varrho \, \delta x_i - \delta \varrho \, dx_i) = 0,$$

$$\sum \sum (\bar{\mu}_{ik} + \varrho \, \bar{\nu}_{ik}) \, dx_i \, \delta x_k + \sum \bar{\nu}_i \, (d\varrho \, \delta x_i - \delta \varrho \, dx_i) = 0,$$

worin zur Abkürzung

$$A_i \, \mu_k - A_k \, \mu_i \equiv \mu_{ik} \text{ u. s. w.}$$

gesetzt wurde. Von diesen zwei Gleichungen ist keine eine Folge der andern; denn sonst wäre die Relation $\sum \nu_i \, \xi_i = 0$ eine Folge von $\sum \bar{\nu}_i \, \xi_i = 0$ und von (41), d. h. die Regelschaar (41) wäre ein Kegel oder ein ebenes Büschel.

Nehmen wir, um die Ideen zu fixiren, an, dass die Gleichungen (42), solange ϱ beliebig, nach dx_3, dx_4 auflösbar seien, so können wir das Pfaff'sche System (25) (42) in der Form schreiben:

$$(43) \qquad dx_{2+h} = b_{1h} \, dx_1 + b_{2h} \, dx_2 \quad (h = 1, \ldots n - 2),$$

wo die b_{ih} rationale Funktionen von ϱ bedeuten.

Setzen wir:

$$B_0 f = \frac{\partial f}{\partial \varrho}; \; B_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-2} {}^h \, b_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_{2+h}} \quad (i = 1, 2);$$

$$b_{0h} = 0; \; B_i \, b_{kh} - B_k \, b_{ih} = b_{ikh} \quad (i, k = 0, 1, 2),$$

so verschwinden nach dem eben gesagten in der Matrix

$$\begin{Vmatrix} b_{011} & b_{121} & b_{201} \\ b_{012} & b_{122} & b_{202} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}$$

alle dreireihigen, aber nicht alle zweireihigen Determinanten identisch.

Um auf das Pfaff'sche System (43) die Methode der Nr. 11 anzuwenden, suchen wir zwei Funktionen v_1, v_2 der Variabeln x_i, ϱ so zu bestimmen, dass die Relation

$$(44) \qquad d\varrho = v_1\, dx_1 + v_2\, dx_2$$

mit (43) zusammen ein unbeschränkt integrables System liefert. Nach Nr. 11 müssen die v den Gleichungen

$$(45) \qquad v_1 b_{20h} + v_2 b_{01h} = b_{12h} \quad (h = 1 \ldots n - 2)$$

genügen, und sind hierdurch offenbar als rationale Funktionen von ϱ eindeutig bestimmt. Ferner muss man haben:

$$(B_1 f + v_1 B_0 f,\ B_2 f + v_2 B_0 f) \equiv 0,$$

oder also:

$$(46) \qquad (B_1 B_2) + v_2 (B_1 B_0) + v_1 (B_0 B_2) + \\ + B_0 f (B_1 v_2 - B_2 v_1 + v_1 B_0 v_2 - v_2 B_0 v_1) \equiv 0;$$

da aber die drei ersten Terme wegen (45) eine identisch verschwindende Summe haben, so folgt:

$$(47) \qquad B_1 v_2 - B_2 v_1 + v_1 B_0 v_2 - v_2 B_0 v_1 \equiv 0.$$

Es ist dies eine algebraische Gleichung in ϱ; ist sie für jedes beliebige ϱ erfüllt, dann und nur dann ist das Pfaff'sche System (43) (44) unbeschränkt integrabel. Bedeuten $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ seine Integrale, so erhält man für das gegebene Pfaff'sche System (25) zunächst eine Darstellung der Form

$$(48) \qquad F_{1h}\, df_1 + \ldots + F_{n-1,h}\, df_{n-1} = 0 \quad (h = 1, \ldots n - 4),$$

wo die F, f Funktionen von ϱ, $x_1 \ldots x_n$ bedeuten, und das Zeichen d sich auf diese $n + 1$ Variabeln bezieht. Da aber

das unbeschränkt integrable System (43) (44) nach $d\varrho$ aufgelöst ist, so kann eine der Gleichungen $f_i = c$, etwa

$$f_{n-1}(\varrho, x_1 \,..\, x_n) = c$$

(wo c eine arbiträre Constante bedeutet), nach ϱ aufgelöst werden. Substituirt man diesen Wert von ϱ in (48), so erhält man für das Pfaff'sche System (25) eine Form mit $n-2$ Differentialelementen, und es gibt, wie man sieht, einfach unendlich viele Darstellungen dieser Art.

Ist die Bedingung (47) nicht für jedes ϱ erfüllt, so kann die Grösse ϱ höchstens auf eine endliche Zahl von Arten als Funktion von $x_1, .. x_n$ so bestimmt werden, dass das Pfaff'sche System (25) (42) unbeschränkt integrabel wird. In der That, damit die Funktion ϱ das genannte System unbeschränkt integrabel mache, ist notwendig und hinreichend, dass man identisch habe:

$$B_1 b_{2k} - B_2 b_{1k} + B_0 b_{2k} \cdot B_1 \varrho - B_0 b_{1k} \cdot B_2 \varrho \equiv 0,$$

dass also ϱ den beiden nicht homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen

$$B_1 \varrho = v_1, \quad B_2 \varrho = v_2 \tag{49}$$

genüge. Setzt man nun

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_i} = p_i; \quad B_1 \varrho - v_1 \equiv F; \quad B_2 \varrho - v_2 \equiv \Phi,$$

so muss die Funktion ϱ auch die folgende Identität befriedigen:

$$0 \equiv [F\,\Phi] = \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial \varrho}\right).$$

Diese Gleichung aber reducirt sich, wenn man die Relationen (49) berücksichtigt, auf eine in den p_i lineare Relation, die aus (46) dadurch entsteht, dass man darin $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ durch p_i und $B_0 f$ durch -1 ersetzt, m. a. W. auf die algebraische Gleichung (47).

Für jede einzelne Wurzel ϱ dieser Gleichung hat man jetzt zu prüfen, ob das System (25) (42) unbeschränkt integrabel wird; dabei kann indes auch noch die Annahme $\varrho = \infty$ in Betracht kommen, d. h. es können die Gleichungen

$$\sum \nu_i \, dx_i = 0, \quad \sum \bar{\nu}_i \, dx_i = 0$$

mit (25) zusammen ein unbeschränkt integrables System bilden, also zu einer Darstellung (38) Anlass geben.

3) Wir betrachten den Fall $2\sigma = 4$, $\varkappa = 3$ unter der Annahme, dass für die in $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ homogene quadratische Form, deren Quadrat mit der vierreihigen alternirenden Determinante (27) identisch ist, die Diskriminante identisch verschwindet, dass also die ∞^1 Geraden, die allen Complexen der Schaar (28) gemeinsam sind, in zwei ebene Büschel zerfallen. Ist das eine dieser Büschel durch das Gleichungspaar:

$$(50) \qquad \sum_1^4{}^i \mu_i \xi_i + \varrho \sum_1^4{}^i \nu_i \xi_i = 0, \quad \sum_1^4{}^i \bar{\mu}_i \xi_i = 0$$

definirt, so hat das allgemeinste Relationenpaar in $dx_1 \ldots dx_4$, das mit dem congruenten zusammen alle bilinearen Gleichungen (33) erfüllt, die Gestalt:

$$(51) \qquad \sum \mu_i \, dx_i + \varrho \sum \nu_i \, dx_i = 0, \quad \sum \bar{\mu}_i \, dx_i = 0,$$

oder die analoge, aus dem Gleichungspaar des zweiten Büschels zu bildende Form. Damit dann eine Funktion ϱ der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ das $n-2$-gliedrige Pfaff'sche System (25) (51) unbeschränkt integrabel mache, ist notwendig und hinreichend, dass die beiden folgenden Identitäten stattfinden:

$$\begin{vmatrix} 0 & \bar{\mu}_{12} & \bar{\mu}_{13} & \mu_{14}, & \mu_1 + \varrho \nu_1, & \bar{\mu}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{\mu}_{41} & \bar{\mu}_{42} & \bar{\mu}_{43} & 0 & \mu_4 + \varrho \nu_4, & \bar{\mu}_4 \\ \mu_1 + \varrho \nu_1 & \cdot & \cdot & & 0 & 0 \\ \mu_1 & \bar{\mu}_2 & \mu_3 & \bar{\mu}_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$
(52) \qquad \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \mu_1 + \varrho\nu_1, & \bar{\mu}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0, & \mu_4 + \varrho\nu_4, & \bar{\mu}_4 \\ \mu_1+\varrho\nu_1 & \cdot & \cdot & & 0 & 0 \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 & \bar{\mu}_3 & \bar{\mu}_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,
$$

worin gesetzt ist:

$$A_{ik} \equiv \mu_{ik} + \varrho\,\nu_{ik} + \nu_k A_i \varrho - \nu_i A_k \varrho,$$

und die μ_{ik} u. s. w. die auf pag. 293 angegebene Bedeutung haben.

Die erste dieser Identitäten hat die Form

$$(53) \qquad A\varrho + B \equiv 0$$

wo A, B Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ bedeuten. Ist $A \equiv 0$, $B \equiv 0$, so liefert (52) für ϱ eine nichthomogene lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, und jedes Integral derselben macht das Pfaff'sche System (25) (51) unbeschränkt integrabel; es gibt für das gegebene Pfaff'sche System (25) unbegrenzt viele Formen mit $n - 2$ Differentialelementen. Ist $A \not\equiv 0$, so hat man zu prüfen, ob die durch (53) definirte Funktion ϱ die Relation (52) erfüllt; ist dies der Fall, so erhält man für das Pfaff'sche System (25) eine Form mit $n - 2$ Termen. Schliesslich hat man, wenn $A \equiv 0$, $B \not\equiv 0$, noch zu untersuchen, ob nicht etwa die Gleichungen

$$\sum \nu_i\, dx_i = 0, \quad \sum \bar{\nu}_i\, dx_i = 0$$

mit (25) zusammen ein unbeschränkt integrables System liefern.

Dieselben Untersuchungen sind natürlich auch für die Definitionsgleichungen des andern der beiden Geradenbüschel durchzuführen.

4) Ist $2\sigma = 4$, $\varkappa = 4$, so können die Complexe der Schaar (28) ein Geradenbüschel (50) gemein haben, dann ist die weitere Diskussion dieselbe wie vorhin; oder sie haben zwei Gerade gemein, d. h. es gibt nur zwei verschiedene (oder coincidirende) Relationenpaare

$$\sum \mu_i \, dx_i = 0, \quad \sum \bar{\mu}_i \, dx_i = 0 \tag{54}$$

die mit den kongruenten zusammen den bilinearen Gleichungen (33) genügen, also für das gegebene Pfaff'sche System (25) höchstens zwei verschiedene Formen mit $n - 2$ Differentialelementen. Ebenso erkennt man, dass im Falle $\varkappa = 5$ höchstens eine solche Darstellung, im Falle $\varkappa = 6$ aber überhaupt keine existirt.

Durch die vorstehenden Betrachtungen sind die Probleme A und B für $m = 3$ und $m = 4$ vollständig erledigt. Zugleich erkennt man, dass für diese Werte von m die in Rede stehenden Reduktionen stets auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückkommen, mit einziger Ausnahme des Falles Nr. 14, 2).

Die Behandlung der Fälle $m > 4$ erfordert ein genaueres Eingehen auf die Theorie der linearen Complexe in höheren Räumen, d. h. der Schaaren von alternierenden Bilinearformen mit mehr als vier Variabelnpaaren. Ich gedenke meine auf die Fälle $m = 5$ und $m = 6$ bezüglichen Untersuchungen demnächst an anderer Stelle ausführlich darzulegen.

Nachschrift.

Nach Ablieferung dieser Arbeit erhielt ich durch gütige Vermittelung der Herrn A. Mayer und F. Engel Kenntnis von einer Abhandlung des Herrn J. K. Russjan: „Sistema urawnenij Pfaff'a" (Odessa 1899). Herr Russjan versucht darin, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, dass ein Pfaff'sches System (1) sich auf die Form (2) bringen lasse; doch sind die Resultate seiner Untersuchung unrichtig. In unserer Bezeichnungsweise lauten die Russjan'schen Bedingungen so: Es müssen in der Matrix $\| \sum_s a_{iks} \lambda_s \|$ alle $2\varrho + 2$-reihigen[1]) Hauptunterdeterminanten identisch verschwinden, und das System linearer homogener partieller Differentialgleichungen I. Ordnung, das erhalten wird, wenn man ausdrückt, dass die Matrix:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & \sum_s a_{12s}\lambda_s & \cdot\cdot & \sum_s a_{1ms}\lambda_s, & A_1 f \\ \sum_s a_{21s}\lambda_s & 0 & \cdot\cdot & \sum_s a_{2ms}\lambda_s, & A_2 f \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_s a_{m1s}\lambda_s, & \sum_s a_{m2s}\lambda_s & \cdot\cdot & 0, & A_m f \\ A_1 f, & A_2 f, & \cdot\cdot & A_m f, & 0 \end{array} \right\|$$

höchstens den Rang 2ϱ besitzt, muss ϱ unabhängige Integrale $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ zulassen.

Die Notwendigkeit dieser Bedingungen leuchtet nach Nr. 2 unserer Arbeit unmittelbar ein; Herr Russjan glaubt aber, dass sie auch hinreichen, und dies ist keineswegs der Fall. In der That, wären die genannten Bedingungen hinreichend, so müsste man (wie es auch Herr Russjan thut, l. c. p. 109 ff.), folgern, dass bei geradem m jedes $n-m$-

---

[1]) $\varrho = \varkappa - n + m$.

gliedrige Pfaff'sche System in m Variabeln auf eine Form mit $n - \frac{1}{2} m$ Differentialelementen reducirt werden kann, da ja in diesem Fall $\varrho = \frac{1}{2} m$, mithin das obige Schema, als alternirende Matrix der ungeraden Ordnung $m + 1$, für jedes beliebige f einen Rang $< 2 \varrho$ besitzt. Also müsste z. B. jedes $n - 4$-gliedrige Pfaff'sche System in n Variabeln auf $n - 2$ Differentialelemente reducirt werden können, was nach den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit nicht der Fall ist, schon deswegen nicht, weil mehr als vier lineare Complexe des R_3 im allgemeinen keine Gerade gemein haben.

Damit werden aber auch alle übrigen Schlüsse der Russjanschen Arbeit, soweit sie sich auf Systeme Pfaff'scher Gleichungen beziehen, illusorisch.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 141. Stiftungstages

am 28. März 1900.

Die Sitzung eröffnet der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. K. A. v. Zittel, mit folgender Ansprache:

Wir feiern heute den 141. Stiftungstag der k. bayer. Akademie der Wissenschaften. War es mir vergönnt in der letzten Festsitzung einen Rückblick auf die Gründung und Entwicklung unserer gelehrten Gesellschaft im vergangenen Jahrhundert zu werfen und zu zeigen, in welch hervorragendem Mass ihr Blühen durch die Fürsorge und das Wohlwollen unserer allerhöchsten Protektoren aus dem Hause Wittelsbach gefördert wurde, so möchte ich heute, einer Gepflogenheit meines hochverehrten Vorgängers folgend, die Aufmerksamkeit der hohen Festversammlung auf den gegenwärtigen Zustand und die Thätigkeit der Akademie und des damit verbundenen Generalkonservatoriums der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates lenken.

Die Akademie konnte im vergangenen Jahr ungestört ihre wissenschaftliche Thätigkeit fortsetzen. Die in den monatlichen Klassensitzungen vorgelegten Mitteilungen, welche grösstenteils von Mitgliedern der Akademie, teilweise aber auch von ausserhalb unserer Korporation stehenden Forschern herrühren, füllen je 2 Bände unserer Sitzungsberichte und Denkschriften und legen Zeugnis ab von der fleissigen und mannigfaltigen Arbeit, die im Jahre 1899 geleistet wurde.

Auch die historische Kommission hat im verflossenen Jahr mit dem 45. Band die allgemeine deutsche Biographie zum Abschluss gebracht und bereits mit einem neuen Band die Publikation der Nachträge begonnen. Von der Geschichte der Wissenschaften in Deutschland ist ein Band, Die Geschichte der Geologie und Paläontologie von K. v. Zittel, erschienen, und damit geht auch dieses grosse Unternehmen seiner baldigen Vollendung entgegen. Von den Städtechroniken wurde der 27. Band, Die Chronik von Magdeburg von Professor Hertel, von den Deutschen Reichstags-Akten der XI. Band durch Herrn G. Beckmann und von den Monumenta Boica der 44. Band durch Herrn Reichsarchivdirector v. Oefele veröffentlicht. Mit dem 45. Band wird unter der Redaktion unseres Mitgliedes des Herrn Archivrat Baumann eine neue Serie dieser wichtigen Publikationen beginnen.

Im Laufe des Jahres 1899 fand eine Neuorganisation des Thesaurus linguae Latinae statt. Nach der Sammlung des Materiales, welche 5 Jahre in Anspruch nahm, beginnt nunmehr die Ausarbeitung unter dem neu aufgestellten verantwortlichen Generalredaktor Dr. Fr. Vollmer mit einem Sekretär und neun Assistenten. Der erste Halbband des Lexikons, das die ganze Geschichte eines jeden Wortes enthalten soll, wird noch im Laufe dieses Jahres erscheinen. Herr Geheimrat v. Wölfflin, der schon früher seinen für zehn Jahre festgesetzten Gehalt als Mitglied des Direktoriums zur Gründung eines Reservefonds schenkte, hat nunmehr seine Stiftung auf rund 15000 M. erhöht.

Die Kommission für Erforschung der Urgeschichte Bayerns konnte mit einer Summe von mehr als 4000 M. die meist ergebnisreichen Ausgrabungen der historischen Vereine von Niederbayern, Oberpfalz, Schwaben und Neuburg, der Pfalz, in Eichstätt und Dillingen wirksam fördern. Von Privatpersonen, welche Unterstützungen aus diesen Fonds erhielten, seien hervorgehoben Generalmajor a. D. Karl Popp zur Ausdehnung seiner Untersuchung der römischen Strassen auf die Rheinpfalz, Hauptmann a. D. v. Haxthausen für Untersuchungen prähistorischer Denkmale Unterfrankens, Dr. Max Schlosser,

Kustos an der geologischen Sammlung des Staates für Höhlenuntersuchungen bei Velburg und Pfarrer Dr. Georg Wilke in Hellmitzheim.

Aus der Etatsposition für naturwissenschaftliche Erforschung des Königreichs wurden wie in den Vorjahren eine beträchtliche Anzahl wissenschaftlicher Untersuchungen in Bayern und den angrenzenden Gebieten unterstützt und dadurch gleichzeitig die mineralogischen, geologischen, paläontologischen und prähistorischen Sammlungen des Staates nicht unerheblich bereichert. Nach Abschluss der Bodenseekarte und der damit zusammenhängenden topographischen, physikalischen und zoologischen Spezialarbeiten wurde auf Antrag des Herrn Kollegen Hertwig eine eingehende Untersuchung des Rheins und seiner bayerischen Nebenflüsse auf den Gehalt an tierischen Organismen in Aussicht genommen und Herrn Dr. Lauterborn in Ludwigshafen für mehrere Jahre eine nicht unerhebliche Subvention zu diesem Behufe zur Verfügung gestellt.

Aus den Renten des Mannheimer-Fonds konnte dem Konservator der ethnographischen Sammlung ein Zuschuss von 2000 M. zur Anschaffung einer höchst wertvollen repräsentativen Gruppe von Benin-Bronzen und dem Konservator des botanischen Gartens ein Zuschuss von 3000 M. zu Erwerbungen während seiner auf eigene Kosten ausgeführten Reise nach Ceylon, Australien und Neu-Seeland gewährt werden. Herr Professor Göbel ist im vorigen Frühjahr glücklich zurückgekehrt und hat den botanischen Garten, das pflanzenphysiologische Institut und das Herbarium durch eine Fülle von mitgebrachten, höchst wertvollen Materialien bereichert. Dem botanischen Garten wurde eine Anzahl lebender Pflanzen und Sämereien aus Australien und Neuseeland überwiesen, darunter eine Sammlung von Baumfarne, wie sie kein anderer deutscher botanischer Garten in gleicher Fülle und Schönheit besitzt. Es ist dadurch die Möglichkeit gegeben, eines der bemerkenswertesten Vegetationsbilder der Erde in unserem Garten lebend vorzuführen. Ferner hat Herr Göbel Orchideen aus Ceylon und einige in biologischer Hinsicht besonders interessante, bisher

überhaupt nicht in Kultur befindliche Wasserpflanzen und Insektivoren eingeführt und durch Anbahnung von Verbindungen mit australischen und neuseeländ'schen Naturforschern und botanischen Gärten die weitere Bereicherung des hiesigen Gartens mit Pflanzen jener Gebiete gesichert. Auch für das pflanzenphysiologische Institut konnte Herr Göbel eine grosse und sehr wertvolle Sammlung teils getrockneter, teils in Alkohol konservierter Pflanzen erwerben, welche teils zu wissenschaftlichen Untersuchungen, teils zu Demonstrationszwecken bestimmt ist. Schliesslich bereicherte Herr Professor Göbel auch das Herbarium durch eine Sammlung von 306 Arten westaustralischer getrockneter Pflanzen, die grösstenteils durch Herrn Professor Helms gesammelt wurden. Der Gesammtwert der von Herrn Göbel mitgebrachten botanischen Schätze beläuft sich auf mindestens 8—9000 M. Dieses Ergebnis liefert den Beweis, wie wertvoll derartige mit Umsicht und Sachkenntnis ausgeführte Reisen für unsere Anstalten werden können.

Die Münchener Bürger- und Cramer-Klett-Stiftungen, welche wir unserem verehrten Alters-Präsidenten v. Pettenkofer verdanken, gewährten wieder die Möglichkeit eine Anzahl wissenschaftlicher Untersuchungen zu unterstützen. Herr Professor Lindemann hat im vorigen Frühjahr die italienischen Städte Mantua, Este, Reggio, Piacenza, Padua, Genua, Turin, Mailand und Brescia besucht und dort seine interessanten Nachforschungen über die Verbreitung altägyptischer Stein-Gewichte nicht unerheblich vervollständigt. Herr Privatdozent Dr. Weinschenk hat seine mineralogisch-petrographische Studienreise in die Piemonteser- und Dauphinéer-Alpen ausgeführt und Herr Privatdozent Dr. Maas verweilte von Oktober vorigen Jahres bis Anfang März in Cypern, um daselbst Studien über die Entwickelung und Organisation der Spongien zu machen.

Für das laufende Jahr wurden aus den Renten der Münchener-Bürger-Stiftung bewilligt: 1) 600 M. dem ausserordentlichen Professor Dr. Tafel in Würzburg zur Fortführung seiner Arbeiten über den Verlauf der Elektrolyse organischer Substanzen. 2) 1500 M. an Herrn Dr. Ernst Stromer Freiherr von

Reichenbach in München für vergleichend anatomische und paläontologische Untersuchungen über die Wirbelsäule der Raubtiere. 3) 600 M. an Herrn Professor Dr. Ebert in München zur Untersuchung periodischer Seespiegelschwankungen im bayerischen Alpengebiet. Aus den Renten der Cramer-Klett-Stiftung erhielten: 1) Herr Professor Dr. Thiele 300 M. für Untersuchungen über die Natur der Bindungen von doppelten Kohlenstoffverbindungen. 2) Herr Professor Dr. Göbel 1000 M. als Beitrag zur Errichtung eines alpinen Versuchsgartens auf dem Schachen, in welchem wissenschaftliche Untersuchungen über die Lebensbedingungen der Alpenpflanzen, sowie über deren Zusammenhang zwischen den Gestaltungsverhältnissen und den äusseren Faktoren angestellt werden sollen. 3) Herr Ludwig Bach, Privatdozent in Würzburg, 500 M. für Untersuchungen der zentralen Beziehungen des Nervus opticus, besonders beim Affen.

Es gereicht mir zur besonderen Befriedigung mitteilen zu dürfen, dass die Bürger-Stiftung durch eine hochherzige Schenkung des Herrn Fabrikanten Dr. Siegmund Riefler um 10000 M. vermehrt wurde und dass der Betrag von 1500 M., welcher sich als Ueberschuss bei einer Sammlung zur Herstellung einer goldenen Medaille für Se. Excellenz den Herrn Geheimrat v. Pettenkofer ergeben hatte, von dem Comité der Akademie übergeben und mit dessen Zustimmung der Bürger-Stiftung beigefügt wurde. Dieselbe hat damit den Betrag von 90000 M. erreicht.

Eine neue Stiftung „zur Förderung chemischer Forschungen" verdankt die Akademie ihrem Mitgliede Herrn Professor Wilhelm Königs. Die Zinsen eines Kapitals von 5000 M. sollen alljährlich durch den Vorstand des chemischen Laboratoriums im Einvernehmen mit dem Präsidenten der Akademie und dem Sekretär der mathematisch-physikalischen Klasse zu obigem Zweck verwendet werden.

Die Renten der im Jahre 1898 der k. Akademie fallenen Thereianos-Stiftung gelangten im vori

erstenmal zur Verteilung. Es erhielten Herr Dr. Papadopulos Kerameus in St. Petersburg einen Preis von 1600 M. für zwei hervorragende Sammelwerke, Herr Professor Krumbacher 1500 M. zur Herausgabe eines reich illustrierten Bandes seiner byzantinischen Zeitschrift, Herr Professor Furtwängler 2900 M. zur Veröffentlichung eines gemeinschaftlich mit Herrn Reallehrer Reichhold herauszugebenden Werkes über griechische Vasenmalerei. Es wurden im vergangenen Jahr 27 Vasen aus den Museen von Florenz, Paris und London durch Herrn Reichhold in vollendeter Weise gezeichnet und dadurch eine Grundlage für das wichtige Unternehmen geschaffen. Die übrigen unterstützten wissenschaftlichen Arbeiten der Herren Helmreich, Bitterauf, Fritz und Bürchner haben noch keinen Abschluss gefunden.

Für das laufende Jahr wurden durch Doppel-Preise von je 1600 M. ausgezeichnet: Herr Prof. Dr. G. N. Chatzidakis in Athen für seine bahnbrechenden Forschungen über die Geschichte der griechischen Vulgärsprache und sein Werk „Einleitung in die neugriechische Grammatik“, 2) Herr Professor Dr. Martin Schanz in Würzburg für die kritische und exegetische Bearbeitung platonischer Schriften und die von ihm herausgegebenen und geleiteten Beiträge zur griechischen Syntax. Für Unterstützung wissenschaftlicher Unternehmungen wurden bewilligt 1500 M. an Herrn Professor Krumbacher für Herausgabe seiner byzantinischen Zeitschrift, 1000 M. an Herrn Professor Furtwängler für Fortsetzung seines Werkes über griechische Vasenmalerei, 600 M. an Herrn Boll, Sekretär an der k. Hof- und Staatsbibliothek für seine Studien zur Astronomie und Astrologie der Griechen, 450 M. an Herrn Heisenberg, Gymnasiallehrer in München, zur Vergleichung von Handschriften in Turin, Venedig, Mailand und Rom zum Behuf einer Untersuchung, event. Herausgabe der sogenannten Turiner-Kompilation und der Biographie des Mesarites und des byzantinischen Kaisers Joannes Dukas Batatzes.

Es ist eine hocherfreuliche Thatsache, dass die Bestrebungen unserer Akademie seit einer Reihe von Jahren nicht

allein durch ihre hohen Protektoren und die Fürsorge der k. Staats-Regierung gefördert werden, sondern dass ihnen auch in weitern Kreisen warme Sympathie geschenkt wird. In ganz besonderem Mass kommt dies den unter dem General-Konservatorium vereinigten wissenschaftlichen Sammlungen und Anstalten zu gute. Diese ursprünglich der k. Akademie direkt unterstellten Attribute haben im Laufe der Zeit in mannigfacher Weise ihren Charakter geändert. Einige, wie das chemische Laboratorium, das physiologische Institut und die anatomische Anstalt sind mehr und mehr Lehranstalten geworden und in engere Verbindung mit der Universität als mit der Akademie getreten. Auch an die meisten übrigen wissenschaftlichen Sammlungen und Anstalten sind Lehr-Institute angegliedert worden, in welchen alljährlich zahlreiche Studierende der hiesigen Universität ihre wissenschaftliche Ausbildung erhalten. Daneben sind sie allerdings auch Werkstätten für selbständige Forschungen geblieben und erfreuen sich als solche durch die Zahl und die Gediegenheit der aus ihnen hervorgehenden wissenschaftlichen Arbeiten eines Weltrufes.

Aus den Jahresberichten der einzelnen Konservatoren kann ich, aus Furcht die Geduld der hohen Festversammlung zu ermüden, nur das Wichtigste herausgreifen. Ich muss namentlich darauf verzichten, die wissenschaftliche Thätigkeit in den verschiedenen Instituten zu schildern und mich auf die Erwähnung von aussergewöhnlichen Erwerbungen oder wertvollen Geschenken beschränken.

In dieser Hinsicht kommen das chemische Laboratorium, das physiologische Institut, die Sternwarte und die Anatomie naturgemäss am wenigsten in Betracht, da ihre Sammlungen vorzugsweise dem Unterricht oder der wissenschaftlichen Forschung dienen. Immerhin sind aber auch hier einige bemerkenswerte Bereicherungen zu verzeichnen. So hat das chemische Laboratorium eine sehr umfangreiche Sammlung neuer Farbstoffe von der Farbenfabrik vormals Friedrich Bayer u. Cie. in Elberfeld, ferner verschiedene Farbstoffe, künstlichen Indigo, Zwischenprodukte u. A. von der badischen Anilin- und Soda-

fabrik in Ludwigshafen, von der Anilinfabrik K. Oehler in Offenbach a. M. und von dem Farbwerk vormals Meister, Lucius und Brüning in Höchst a. M. zum Geschenk erhalten.

Das physiologische Institut hat seine Sammlung durch Erwerbung von mehreren grösseren Apparaten (Calorimeter nach Rubner, Federmyographion nach Blix, Projektions-Apparat) bereichert und die anatomische Anstalt ihre umfangreiche und viel besuchte Sammlung durch eine grosse Anzahl meist vom Personal selbst hergestellter, zum kleineren Teil gekaufter Präparate und Wandtafeln vergrössert. Das kostbarste Objekt, welches der anatomischen Sammlung im verflossenen Jahre einverleibt wurde, ist ein unter steter Aufsicht von einem Bildhauer in Holz geschnitztes, durchaus naturgetreues, zerlegbares Modell des menschlichen Schädels in fünffacher Vergrösserung.

Auf der Sternwarte wurden die Beobachtungen des Zenith-Sternkatalogs vollendet und mit dem grossen Refraktor zahlreiche Photographien hergestellt; auch die erdmagnetischen Beobachtungen wurden regelmässig fortgesetzt, doch machten sich bei diesen seit Anfang Dezember gewisse Störungen geltend, die offenbar durch den elektrischen Betrieb der Trambahn veranlasst sind. Die Kommission für internationale Erdmessung führte unter spezieller Leitung des Herrn General v. Orff durch Herrn Observator Anding Schweremessungen in Wien, München, Hohenpeissenberg, Berchtesgaden, Rosenheim und Traunstein und Breitenbestimmungen in Lichtenfels und Oettingen aus.

Das ethnographische Museum hat abgesehen von der bereits erwähnten Erwerbung von Benin-Altertümern durch I. K. Hoheit Prinzessin Therese zwei Mumien aus Peru und von Sr. K. Hoheit dem Prinzen Rupprecht von Bayern ein Buddabild aus Oberbirma nebst zahlreichen Photographien zum Geschenk erhalten. Eine sehr umfangreiche Sammlung ethnographischer Gegenstände (287 Nummern) aus dem Lande der Tschuktschen wurde von dem Weltreisenden Eugen Wolf geschenkt und dem Donator dafür die goldene Denkmünze unserer Akademie verliehen.

Im Museum für Abgüsse klassischer Bildwerke konnte, soweit es die Ungunst der dortigen Raumverhältnisse zuliess, die Aufstellung durch nicht unerhebliche Veränderungen verbessert und einige wertvolle neue Erwerbungen eingeordnet werden. Dem Tyrannenmörder Aristogeiton, dem Faustkämpfer des Louvre und der Penelope des Museo Chiaramonti wurden die bisher getrennten Köpfe aufgepasst; der Skulpturenschmuck des von Professor Furtwängler rekonstruierten Altars des Neptun-Tempels des Domitius in Rom wurde zum erstenmal in der ursprünglichen Weise aneinandergefügt und aufgestellt und die Porträt-Sammlung durch mehrere Erwerbungen vermehrt.

Auch das Antiquarium erhielt im vergangenen Jahr einige auserlesene Stücke. Das Beste verdankt es der Vermögensadministration Sr. Majestät König Otto's und zwar einen altetrurischen Cippus mit Reliefdarstellungen auf den Seiten, einen attischen Grabstein mit Inschrift aus dem 4. Jahrhundert v. Chr. und zwei schöne antike Mosaiken. Aus der im vorigen Mai in München abgehaltenen Auktion Margarites wurden 20 wertvolle Terrakotten und Bronzen erworben, darunter ein Terrakotterelief aus praxitelischer Zeit mit der Darstellung eines Mädchens mit Kanne und Opferschale in den Händen. Als Geschenk erhielt das Antiquarium von Herrn Dr. Bulle eine Anzahl Thonabdrücke aus Griechenland und einige Richtertäfelchen aus Athen von Herrn Dr. Fröhner in Paris.

Ueber die reichen Zuwendungen, welche der botanische Garten, das pflanzenphysiologische Institut und das botanische Museum durch Herrn Professor Göbel erhielten, habe ich bereits berichtet. Es bleibt mir nur noch übrig einiger anderer wertvoller Geschenke und Erwerbungen zu gedenken. Durch Professor Bruchmann in Gotha erhielt das pflanzenphysiologische Institut eine überaus interessante Demonstrations-Sammlung der bisher unbekannten Prothallien von Lycopodium-Arten, wofür dem Schenker die silberne Medaille unserer Akademie zuerkannt wurde. Herr General-Konsul v. Zimmerer in Desterro (Brasilien) schickte für den botani-

schen Garten eine Sammlung ungewöhnlich schöner brasilianischer Orchideen. Das botanische Museum erwarb durch Kauf über 2300 Pflanzenarten aus Costarica, Kamerun, Portorico und Mexico und erhielt als Geschenk durch Herrn Apotheker Loher in Manila 498 Pflanzen von den Philippinen, von Herrn Apotheker Merkl in München 145 Arten aus Turkmanien, von der Direktion des botanischen Gartens in Calcutta 150 Arten aus Ost-Indien, von der Direktion des botanischen Gartens in Berlin 199 Arten aus Kamerun, vom botanischen Universitäts-Museum in Wien 1200 Arten der Flora exsiccata Austro-Hungarica. Die Ordnung und Bestimmung des Herbariums wurde fortgesetzt und von Herrn Professor Dr. Radlkofer die grosse Monographie der Sapindaceen vollendet, welche in der von Martius begonnenen Flora Brasiliensis in Bälde erscheinen wird.

Von den im Wilhelmin'schen Gebäude vereinigten Sammlungen und Instituten hat das Münzkabinet von Sr. Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten einige wertvolle numismatische Werke, von Sr. K. Hoheit Prinz Rupprecht eine grössere Anzahl orientalischer Münzen, von Herrn Banquier Th. Wilmersdörffer, von Fräulein Bettina Ringseis, von Herrn Rektor Ackermann in Cassel und Geh. Kommerzienrat Vogel in Chemnitz verschiedene Münzen zum Geschenk erhalten. Von sonstigen Erwerbungen verdienen eine Goldmünze der Dynastie von Axum in Aethiopien, ein Tetradrachmon Antiochus IX. von Syrien, verschiedene seltene Münzen von Makedonien, Kreta und Aegypten, ein Goldgulden Philipp I. von der Pfalz und eine prachtvolle Porträtmedaille Friedrich des Weisen von der Pfalz besonders erwähnt zu werden.

Das seit mehreren Jahren verwaiste Konservatorium der mathematisch-physikalischen Sammlung, eines unserer ältesten Attribute, aus welchem die klassischen Arbeiten von Fraunhofer, Steinheil, Ohm und Seidel hervorgegangen sind, hat in der vorigen Finanzperiode durch die Initiative unseres Alterspräsidenten von Pettenkofer vom Landtag einen ausserordentlichen Zuschuss von 40000 M. erhalten zur Vervollständigung der von Herrn Professor Ernst Voit in uneigennützigster

Weise geordneten und inventarisierten historischen Sammlung der vornehmlich von bayerischen Gelehrten und Mechanikern herrührenden wissenschaftlichen, physikalischen Apparate. Es ist dadurch möglich geworden, die bisher im Besitze des Herrn Mechanikers Dietz befindliche berühmte Reichenbach'sche Teilmaschine zu erwerben und dadurch dem bayerischen Staat ein Werk von unvergänglichem Wert zu erhalten. Weitere Erwerbungen für diese Sammlung stehen in Aussicht, sobald über deren definitive Gestaltung eine Entscheidung getroffen sein wird.

Von den naturhistorischen Sammlungen hat die zoologische durch Herrn Dr. Sapper in Coban (Guatemala) eine höchst wertvolle Sammlung von zentralamerikanischen Schlangen zum Geschenk erhalten. Es befinden sich darunter grosse Seltenheiten. Ein ehemaliger Schüler unserer Hochschule, Herr Dr. Haberer, sandte aus Japan eine grössere Sammlung von Naturalien, darunter vortrefflich präparierte Vogelbälge. Herr Eugen Wolf schenkte Schädel, Skelette, Bälge und Häute aus Nord-Asien und Herr Professor Grassi in Neapel eine trefflich konservierte Serie von Aal-Larven. Unter den Neuanschaffungen sind ein schön ausgestopfter Elch, ein weiblicher Ovibos sowie umfangreiche Sammlungen von Myriapoden und Insekten und Schmetterlinge von Anatolien hervorzuheben. Die seit langer Zeit einer Revision bedürftigen Landschneckensammlung wurde durch einen Spezialisten ersten Ranges Herrn Prof. Dr. Böttger in Frankfurt geordnet und bestimmt.

Im paläontologischen Museum ist die von Herrn Kommerzienrat Stützel geschenkte Säugetiersammlung aus Samos nahezu fertig präpariert, bestimmt und teilweise auch, soweit es der Raum gestattete, in die Sammlung eingereiht. Durch eine erneute Sendung des Herrn Otto Günther, Direktor der Fleisch-Extrakt-Fabrik in Fray Bentos (Uruguay) wurde unsere Sammlung von fossilen Pampassäugetieren durch eine Anzahl höchst wertvoller Stücke (einen Schädel von Mastodon Humboldti, Skelett von Mylodon, Ueberreste von Glyptodon, Toxodon u. A.) wesentlich bereichert. Ein Teil der durch Herrn Kommerzienrat Anton Sedlmayr für das paläontologische Mu-

seum zusammengebrachten Mittel wurde zur Ausrüstung einer seit Oktober in Patagonien thätigen Expedition verwendet, über deren Ergebnisse ich im nächsten Jahr zu berichten hoffe. Herr Dr. Haberer, welcher sich die Auffindung der Fundstätten fossiler Säugetiere im Innern von China zur Aufgabe gestellt hat, befindet sich seit Anfang dieses Winters im Yang-tse Kiang-Gebiet und hat mit grosser Energie und Umsicht seine Nachforschungen begonnen. Eine in Shanghai und Hangkow aufgekaufte Sammlung fossiler Zähne, Kiefer und Knochen, welche er unserem Museum gesandt hat, enthält bereits erheblich mehr Arten, als bisher auf dem chinesischen Tertiär bekannt waren, so dass wir mit berechtigten Hoffnungen seinen weiteren Forschungen entgegensehen dürfen. Ein überaus kostbares Geschenk verdankt die paläontologische Staatssammlung Herrn Obermedizinalrat Dr. Egger. Dieser ausgezeichnete Kenner fossiler Foraminiferen hat in den Denkschriften der Akademie im vorigen Jahr eine durch 27 Tafeln illustrierte Monographie der in den bayerischen alpinen Kreidebildungen vorkommenden Foraminiferen und Ostracoden veröffentlicht. Die Originalien dieser mühevollen und schwierigen Untersuchungen, welche den Autor mehrere Jahre lang fast ausschliesslich beschäftigt hatten, wurden in 6 Kästchen geordnet dem paläontologischen Museum übergeben und bilden eine Bereicherung unserer Foraminiferen-Sammlung von unvergänglichem Wert.

Die geologische Staatssammlung hat sich im Hinblick auf ihre höchst bescheidenen Mittel darauf beschränkt, ihre alpine Sammlung durch systematische Aufsammlungen zu ergänzen.

Auch in der mineralogischen Sammlung sind keine grösseren Erwerbungen zu verzeichnen, wohl aber wurde sie durch eigene Aufsammlung der Beamten und des Herrn Dr. Weinschenk, sowie durch eine Reihe von Geschenken nicht unerheblich bereichert.

Die anthropologisch-prähistorische Sammlung endlich hat im Vorjahr wichtige Vermehrungen erhalten. Durch

Herrn v. Haxthausen sind die steinzeitlichen Funde aus dem Spessart ergänzt worden; auch die Funde aus dem grossen Ringwall von Manching, welche der La Tène-Zeit angehören, wurden in erwünschter Weise vervollständigt und durch den städtischen Ingenieur Herrn Brug dem Museum eine schöne Sammlung von in der Widenmayerstrasse in München gefundener Bronzen überwiesen. Herr Professor Dr. Selenka vervollständigte seine schon früher der Akademie geschenkte Sammlung von 240 Orang-Utang- und 70 Hylobates-Schädeln durch Ueberweisung einer grossen Anzahl weiterer Schädel von Hylobates und von 58 niederen Affen. Die kraniologische Sammlung wurde durch Herrn Eugen Wolf durch 6 Tschuktschen-Schädel und um 32 von Ihrer K. Hoheit Prinzessin Therese von Bayern gesammelte deformierte Schädel aus den Gräberfeldern von Ancon und Pachakamac bereichert. Diese letztgenannte Sammlung ist besonders wichtig, weil sie alle Stadien der Deformation in geschlossener Reihe vorführt, wodurch die Art und Weise dieser Verunstaltung in einer bisher kaum erreichten Vollständigkeit demonstriert wird.

Diese Uebersicht zeigt allenthalben eine rege wissenschaftliche Thätigkeit in unseren Instituten und teilweise eine sehr bedeutende Vermehrung unserer Museen. Leider macht sich aber der schon seit Jahren empfundene Raummangel nicht nur bei allen im Wilhelminum untergebrachten Sammlungen, sondern auch in fast unerträglicher Weise beim ethnographischen Museum und der Sammlung für klassische Bildwerke geltend.

Von Jahr zu Jahr tritt das Bedürfnis nach Raumvermehrung dringender in Vordergrund. Umfangreichere Erwerbungen können in den meisten Museen nur mit der grössten Mühe eingereiht werden und müssen teilweise in Kisten verpackt im Magazin verbleiben. Der Umbau des Wilhelmin'schen Gebäudes in den achtziger Jahren hat uns eine Reihe vortrefflich eingerichteter und geräumiger Lehr- und Arbeitsinstitute verschafft; die Sammlungen selbst haben dabei verhältnismässig

wenig gewonnen. So grosse Vorzüge das für ganz andere Zwecke errichtete Wilhelminum in baulicher Hinsicht besitzt, so eignet es sich doch nicht für ein naturhistorisches Museum. Eine systematische, den neueren Anforderungen entsprechende Anordnung und Aufstellung der verschiedenen Sammlungen ist darin nicht zu erreichen und damit entfällt der hohe erzieherische und belehrende Einfluss, den naturhistorische Museen auf die weitesten Kreise der Bevölkerung und namentlich auf die heranwachsende Jugend auszuüben vermögen. Wenn überdies die Sammlungen gerade in der Jahreszeit, wo sie am leichtesten besucht werden könnten, wegen der Unmöglichkeit die Räume zu heizen, geschlossen werden müssen, so sind dies Missstände, an deren Abstellung erntlich gedacht werden muss.

Diese und manche andere Erwägungen haben den General-Konservator und die Vorstandschaft der Akademie zu einer eingehenden Prüfung der Museumsfrage veranlasst. In einer im November abgehaltenen Besprechung, an welcher sich die Klassensekretäre der Akademie und sämtliche Sammlungs-Vorstände des Generalkonservatoriums beteiligten, kam man einstimmig zu der Ueberzeugung, dass den bestehenden Missständen vollständig nur durch einen Neubau auf einem von dem chemischen Laboratorium, dem botanischen Garten, den medizinischen Anstalten, der Universität und Staatsbibliothek nicht allzu entfernten Platz abgeholfen werden könne. Am geeignetsten, sowohl was Lage als Grösse betrifft, erschien uns das jetzt von der Türkenkaserne eingenommene Areal gegenüber der alten Pinakothek. Auf diesem könnten nicht nur die Bedürfnisse der naturhistorischen, sondern auch aller übrigen dem General-Konservatorium unterstellten Museen befriedigt werden. In einer Denkschrift wurde dieser Plan unserem hohen Chef, Sr. Excellenz dem Herrn Staatsminister Dr. v. Landmann unterbreitet und fand dort eine warme und wohlwollende Aufnahme. Leider haben die Verhandlungen mit dem Kriegsministerium zu keinem befriedigenden Resultat geführt, weil die Türkenkaserne in absehbarer Zeit nicht aufgegeben werden könne.

Wir betrachten diese Entscheidung nicht als eine endgiltige, sind wir uns doch bewusst, dass Fragen von so grosser Tragweite, denen tausend Schwierigkeiten im Wege stehen, nicht auf die erste Anregung hin gelöst werden; allein für die wissenschaftlichen Sammlungen des Staates handelt es sich hier, wie bereits mein Vorgänger Herr von Pettenkofer von diesem Platze aus betont hat, um eine Lebensfrage, die in kürzerer oder längerer Frist gelöst werden muss. Wir vertrauen auf das vielfach bewährte Wohlwollen und die Einsicht der königlichen Staatsregierung und den übrigen in Frage kommenden Faktoren und hoffen, dass uns das neue Jahrhundert auch die Erfüllung unserer berechtigten Wünsche entweder in der von uns befürworteten oder in irgend einer anderen befriedigenden Weise bringen wird.

Ich erteile nunmehr den Herren Klassensekretären das Wort zur Verlesung der Erinnerungsworte auf die im verflossenen Jahre verstorbenen Mitglieder.

Der Classensekretär der mathematisch-physikalischen Classe, Herr C. v. Voit, theilt mit, dass die mathematisch-physikalische Classe im vergangenen Jahre 12 Mitglieder durch den Tod verloren hat,

zwei einheimische: den Chemiker Wilhelm v. Miller und den Physiker Eugen v. Lommel;

dann 10 auswärtige Mitglieder: die Mathematiker Sophus Lie in Christiania und Eugenio Beltrami in Rom; die Physiker Wilhelm Gottlieb Hankel in Leipzig und Gustav Wiedemann in Leipzig; die Chemiker Robert Bunsen in Heidelberg, Charles Friedel in Paris und Edward Frankland in Reigate (England) und die Mineralogen und Geologen Franz v. Hauer in Wien, Othniel Marsh in New Haven und Karl Friedrich Rammelsberg in Berlin.

Wilhelm v. Miller.[1])

Am 1. März 1899 ist das ausserordentliche Mitglied der Akademie, der Chemiker Wilhelm v. Miller, im Alter von 50 Jahren, nachdem er nur etwas über drei Jahre unserem Kreise angehört hatte, gestorben. Allzu früh ist er noch in voller Kraft aus seinem Wirkungskreise geschieden; die Wissenschaft verdankt ihm eine Anzahl bedeutsamer Untersuchungen auf verschiedenen Gebieten der organischen Chemie, wodurch er sich eine geachtete Stellung unter den Fachgenossen errungen hat.

Er wurde am 9. Dezember 1848 in hiesiger Stadt als Sohn des vortrefflichen Erzgiessers Ferdinand v. Miller geboren. Es war ihm eine ungemein glückliche Jugendzeit beschieden. Ein schönes patriarchalisches, von gläubiger Frömmigkeit getragenes Familienleben verband die zahlreichen Kinder mit Vater und Mutter; bei allen Gliedern war ein lebhafter Sinn für die damals in München unter König Ludwig I. Führung mächtig emporstrebende bildende Kunst entwickelt, der durch den Verkehr der bedeutendsten Künstler in dem angesehenen Bürgershause erweckt und ausgebildet wurde. Dadurch erhielt der Knabe vielfache geistige Anregung, die Lust zum Lernen und zum Erwerb von Kenntnissen, aber auch einen lebensfrohen Sinn, die Liebe zu heiterer Geselligkeit und ein feines Verständniss für die Schönheiten der Natur auf den herrlichen elterlichen Besitzungen in den bayerischen Vorbergen. Dabei wurde neben der Ausbildung des Geistes auch die des Körpers durch allerlei Leibesübungen gepflegt.

Zuerst besuchte er die Lateinschule in Metten, hierauf das hiesige Max-Gymnasium, und bezog dann die Universitäten zu München und Berlin, woselbst er sich auf den Wunsch seines Vaters während drei Jahren dem Studium der Rechtswissenschaft widmete. Aber er that dies nur aus Pflichtgefühl dem

[1]) Siehe die Nekrologe von A. Lipp in dem Bericht über die k. technische Hochschule zu München für das Studienjahr 1898/99 und in der Chemikerzeitung vom 8. März 1899.

Vater zu Liebe und nicht aus innerem Drange, denn sein lebhaftes Interesse an der Natur zog ihn zu den Naturwissenschaften. Er hörte, wie damals viele Juristen, auch die Vorlesungen über Chemie von Liebig, durch welche er so sehr angeregt wurde, dass er sich von da an ganz dieser Wissenschaft zuwandte. Da in dem Liebig'schen Laboratorium keine Schüler aufgenommen wurden, so trat er in das unter des ausgezeichneten Erlenmeyer's Leitung in vollster Blüthe stehende chemische Laboratorium der hiesigen technischen Hochschule ein und begann sich mit der Hauptaufgabe der heutigen chemischen Forschung, dem Aufbau der complizirten Kohlenstoff-Verbindungen, der Aufhellung deren innerer Struktur, zu beschäftigen.

Bald hatte er eine Arbeit „über die chemischen Verbindungen im flüssigen Storax“, welches vanilleartig riechende Harz aus der Rinde des im Orient vorkommenden Storaxbaumes gewonnen wird, vollendet. Er wies darin mehrere bisher übersehene Verbindungen nach, so besonders Zimmtsäure-Phenylpropylester und Zimmtsäure-Aethylester und zwei sogenannte Storesine. Mit dieser Untersuchung, die ein Zeugniss für seine wissenschaftliche Reife lieferte, promovirte er an der hiesigen Universität (1874) als Doktor der Philosophie; er hatte seinen Vater von dem Wechsel des Studiums nicht unterrichtet, da er demselben zugleich einen Erfolg seiner Bestrebungen in der Chemie vorlegen wollte, und so überraschte er ihn mit der Einladung zu seiner Promotion, wornach ihm auch die freudige Zustimmung zu dem neuen Berufe zu Theil wurde.

Erlenmeyer, welcher durch den rastlosen Fleiss und das Talent für die Chemie auf Miller aufmerksam geworden war, machte ihn noch im gleichen Jahre zu seinem Assistenten im anorganischen Laboratorium. Ein Jahr darauf habilitirte er sich als Privatdozent für allgemeine Chemie an der technischen Hochschule mit einem Vortrage über die Alkohole und ihre Oxydationsprodukte.

Bei Behandlung einer Verbindung der Fettsäurereihe, der in der Baldrianwurzel vorkommenden Valeriansäure, mit Kalium-

permanganat in alkalischer Lösung erhielt er als Oxydationsprodukt die Hydrooxyvaleriansäure, welche bei der Destillation mit Schwefelsäure die mit der in der Angelikawurzel enthaltenen Angelikasäure isomere Dimethylacrylsäure lieferte.

Im Jahre 1879 gab er die Assistentenstelle auf, um andere Laboratorien kennen zu lernen. Er verweilte dabei längere Zeit in Berlin bei dem berühmten Chemiker A. W. Hofmann, der durch seine bahnbrechenden Arbeiten in erster Linie den Grund zu der farbenprächtigen Theerindustrie gelegt hat, wofür Miller grosses Interesse empfand. Es wurden daselbst von ihm zwei neue Farbstoffe, das sogenannte Rouge Français und der Biebericher Scharlach, untersucht, deren ziemlich verwickelte Zusammensetzung er aufklärte. Gemeinschaftlich mit Hofmann, der den jungen kenntnissreichen Chemiker schätzen lernte, stellte er durch Einwirkung von Salpetersäure mehrere Nitroverbindungen des Kresols, eines im Steinkohlentheer enthaltenen Stoffes, dar, drei Mononitrokresole und ein Dinitrokresol, so wie man schon früher aus den Phenolen die Nitrophenole erhalten hatte.

Mit reichen Erfahrungen nach München zurückgekehrt hielt Miller Vorlesungen über Farbstoffe und setzte seine wissenschaftliche Thätigkeit emsig fort. In Berlin war er mit dem jungen Chemiker Oskar Döbner, jetzt als Professor in Halle thätig, bekannt geworden und hatte eine innige Freundschaft mit demselben geschlossen; der Austausch der Gedanken führte die beiden zu gemeinsamer Arbeit über die synthetische Darstellung zahlreicher Chinaldinbasen, welche in naher Beziehung zu den für den Arzt so überaus werthvollen Alkaloiden der Chinarinde stehen. Skraup war es kurz vorher gelungen das Chinolin durch Behandlung von Nitrobenzol mit Anilin (Amidobenzol), Glyzerin und concentrirter Schwefelsäure darzustellen; indem die Beiden das Glyzerin durch Aldehyd ersetzten, gewannen sie eine Base, das methylirte Chinolin oder Chinaldin, dessen Constitution sie feststellten und das dadurch wichtig ist, dass das Methyl in demselben sich besonders leicht gegen andere Stoffe austauschen lässt.

Die Synthese des Chinaldins mit Döbner begründete Millers wissenschaftlichen Ruf; sie wurde der Ausgangspunkt für weitere umfassende Untersuchungen dieser Base nach den in der organischen Chemie gebräuchlichen Methoden, welche Miller theils noch mit Döbner, theils mit seinen Schülern ausführte. Bei Anwendung des dem Anilin homologen Toluidins erhielten sie die Methyl-Chinaldine; sie zeigten, dass ebenso wie das Anilin alle primären aromatischen Amidoverbindungen mit freier Orthostellung Chinaldine bilden. Indem sie weiterhin noch mit anderen Aldehyden die Chinaldin-Darstellung versuchten, wiesen sie nach, dass alle ungesättigten Aldehyde oder Aldole neue Chinaldine liefern. Es gelang ihnen ferner die Darstellung verschiedener Verbindungen des Chinaldins, z. B. von Nitro-Sulfo- und Hydroxyverbindungen sowie der Chinaldin-Carbonsäuren.

Mittlerweile war Miller nach dem durch Kränklichkeit veranlassten unerwarteten Rücktritt Erlenmeyers auf dringende Empfehlung des letzteren zum ordentlichen Professor der allgemeinen Chemie an der technischen Hochschule vorgerückt. Er erhielt dadurch die Gelegenheit mit Hilfe seiner Schüler den weiteren Ausbau des von ihm und Döbner erschlossenen Gebietes zu unternehmen.

Die Ergebnisse bei der Oxydation von Chinolinderivaten mit Chromsäure und mit Kaliumpermanganat lieferten einen werthvollen Beitrag zur theoretischen Chemie.

Indem er mit Kinkelin sich an die schwierige Ergründung des Chinins wagte, erhielt er die sogenannten Dichinoline; dann weitere Chinaldine aus bisher unbekannten Aldehyden und auch aus Gemischen zweier verschiedener Aldehyde. Bei Einwirkung von Chloral auf Chinaldin kam er mit Spady zu einer Chinolinacrylsäure.

Die fortgesetzten Untersuchungen über die Chinaldine führten ihn und Rohde zu einer weiteren Reihe werthvoller Aufschlüsse, nämlich zu der Darlegung der Bedingungen, unter denen sich die Verbindungen der sogenannten Inden-Gruppe bilden, welche Uebergangsglieder von dem Benzol zu dem

Naphtalin sind. Es wurde eine ganze Anzahl von Indenderivaten und verschiedene neue Zwischenprodukte hergestellt, wobei sich ergab, dass sowohl der Charakter der Seitenkette als auch die Art der Substitution einen ganz bestimmten Einfluss auf das Zustandekommen dieser Reaktion besitzen.

Eine weitere sich daran anschliessende Arbeit war die mit Plöchl über das Aldehyd-Grün. Dieser schwefelhaltige Farbstoff war schon früher durch Behandlung von Fuchsin in schwefelsaurer Lösung mit Aethyl-Aldehyd und unterschwefligsaurem Natrium gewonnen worden, aber die Natur desselben war bis dahin wegen der äusserst complicirten Zusammensetzung unaufgeklärt geblieben. Durch eine schwierige und mühevolle Untersuchung gelang es den beiden die Constitution des Farbstoffs festzustellen. Nach der Aufhellung der Chinaldinbildung war zu erwarten, dass auch bei der Herstellung des Aldehyd-Grün Chinaldingruppen sich bilden und dann noch Schwefel in die Verbindung eintritt. Miller und Plöchl zeigten, entgegen anderen Anschauungen, dass dabei nur eine der drei Amidogruppen zur Chinaldinbildung verwendet wird, die beiden anderen aber mit dem gleichzeitig entstehenden Aldol in Reaktion treten; in dem Aldehyd-Blau dagegen treten die drei Amidogruppen mit drei Aldol-Molekülen zusammen.

Die Arbeit über das Aldehyd-Grün gab den Anstoss zu einer Reihe aus Millers Laboratorium hervorgegangenen Untersuchungen über die Schiff'schen Basen, welche bei der Einwirkung von Aldehyden und Ketonen auf verschiedene primäre Amine entstehen. Aus ihnen gehen durch Aufnahme von Blausäure Amido- oder Aminonitrile hervor. Es wurden dabei wichtige Amidosäuren und die merkwürdigen Amidooxylsäuren, welche am Stickstoff ein Hydroxyl enthalten, gewonnen, sowie eine allgemeine Bildungsweise von substituirten Säureamiden gefunden. Indem sie die Blausäure zur Erkennung des symmetrischen und assymmetrischen Stickstoffs benützten, fanden sie neue stereoisomere Stickstoffverbindungen, nämlich die A[illegible]verbindungen, wodurch sie wesentlich zur Kenntniss der Stereoisomerie der Stickstoffverbindungen beitrugen.

Daran schlossen sich mit Rohde ausgeführte bedeutsame Untersuchungen über die chemische Constitution des in der Chinarinde enthaltenen Cinchonins an, welche als Vorarbeiten für eine künftige Synthese des kostbaren Arzneimittels Beachtung verdienen. Mit Rohde lieferte er auch Beiträge zur Kenntniss des in gewissen Insekten entstehenden Cochenille-Farbstoffs; sie zeigten, dass die darin enthaltene Karminsäure ein Derivat des Methyl-di-oxy-α-naphtachinons sein müsse und legten damit den Grund für die Aufklärung der Constitution derselben. Mit Slunk wies er in der Cochenille das zu den Fäulnissprodukten des Eiweisses gehörige Tyrosin nach.

Miller interessirte sich lebhaft für die merkwürdige Wirkung des elektrischen Stroms auf die chemischen Verbindungen. Man ist bekanntlich im Stande durch denselben die letzteren in ihre Componenten zu zerlegen und dadurch einen Einblick in ihre nähere Zusammensetzung zu gewinnen. Nachdem ihm die Errichtung eines mit allen Hilfsmitteln ausgestatteten elektro-chemischen Laboratoriums gelungen war, wurden darin manche lehrreiche Elektrolysen ausgeführt. So hat er z. B. mit Hofer den elektrischen Strom auf einige substituirte organische Säuren, besonders auf Hydrooxysäuren einwirken lassen und, wie Andere schon vorher, gefunden, dass der elektrische Rest dieser Verbindungen zu Aldehyden oder Ketonen oxydirt wird; es gelang ihnen aber in einzelnen Fällen weiter, diesen Rest einer anderen Verbindung synthetisch zu vereinen: denn sie bekamen durch die Elektrolyse von glykolsaurem und essigsaurem Kalium in geringer Menge Aethyl-Alkohol oder durch die Elektrolyse der Gemische von fettsauren Salzen und von Estersalzen mehrbasischer Carbonsäuren eine Synthese höherer Fettsäuren.

Miller war auch bestrebt sein Wissen für gemeinnützige Zwecke zu verwerthen.

Die durch den Nonnenschmetterling für unsere Wälder drohende Gefahr erregte ihn tief und veranlasste ihn und Harz nach einem Mittel dagegen zu sinnen; er empfahl das von A. W. Hofmann und ihm früher dargestellte Orthodinitro-

kresolkalium, welches noch in grosser Verdünnung die Raupen tödtet, den Pflanzen aber nicht schaden soll, zur Bespritzung der Bäume. Es erwies sich zwar das von ihm Antinonnin genannte Mittel bei der kolossalen Ausbreitung des Insekts als ohnmächtig, aber es scheint, wie andere ähnliche Stoffe, z. B. die Pikrinsäure (das Trinitrophenol), als kräftiges Antiseptikum gegen Fäulniss und Vermoderung von Holz etc. Verwendung finden zu können.

Der Alterthumsforscher Dr. Franz Bock hatte in seiner Geschichte der liturgischen Gewänder des Mittelalters (1859) angegeben, dass der Urstoff der prächtigen mittelalterlichen platten Goldfäden nicht mehr bekannt sei und auch mit welchem Bindemittel die Vergoldung auf denselben aufgetragen worden sei; es wäre daher wichtig die im 15. Jahrhundert verloren gegangene Technik wieder zu finden. Diese „cyprischen" Goldfäden, mit denen die kostbaren Brokate des 13. bis 15. Jahrhunderts gefertiget wurden, zeichnen sich durch ihre Weichheit und ihren milden Glanz von den modernen, durch Vergolden steifen Silberdrahtes hergestellter Fäden aus. Der Kunstsinn Millers liess ihn die Aufgabe des Wiederauffindens der alten Verfertigung der Goldfäden lebhaft erfassen, und er stellte mit Harz (1882) eingehende Untersuchungen und Studien darüber an. Sie versuchten sich auch in der praktischen Ausführung der Fäden mit selbst ersonnenen Apparaten. Sie haben aber übersehen, dass der kunstverständige berühmte Wiener Physiologe und Mikroscopiker Ernst Brücke schon im Jahre 1865 (Mittheilungen des k. k. österreichischen Museums für Kunst und Industrie 1865 Bd. I S. 68—71) die genauesten Mittheilungen hierüber gemacht und dargethan hatte, dass die Fäden aus dem Bauchfell oder dem Peritonalüberzug (nicht der Submukosa) des Schlachtviehs als Grundlage für die Vergoldung bestehe, hie und da auch aus feinem Leder; aber das Bindemittel, durch welches das Gold auf dem Häutchen befestiget wurde, blieb ihm unbekannt. Es hat dann weiterhin der Professor Dr. Joseph Karabacek an der Wiener Universität in seinem Werke über die persische Nadelmalerei Süsandschird

(1881 S. 18—21) zuerst das historische Wesen dieser missverständlich „cyprische" benannten Fäden beleuchtet; sie haben mit Cypern nichts zu thun, denn diese Insel war nur Durchgangsstation für das aus Egypten und der Levante kommende Gespinnste. Es war ihm auch das Bindemittel und die ganze Zubereitung der Fäden kein Geheimniss: er hat dieselben schon vor 19 Jahren nach den arabischen Quellen hergestellt.

Ueberblickt man die wissenschaftlichen Leistungen Miller's, so wird man sagen müssen, dass er durch seine Begabung für die Forschung in der Chemie der verwickelten Kohlenstoff-Verbindungen und durch seinen unermüdlichen Fleiss werthvolle Beiträge zum Ausbau dieses Theils der Chemie geliefert hat, wenn er auch dieselbe nicht in neue Bahnen lenkte. Indem er eine grosse Anzahl solcher Verbindungen dem Verständniss erschloss, hat er sich um die Wissenschaft Verdienste erworben, welche stets dankbare Anerkennung finden werden.

Er war ausserdem ein beliebter Lehrer an der technischen Hochschule von klarem, anregendem Vortrag und ein gewandter Experimentator. Durch persönliche Liebenswürdigkeit gewann er die Liebe seiner Schüler, denen er Berather und Freund war.

Das was ihn besonders auszeichnete, war die Energie seines Wesens, durch welche er erreichte, was er erstrebte, und seine Schaffenslust. Sein Vermögen gab ihm die Mittel seinen Sammeleifer zu befriedigen: so hat er die Bildnisse der berühmten Chemiker seit den ältesten Zeiten und von allen Ländern, weit über 1000, zusammengebracht, und er beabsichtigte an der Hand derselben einmal eine illustrirte Geschichte der Chemie zu schreiben.

Seit September 1898 zeigte er nicht mehr die gewohnte Frische. Es bildete sich ein Darmleiden aus, das ihn am Beginne der Vorlesungen hinderte. Nach einer vorgenommenen vorläufigen Operation erholte er sich anscheinend etwas und begann sogar am Anfang des Jahres 1899 seine Vorlesungen

wieder, aber seine Kraft war gebrochen. Am 21. Februar begab er sich, um seiner Familie den Schmerz des Abschieds zu ersparen, direkt vom Hörsaal weg in die Klinik zu der zweiten grösseren Operation, der er muthvoll entgegen gieng. Am dritten Tage erlag er einer rasch eingetretenen Herzschwäche. Am 3. März ist er unter grosser Betheiligung in dem Familiengrabe beigesetzt worden; sein Bild wird bei seinen Freunden in treuer Erinnerung fortleben.

Eugen v. Lommel.

Am 19. Juni 1899 verschied nach längerem Leiden im Alter von 62 Jahren das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Classe unserer Akademie, der Physiker Eugen v. Lommel. Ein ungemein kenntnissreicher Gelehrter und feiner Forscher, der die Physik, besonders auf dem Gebiete der Lehre vom Lichte, um viele wichtige Beobachtungen und Erklärungen bereichert hat, ist mit ihm dahingegangen.

Er kam in Edenkoben in der Rheinpfalz am 19. März 1837 zur Welt. Sein Vater war daselbst als praktischer Arzt thätig, später als Bezirksarzt in Hornbach. Die Familie lebte mit den vier Söhnen, von denen Eugen der älteste war, in recht bescheidenen Verhältnissen. Er besuchte zuerst die Lateinschule in Edenkoben, dann das Gymnasium in Speier: man hatte ihn daselbst zu kleinen Bürgersleuten in Kost und Wohnung gegeben, und als der jüngere Bruder auch nach Speier kam, mussten die beiden mit einem Bette sich begnügen. Obwohl er schon früh ganz sich selbst überlassen war, kam er doch mit regstem Eifer seinen Verpflichtungen in der Schule nach: die Wissbegierde und der Fleiss, welche ihm Zeit seines Lebens blieben, zeichneten ihn damals schon aus und bewahrten ihn vor Ausschreitungen. Er nahm es ernst mit dem, was er betrieb, und gieng gerne seine stillen Wege; das ihm zukommende Taschengeld verwendete er zu dem Ankauf von Büchern, aus denen er lernen konnte.

Bald entwickelte sich bei ihm die Neigung zu den Naturwissenschaften, aber anfangs mehr für die beschreibenden, insbesondere für die Pflanzen und Thiere; um sich naturwissenschaftliche Kenntnisse zu verschaffen, besuchte er die Abendkurse an der Gewerbeschule. Bei dem lebhaften Interesse für die Formen und die Lebensweise der Thiere und Pflanzen zeichnete und malte er dieselben in seinen Freistunden. So hat er als 14 jähriger Knabe den grossen Atlas von Oken's Naturgeschichte des Thierreichs mit seinen 116 colorirten Tafeln in Grossquart auf das Sorgfältigste, von dem Original nicht unterscheidbar, abgezeichnet, da er die Mittel zur Anschaffung des theuern Werkes nicht besass; auch liegen von ihm noch zwei reichhaltige, grösstentheils nach der Natur charakteristisch und farbenprächtig gemalte Pflanzenbücher vor. Nur eine seltene Ausdauer und eine besondere Liebe zur Sache konnte die kolossale Aufgabe bewältigen; daher kam es auch, dass er die Pflanzen und Thiere genau kannte und über ihre Merkmale und Eigenschaften Bescheid zu geben wusste.

Dass er mit solchen Dingen seine übrigen Studien nicht versäumte, das geht daraus hervor, dass er bis an sein Lebensende zur Erholung und Erbauung die lateinischen und griechischen Klassiker in der Ursprache las und namentlich Homer ihm stets ein treuer Begleiter war. Der Physiker Lommel hat das humanistische Gymnasium, obwohl er manche Mängel an ihm erkannte, als die richtige Schule des Geistes angesehen, wie seine in Erlangen (1881) gehaltene Rektoratsrede: „über Universitätsbildung“ darthut. Ich weiss noch von anderen Naturforschern das Gleiche; so hat mein väterlicher Freund, der Chemiker Schönbein in Basel, nach der strengen Arbeit des Tages geistige Erfrischung in den Oden des Horaz gesucht. Auch von dem Chemiker Bunsen wird berichtet, dass er bis in die letzte Zeit seines Lebens Cicero's Briefe und Sueton las. Es ist wahrlich ein gänzlich unbegründetes und gedankenlos gesprochenes Wort, dass die Naturforschung zu rohem Materialismus führe und ideale Auffassungen zerstöre; die solches sagen, wissen nicht, welches reine Glück in der Forschung nach der

Wahrheit und in der fortschreitenden Erkenntniss der
erscheinungen liegt und wie dabei die Gedanken auf
gelenkt werden, wenn dadurch auch nach und nach
ältere Vorstellungen der Menschheit über die Welt
unhaltbar erweisen.

17½ Jahre alt (1854) absolvirte Lommel mit der
vorzüglich das Gymnasium zu Speier; durch den Einfluss
ausgezeichneten Professors der Mathematik Friedr. Schw
der sich durch seine hervorragenden Untersuchungen über
Beugungserscheinungen des Lichtes einen bedeutenden Nam
gemacht hat und auch correspondirendes Mitglied
Akademie war, hatte er erst in der obersten Classe ein
teresse an der Mathematik bekommen, so dass er die
matische Aufgabe bei der Prüfung glänzend löste und
seinem Lehrer besonders belobt wurde; er erzählte spä
öfters, wie er anfänglich nur wenig Neigung zu dieser Wiss-
schaft besass, aber durch die klare, fesselnde Darstellung
Schwerd's zu der Ueberzeugung gekommen sei, dass die Kennt-
niss der Mathematik für die Erfassung der Naturerscheinungen
nothwendig ist. Die häufig einseitige Uebung des Gedächt-
nisses in der Schule ohne das volle Verständniss des Gelernten
ist vielfach die Ursache der späteren Klagen an der Universität;
es soll in der ersteren nur der Geist befähiget werden, richtig
zu denken; dabei kommt es nicht so sehr auf die Organisation
der Schule oder das Lehrfach an, als viel mehr darauf, dass
irgend ein guter Lehrer bei dem Schüler die Lust am Denken
erweckt. In solcher Weise ist Lommel durch Schwerd zur
Mathematik und Physik geführt worden, trotz seiner Neigung
zur Zoologie und Botanik. Er ist ein ausgezeichneter Mathe-
matiker geworden, der die Mathematik mit grösstem Geschick
zur Lösung physikalischer Probleme anwandte.

Er bezog nun die Universität München, wo er im ersten
Jahre als Candidat der Philosophie und dann als Candidat der
Mathematik inscribirt war; er hörte Vorlesungen über Mathe-
matik, Physik, Chemie und Astronomie bei Seidel, Jolly, Liebig,
Kobell und Lamont. Wegen seiner beschränkten Mittel konnte

zu dieser Zeit nicht daran denken die akademische Laufbahn zuschlagen, er wollte sich nur für die Lehramtsprüfung aus Mathematik und Physik vorbereiten; desshalb machte er ch nicht die Uebungen im physikalischen oder chemischen boratorium mit wie Jeder, der sich der Physik widmen will; r das mathematische Seminar bei Seidel besuchte er eifrigst. ı keinem seiner Lehrer trat er in nähere Beziehungen, auch cht zu dem Physiker Jolly; gerne verkehrte er mit dem päteren Professor Philipp Zöller, der auch ein Rheinpfälzer var und auf Anregung Liebig's agrikulturchemische Untersuchungen in dessen Laboratorium machte. Lommel beschränkte sich jedoch nicht auf sein Fach, sondern suchte sich uch eine umfassende allgemeine Bildung zu verschaffen; er hörte Collegien über Philosophie z. B. bei dem geistreichen Lasaulx, erwarb sich ein feines Verständniss für die schöne Literatur, namentlich für die grossen deutschen Dichter, für die klassische Musik und für die bildende Kunst; auf der obersten Galerie des Hoftheaters, in den Concerten der musikalischen Akademie und in den Kunstsammlungen war er häufig zu finden. So konnte er sich sagen, dass er die vierjährige Studienzeit an der Universität gut angewandt habe, und er erinnerte sich später auch gerne daran.

Nachdem er im Herbst 1858 die Lehramtsprüfung mit der Note „sehr gut" bestanden hatte, nahm ihn der vermögende Weingutsbesitzer und Landtags-Abgeordnete Buhl in Deidesheim als Hauslehrer für seinen jüngsten Sohn auf. Der unterrichtete junge Lehrer war in der Familie seines Schülers und in dem angeregten geselligen Kreise, der daselbst verkehrte, sehr freundlich aufgenommen und er lernte dort die angesehensten Männer der Pfalz und Politiker wie Heinrich v. Gagern, Bassermann etc. kennen.

Im Frühjahr 1860 erhielt er die Stelle eines Lehrers der Mathematik und Physik an der Kantonsschule in Schwyz, die er fünf Jahre inne hatte. Es war an dem herrlich gelegenen Orte eine schöne Zeit für ihn, er übte als Lehrer eine zusagende Thätigkeit aus und er fieng an wissenschaftlich zu arbeiten,

zumeist Mathematisches, aber auch Physikalisches über optische Probleme, wozu er wohl durch die Verpflichtung in der Physik zu unterrichten gebracht worden war.

Es wird erzählt, der damalige verdiente eidgenössische Erziehungsrath Kappeler habe erfahren, dass die aus der Kantonsschule zu Schwyz an das Züricher Polytechnikum kommenden Studirenden in der Mathematik und Physik besonders gut unterrichtet seien; dies habe ihn veranlasst den Lehrer Lommel aufzufordern nach Zürich zu kommen. Weil aber vorerst noch keine Stelle an der Hochschule frei war, nahm er einstweilen die Anstellung als Oberlehrer an der Kantonsschule in Zürich an und habilitirte sich, nachdem er vorher (1863) den Doktorgrad erworben hatte, an der Universität und dem Polytechnikum zu Zürich (1865). Besonders gerne war er in dieser Stadt mit ihren ausgezeichneten Hochschulen; er gewann das Zutrauen strebsamer Schüler und trat in anregenden Verkehr mit bedeutenden Männern: mit Gottfried Keller, Friedrich Theodor Vischer, Johannes Wislicenus, Theodor Billroth, Friedrich Emil Prym, Adolf Fick und Anderen; auch setzte er seine wissenschaftliche Thätigkeit fort.

Trotzdem nahm er im Herbst 1867 einen Ruf als Professor der Mathematik und Physik an die land- und forstwirthschaftliche Akademie zu Hohenheim in Württemberg an. In dem einsamen Orte fand er wohl eine lohnende Beschäftigung, jedoch nicht den gewohnten Umgang mit Männern anderer Richtung und nicht den Genuss der Kunst. Er wanderte daher jeden Samstag über die Höhen, welche das Schloss Hohenheim von Stuttgart trennen, dorthin und Montag Morgens wieder zurück; namentlich in der Familie des Physikers Zech, wo er wieder Vischer traf, war er als Freund des Hauses aufgenommen.

Lommel galt längere Zeit unter seinen Fachgenossen mehr als Mathematiker, obwohl er eine Anzahl bemerkenswerther physikalischer Arbeiten herausgegeben hatte, aber nach und nach entwickelte er sich durch eigene Kraft zum vollendeten Physiker.

Da kam im Herbst 1868 die Berufung als Professor der Physik an Stelle des vortrefflichen Beetz an die Universität Erlangen, die ihn innerlich beglückte, weil damit der Traum seiner Jugend sich erfüllte. Diese ruhige, aufstrebende, dem Lärm und den Anforderungen grosser Städte entrückte Universität war für ihn, den stillen Gelehrten, das richtige Arbeitsfeld. Er galt bald als eine der ersten Kräfte der Hochschule, entfaltete eine erfolgreiche Lehrthätigkeit, war geachtet und geliebt von seinen Schülern und Collegen, wie aus den ehrenden Worten, welche der Rektor der Universität Erlangen und der Dekan der philosophischen Fakultät derselben an seinem Grabe sprach, hervorgieng, und seine wissenschaftliche Arbeit war eine höchst fruchtbare. Die 18 Erlanger Jahre sind in letzterer Beziehung wohl als der Höhepunkt seines Schaffens anzusehen.

Und doch sollte er noch einmal den Ort seiner Wirksamkeit wechseln, nachdem er schon 1869 einen an ihn ergangenen Ruf an das Polytechnikum in Zürich abgelehnt hatte; er erhielt (1886) den ehrenvollen Ruf an die hiesige Universität als Nachfolger Jolly's, den er nicht ausschlagen zu dürfen glaubte. Er hat in den 13 Jahren der hiesigen Thätigkeit sein segensreiches Wirken als Lehrer und Forscher fortgesetzt; aber die vielen Abhaltungen an der grossen Universität, namentlich die die wissenschaftliche Arbeit geradezu lähmenden Prüfungen, hinderten auch ihn zu seinem Schmerze so viel Zeit der Forschung zu widmen als er wünschte. Er war ausserdem auch Conservator des physikalisch-metronomischen Instituts des Staates und technisches Mitglied der Normal-Aichungs-Kommission. Ein werthvolles Erbe hat er uns hinterlassen in dem 1894 fertig gestellten physikalischen Institut, das, nach seinen Angaben erbaut, als eine vortreffliche Anstalt bezeichnet werden muss. —

Ueber die wissenschaftlichen Errungenschaften, welche wir Lommel verdanken, habe ich einen competenten Physiker, den verehrten Collegen Hermann Ebert, um genauere Angaben gebeten; er hat sie mir in Folgendem in klarer, allgemein verständlicher Weise zusammengestellt, wofür ich ihm besten Dank schulde.

Im Vordergrunde des Interesses stehen Lommels optische Untersuchungen. Die mannigfachen Probleme der Lichterscheinungen, deren Lösung die bahnbrechenden Arbeiten eines Fraunhofer, Fresnel, Cauchy und anderer grosser Forscher der Nachwelt noch in grosser Zahl überlassen mussten, übten auf Lommel vom Beginn seiner Laufbahn an einen besonderen Reiz aus. Den grössten Erfolg errang er auf dem Gebiete, welches am längsten einer vollkommenen theoretischen Durchdringung widerstanden hatte, demjenigen der Erscheinungen der Zerstreuung oder der Dispersion und der Absorption des Lichtes. Seit Newton kannte man die verschiedene Brechbarkeit der verschiedenen Farben, welche bei der Brechung durch ein Prisma oder durch einen Wassertropfen zu der farbenprächtigen Farbenzerlegung in ein Spektrum oder zum Regenbogen führen. Man wusste auch, dass die Stärke der farbenzerstreuenden Kraft, die Dispersion, bei verschiedenen Substanzen eine sehr verschiedene ist, und hatte bemerkt, dass dieselbe mit dem innersten molekülaren Baue der brechenden Substanz irgendwie zusammenhängen müsse. Zwar hatte Cauchy eine Formel angegeben, welche gestattete mit Hilfe mehrerer für jede Substanz besonders zu bestimmender Constanten die Dispersion für die verschiedenen Farben mit einer gewissen Annäherung wirklich darzustellen; die Cauchy'sche Dispersionsformel war indessen mehr nur als Interpolationsformel zu betrachten, welche keinen näheren Aufschluss über die Mechanik des in Rede stehenden Phänomens gestattete. Noch weniger gelang es eine andere Erscheinung in die bereits hoch entwickelte Undulationstheorie des Lichtes einzuordnen, nämlich die der Absorption des Lichtes, welche in so ferne wiederum auf ein Miteingreifen der kleinsten Bausteine der lichtver-

schluckenden Medien hinwies, als jede Substanz vorwiegend nur gewisse Strahlengattungen absorbirt, andere aber mehr oder minder ungeschwächt durch sich hindurchgehen lässt. Schon hierdurch war ein gewisser Zusammenhang zwischen Dispersion und Absorption angedeutet, der noch überraschender hervortrat durch die Entdeckung der sogenannten „anomalen Dispersion“ durch Christiansen und Kundt bei Substanzen, welche engbegrenzte Spektralbezirke besonders stark absorbiren, d. h. eine elektive Absorption zeigen, auch ganz abweichende Ablenkungen der der absorbirten Farbe benachbarten Bestandtheile des Spektrums aufwiesen, wenn man aus der absorbirenden Substanz ein Prisma fertigt und mit dessen Hilfe das Licht analysirt. Was bei den nur das Ultraviolett stark absorbirenden Glasprismen undeutlich angedeutet war, trat hier klar hervor: ein Erklärungsprinzip, welches die Dispersionserscheinungen deuten sollte, musste auch über die Erscheinungen der Absorption, über die anomale Dispersion und die elektive Lichtabsorption gleichzeitig Rechenschaft geben.

Dieses Prinzip gefunden, es nach allen Seiten hin ausgestaltet und die in Rede stehenden Phänomene sämmtlich mit einem Minimum von Grundannahmen einwandfrei erklärt und damit der Theorie eine neue Provinz erobert zu haben, ist das ausserordentliche Verdienst Lommel's. Sein Ruhm wird nicht dadurch verdunkelt, dass er Vorläufer hatte, welche dem Ziele nahe waren, wie namentlich Sellmeier, noch dadurch, dass nur wenig vor ihm Hermann v. Helmholtz und wenig nach ihm Ketteler auf ähnlichem Wege zum gleichen Ziele gelangten. Die genannten Forscher haben vollständig unabhängig von einander und mit verschiedenen Methoden gearbeitet.

Das Prinzip der neuen Dispersionstheorie führt zum ersten Male das körperliche Molekül selbst rechnend in die optische Theorie ein und trägt damit der individuellen Beschaffenheit des die Lichtschwingungen übermittelnden Mediums Rechnung; es bewegen sich also darnach nicht die Aethertheilchen allein, sondern es wirken überall die Körpertheilchen mit. Tritt eine Lichtwelle aus Luft in ein Glasprisma ein, so findet sie hier

nicht mehr die gleichen Bedingungen wie in der Luft vor; in jeder Raumeinheit sind in den alles durchdringenden Lichtäther materielle kleinste Theile in viel grösserer Dichte eingelagert als vorher in der Luft; diese müssen die Bewegungen in der ankommenden Lichtwelle beeinflussen, sie werden selbst zum Theil mit in diese Bewegungen hineingezogen werden. Nun werden aber die Moleküle verschiedener Körper die einzelnen an sie herantretenden Schwingungen in sehr verschiedenem Grade aufnehmen, und ebenso werden die Moleküle ein und desselben Körpers die verschieden raschen Schwingungen, welche in einem Wellenzuge weissen Lichtes enthalten sind, je nach ihren „Eigenschwingungen", aufnehmen, ganz ähnlich wie eine Stimmgabel aus einem Tonwellenzuge nur auf diejenige Schwingung anspricht, welche ihrer Eigenschwingung entspricht. Die Moleküle werden also gewisse Schwingungen aufnehmen und deren Energie zu ihrer eigenen Anregung verwenden d. h. die entsprechende Lichtart absorbiren. Jetzt haben wir aber nicht mehr freien Aether, welcher schwingt, sondern Aether, welcher mit mitschwingenden Molekülen beladen ist, d. h. gewissermassen ein Medium von geänderter optischer Dichte. Von dieser hängt aber die Farbenablenkung, welche bei der Brechung eintritt, und damit die Dispersion ab. Wir sehen hier schon den Zusammenhang zwischen dem elektiven Absorptionsvermögen und der Farbenzerstreuung hervorleuchten. Der genauere Einblick in denselben ist natürlich nur an der Hand der von Lommel mit wunderbarer Klarheit und Eleganz entwickelten Formeln möglich. Das Resultat derselben, die Lommel'sche Dispersionsformel, hat sich allen experimentellen Prüfungen gegenüber selbst für weit abgelegene Spektralgebiete bewährt. Auch werden die Errungenschaften der Lommel'schen Untersuchungen nach dieser Richtung hin nicht dadurch in Frage gestellt, dass man heute aus guten Gründen die Vorstellungen der elastischen Optik hat fallen lassen und an Stelle der Verrückungen und Zugspannungen, mit denen diese operirte, elektrische und magnetische Zwangs- oder Polarisationszustände setzt, welche sich, periodisch mit Ort und

Zeit veränderlich, durch das Feldmedium hindurch fortpflanzen. Neuere Untersuchungen haben gezeigt, dass die meisten Ergebnisse der älteren Optik von diesem Wandel der Vorstellungen unberührt bleiben, da die Formen der Differentialgleichungen, auf die man in beiden Fällen geführt wird, die gleichen sind und nur die eintretenden Constanten verschiedene Bedeutung haben. —

Die Lommel'sche Grundvorstellung von der Wechselwirkung der Moleküle und dem Lichtäther hatte sich schon vor der Arbeit über die Dispersion noch nach einer anderen Richtung hin in Lommel's eigenen Händen als höchst fruchtbar erwiesen: gegenüber den von Stokes untersuchten Erscheinungen der Fluorescenz und Phosphorescenz, sowie später in den Arbeiten über die Lichtzerstreuung und Lichtreflexion bei diffus zerstreuenden und reflektirenden Körpern. Schon in seiner ersten physikalischen Publikation aus Schwyz wurde die Fluorescenz in Analogie mit den Resonanz-Erscheinungen des Schalls gebracht. Hier waren zunächst die Beobachtungsthatsachen selbst erst noch nach den verschiedensten Richtungen hin zu klären und zu vervollständigen; gerade in diesen Gebieten verdanken wir Lommel eine grosse Fülle von neuem Beobachtungsmaterial über fluorescirende Substanzen, darunter die Entdeckung der Fluorescenz von Dämpfen und die Anwendung von Platten aus phosphorescirendem Material zum Studium und zur Photographie des infrarothen, unser Auge nicht erregenden, unsichtbaren Theils des Spektrums. Das Nachleuchten z. B. von Bodmain'scher Leuchtfarbe wird in eigenthümlicher Weise beeinflusst durch die besonders durch ihre Wärmewirkungen ausgezeichnete infrarothe Strahlung, so dass, wenn Lücken in dem entsprechenden Spektralgebiete sich finden, wie sie z. B. im Sonnenspektrum durch die Absorption des Wasserdampfes in der Erdatmosphäre hervorgerufen werden, dieselben durch den Leuchtschirm direkt angezeigt werden; wird dieser auf eine photographisch empfindliche d. h. für die sichtbaren Strahlen des Schirmes, nicht aber für die infrarothen der den Schirm erregenden Strahlen empfänglichen

Platte aufgelegt, so kann man das infrarothe Spektrum, wenn auch nur indirekt, sogar photographiren. Die Theorie dieser complicirten Erscheinungen der Fluorescenz muss immer von gewissen vereinfachenden Annahmen ausgehen; soweit diese zutreffen, ist die Lommel'sche Theorie der Fluorescenz- und Phosphorescenz-Erscheinungen unzweifelhaft richtig.

Bezüglich dieser Annahmen selbst scheint aber heute nur diejenige einer Dämpfung der erregten Schwingungen im Moleküle selbst, die der Geschwindigkeit proportional ist, eine weiter tragende Bedeutung zu haben; die sehr merkwürdigen Analogien, auf die Lommel dabei geführt wurde, zwischen akustischen und optischen Erscheinungen, seine Ergebnisse über optische Resonanz- und Differenz- oder Combinationsschwingungen, zeigen sich nach neueren Beobachtungen nicht in allen Stücken mit den Versuchen in Uebereinstimmung. Indessen fragt es sich dabei immer, in wie weit die nachmessende experimentelle Forschung auch wirklich im Stande war, die von der Theorie geforderten Versuchsbedingungen genau zu realisiren. Jedenfalls wird auch von den Gegnern der Lommel'schen Theorie der Fluorescenz-Erscheinungen anerkannt, dass der von Lommel zuerst in die Lehre vom Leuchten eingeführte Gedanke einer Dämpfung, welche die Moleküle beim Schwingen erfahren, bereits die schönsten Früchte gezeitiget hat und von fundamentaler Bedeutung für alle hierher gehörenden Erscheinungen ist. —

In einem dritten grossen Gebiete der Optik sehen wir Lommel nicht als Bahnbrecher, wohl aber als einen mit seinen Arbeiten ein ganzes grosses Gebäude abschliessenden und vollendenden Forscher thätig: er war es, welcher in die Lehre von den Beugungserscheinungen gewissermassen die Schlusssteine einfügte und dieses Gebiet einer Vollkommenheit in der Ausgestaltung und Klarheit entgegenführte, dass es heute als Musterbild eines abgeschlossenen Lehrgebäudes dasteht, wie wir ihm nur wenige in den exakten Wissenschaften zur Seite zu setzen haben. Auch hier leistete Lommel nicht nur als Theoretiker Vollendetes, sondern er hat auch gleichzeitig mit

unermüdlicher Sorgfalt und durch feinste Messungen jedes einzelne Ergebniss der Theorie an den Erscheinungen selbst experimentell nachgeprüft. Bis zu dem Jahre 1884 musste die Theorie der Beugungserscheinungen vor Schwierigkeiten Halt machen, die unüberwindlich erschienen. Für den Fall, dass die einfallende Lichtwelle eine ebene ist, und der auffangende Schirm in unendlicher Entfernung von dem beugenden Objekte entfernt ist, also für parallele Strahlen, hatten schon Fraunhofer, Schwerd und Airy das Problem für den Fall einer kreisförmigen Oeffnung oder eines kreisförmigen undurchsichtigen Beugungsschirmes gelöst. Für die allgemeineren Fälle eines nicht parallelen Strahlenganges und für endliche Entfernungen der Auffangfläche war Fresnel auf eine Bemerkung von Poisson hin wenigstens für die axial im Beugungsraum gelegenen Punkte zu überraschenden Ergebnissen gelangt. Für den allgemeinsten Fall, den der Berechnung der Intensität des gebeugten Lichtes für irgend einen Punkt, wurden indessen die Formeln so verwickelt, dass vor Einführung eines neuen Gedankens jeder weitere Fortschritt als aussichtslos erscheinen musste. Vollends fehlte es an einer einheitlichen umfassenden Theorie, welche nicht nur die genannten Spezialfälle, sondern auch den viel allgemeineren der Herrschaft des Calküls hätte unterwerfen können, bei dem der beugende Schirm irgend welche von geraden Linien umgrenzte Figuren bildete. Da erschienen die beiden grossen Arbeiten von Lommel in den Abhandlungen unserer Akademie vom Jahre 1884 und 1886, welche die bezeichneten Probleme in einer solchen Weise lösten, dass sie für alle Zeiten erledigt erscheinen, d. h. in den genannten Gebieten wohl kaum Nennenswerthes der Nachwelt zu thun mehr übrig gelassen ist. Wenigstens stimmen die Ergebnisse der Theorie so genau mit der Wirklichkeit zusammen, als man nur irgend erwarten kann, was Lommel durch seine Messungen nachwies; und dabei haben die Formeln eine Eleganz, welche verblüffend wirken, wenn man auf die langathmigen Reihenentwickelungen früherer Versuche das Problem zu lösen zurückblickt. Lommel zeigt sich hier nicht

nur als vorzüglicher Physiker, sondern auch als höchst gewandter Mathematiker, besonders durch seine genaue Kenntniss der sogenannten Bessel'schen Funktionen.

Es sei gestattet an dieser Stelle einen kurzen Blick auch auf seine mathematischen Arbeiten zu werfen. Die Analysis war ihm mehr als nur Mittel zum Zweck bei seinen physikalischen Forschungen. Zahlreiche Abhandlungen sind rein mathematischen Fragen gewidmet. Namentlich sind es die überaus merkwürdigen Funktionsgebilde der erwähnten Bessel'schen oder Cylinderfunktionen, die ihn mit ihren fruchtbaren Recursionseigenschaften, den auch praktisch wichtigen Differentialgleichungen, die durch sie gelöst werden, sowie mit ihren merkwürdigen Integraleigenschaften immer aufs neue fesselten, denen er auch eine besondere kleine Monographie widmete. Wenn auch die moderne Funktionentheorie bei der Betrachtung der genannten Eigenschaften wesentlich andere Wege einschlägt, so wird doch auch der Mathematiker die zahlreichen Tafeln willkommen heissen, welche Lommel mit ausdauerndem Fleisse für diese Funktionen berechnete. Was er trieb, trieb er gründlich bis aufs Letzte. Seine grosse Vertrautheit mit diesem schwierigen Hilfsmittel liess ihn nun aber auch umgekehrt die der Weiterentwicklung der Beugungstheorie den Weg sperrenden, scheinbar unüberwindlichen Schwierigkeiten mit einer erstaunlichen Sicherheit besiegen. —

Mit den genannten Hauptarbeiten sind die Lommel'schen Untersuchungen aus dem Gebiete der Optik noch bei weitem nicht erschöpft; es wäre jetzt eine grosse Reihe von Einzelforschungen über Interferenzerscheinungen, Doppelbrechung, Polarisation und Cirkularpolarisation, Oberflächenfarben, Dichroismus, scroboscopische und entoptische Erscheinungen zu nennen, welche alle dauerndes Gut der Wissenschaft bleiben werden und die der Fachmann überaus schätzt, deren Besprechung im Einzelnen aber zu weit führen würde.

Es mag nur erwähnt werden, dass er seine optischen Lehren auch auf die Lichterscheinungen in der Atmosphäre anwandte: zur Erklärung des Regenbogens, der Dämmerungs-

farben, des sogenannten Heiligenscheins. Unter dem Einfluss seines Freundes Philipp Zöller entstand die Arbeit über die Beziehungen zwischen dem Lichte und dem grünen Farbstoff der Pflanzen, dem Chlorophyll, wobei sich zeigte, dass die mittleren rothen Strahlen das vegetative Wachsthum noch zu unterhalten im Stande sind, die äusseren aber nicht mehr.

Bemerkt sei noch, dass sich Lommel hier auch als sehr geschickter Construkteur von Apparaten zeigte; eine Reihe der von ihm eingeführten optischen Untersuchungsmittel wird für immer zu dem Bestande eines wohl eingerichteten physikalischen Laboratoriums gehören. —

Wer auf einem Gebiete der Physik so hervorragendes geleistet hat, von dem kann man billiger Weise nicht verlangen, dass er auf anderen Gebieten ebenfalls bahnbrechendes vollbringe. So sind die Arbeiten Lommel's über elektrische und magnetische Gegenstände geringer an Zahl gegenüber seinen optischen Untersuchungen. Da sich gerade diesen Problemen das Interesse der neueren Zeit aber besonders zuwendete, so mag es damit zusammenhängen, dass Lommel's wissenschaftliche Persönlichkeit in den letzten Jahren seines Lebens etwas zurücktrat, wobei freilich auch nicht zu vergessen ist, dass eine immer mehr anwachsende Amtsthätigkeit, sowie das unheilvolle Leiden, welches an seiner Schaffenskraft zehrte, ihm die Sammlung und Vertiefung, welche nun einmal zur Forscherarbeit unerlässlich ist, mehr und mehr verminderten. Aber regsten Antheil auch an der neuen Entwickelung der Elekricitätslehre hat er unzweifelhaft genommen, und wir haben in seinen wundervollen Versuchen über Magnetkraftlinien und über die äquipotentiellen Linien stromdurchflossener Platten ein treffliches Zeugniss hierfür noch aus dem Jahre 1893. Werden durch plattenförmig gestaltete metallische Leiter vermittelst zweier an zwei beliebigen Punkten angebrachten Zuleitungen galvanische Ströme hindurchgeleitet, so verbreiten sich die Stromfäden nach Gesetzen, welche schon das Interesse von Kirchhoff wachriefen und deren Verfolgung diesen selbst sowie Carl Neumann und Andere zur Entwickelung eines folgenreichen

Zweiges der Abbildungslehre des logarithmischen Potentials und anderer wichtigen Theorien anregten. Ein jeder Strom bildet um sich herum magnetische Kraftlinien aus, welche sich bei genügender Stromstärke bis an die Oberfläche des Leiters heran durch die schönen Ketten darstellen lassen, zu welchen Eisenfeil-Theilchen durch die magnetische Kraft zusammengefügt werden. Lommel wendete dieses Prinzip mit Erfolg auch auf die Plattenströme an und vermochte dadurch den Verlauf der Stromvertheilung in diesen zweidimensionalen Leitern dem Auge direkt wahrnehmbar zu machen. Ein kleines Bedenken der Theorie auf Maxwell'scher Grundlage, in wie weit die Lommel'schen Linien auch den Linien gleichen Potentialabfalles, den äquipotentiellen Linien der Plattenströme selbst folgen, wurde bald behoben. Sollte auch die Anwendung, welche Lommel von seiner Erscheinung auf das sogenannte Hall'sche Phänomen machte, der Ablenkung der Stromlinien in plattenförmigen Leitern durch vertikal dazu verlaufende Magnetkräfte, der weiteren Aufklärung auf diesem schwierigen Gebiete nicht Stich halten, so ändert dies nichts an der Einfachheit und Eleganz seiner Methode der Sichtbarmachung der genannten Linien. —

Eine Würdigung der Leistungen Lommel's für die Wissenschaft wäre gänzlich unvollkommen, wollte man nicht auch seiner lehrenden Thätigkeit in Schrift und Wort gedenken. Selten hat ein ernster Forscher und gründlicher wissenschaftlicher Arbeiter, wie es Lommel war, so gut verstanden, sein Wissen auch weiteren Kreisen mitzutheilen. Lommel war ein Meister der populären Darstellung. Seine zahlreichen allgemein verständlichen Vorträge über physikalische und meteorologische Gegenstände sind wahre Perlen einer einfachen und doch eindringlichen Klarheit. Sein Lehrbuch der Experimentalphysik erlebt noch immer jedes Jahr eine neue Auflage und mit Recht. Was dieses Buch unter den zahlreichen anderen guten Lehrbüchern dieses Wissenszweiges besonders auszeichnet, ist die schlichte Einfachheit, mit der der Lernende auf die grosse Tragweite der physikalischen Gesetze im alltäglichen Leben sowie bei den wichtigsten und gewaltigsten Naturphänomenen hingewiesen wird. —

Ueberblickt man das arbeitsreiche Leben und die Bedeutung der Arbeiten Lommel's, so erkennt man, dass er einer der fruchtbarsten und um die Wissenschaft verdientesten Physiker unserer Zeit war. Es sind nicht Entdeckungen, welche dem grossen Publikum bekannt geworden sind und ihm einen berühmten Namen bei letzterem verschafft haben; auch selbst unter den Fachgenossen haben nur solche, die seine mit feinster Beobachtungsgabe angestellten Versuche und seine scharfsinnigen Erklärungen der Erscheinungen genau verfolgt haben, den ganzen Werth des echten Gelehrten erkannt. Ein edler Mensch, bescheiden und schlicht, hat er sich nicht vorgedrängt; sein ganzes Denken erfüllte die Erkenntniss in seiner Wissenschaft, die ihm volle Befriedigung gewährte. Indem der seltene Forscher sich viele Jahre hindurch dem gleichen Problem widmete, bis es, so weit es zur Zeit möglich erschien, erschöpft war, giebt er uns das wohlthuende Gefühl einer ruhigen und tiefgehenden Geistesthätigkeit gegenüber den gar zu häufig hastigen und daher bald überholten Mittheilungen unserer Zeit. Wenn längst so manche momentan glänzende Entdeckungen in der Naturwissenschaft auf ihren wirklichen Werth für die Wissenschaft zurückgeführt sein werden, wird man die Schriften Lommel's noch lesen und daraus stets reiche Belehrung und einen wahren Genuss schöpfen.

Sophus Lie.[1])

Die mathematische Wissenschaft hat durch den am 18. Februar 1899 in Christiania erfolgten Tod des Norwegen Sophus Lie einen sehr schweren Verlust erlitten: er war einer der Führer in seinem Fache in der Gegenwart und einer der bedeutendsten und eigenartigsten Gelehrten, welche Norwegen in diesem Jahrhundert hervorgebracht hat. Er wurde nur 57 Jahre alt und gehörte unserer Akademie erst seit vier Monaten an.

Sophus Lie wurde am 17. Dezember 1842 auf Nordfjordeid

---

[1]) Rede von Prof. Elling Holst zum Andenken an Lie.

in dem Stift Bergen, wo sein Vater damals Pastor war, geboren; den ersten Unterricht erhielt er in der Bürgerschule in Moss, einer Insel im Christianiafjord, wohin sein Vater versetzt worden war; von da kam er in die Nissen'sche Privat-Lateinschule und dann (1859) an die Universität zu Christiania.

Der 17 jährige, ungemein kräftig entwickelte Jüngling hatte sich zu dieser Zeit noch nicht für einen bestimmten Beruf entschieden, ja nicht einmal ein besonderes Talent für irgend ein spezielles Fach gezeigt; er war allgemein begabt und in allen Gegenständen des Unterrichtes gleichmässig vorgebildet, und Niemand konnte damals vermuthen, dass er sich zu einem hervorragenden Mathematiker entwickeln werde. Er schwankte anfangs, ob er sich der Philologie oder der Naturwissenschaft, die sein älterer Bruder gewählt hatte, zuwenden sollte. Nach 6½ jährigem Universitätsstudium, wo Broch, Bjerknes und Sylow seine Lehrer waren, unterzog er sich (1865) mit grossem Erfolge der Prüfung als Reallehrer in der Mathematik und den Naturwissenschaften. Er half darnach eine Zeit lang dem Astronomen bei seinen Beobachtungen in der Sternwarte, wirkte als Privatlehrer und als Lehrer der Mathematik an Schulen und hielt auch im Studentenverein höchst lebendige und anziehende Vorträge über Astronomie; aber er war sich noch immer nicht im Klaren, zu welchem Zweige der Wissenschaft ihn seine noch schlummernden Fähigkeiten bestimmten. Obwohl er sich seiner Tüchtigkeit wohl bewusst war und seine geistige Kraft fühlte, hatte er doch noch nicht das Feld gefunden, auf dem er dieselbe offenbaren konnte. Zu dieser Zeit peinigten ihn Zweifel, ob er je seinen rechten Beruf finden werde und es befiel ihn die Sehnsucht nach einer seinem Talent entsprechenden Thätigkeit; er war darüber tief unglücklich, so dass seine Freunde, welche sehr wohl seinen hohen Werth erkannten, in Sorge um ihn waren.

Da kam zwei Jahre nach dem Bestehen der Reallehrer-Prüfung fast plötzlich, wie die Blüthen eines Baumes sich an einem warmen Frühlingstage entfalten, die Hilfe aus der Noth. Es waren Lie zufällig unter vergessenen Büchern der Uni-

versitäts-Bibliothek die die moderne Geometrie begründenden Arbeiten von Poncelet, Monge und Plücker in die Hand gefallen, welche ihn mächtig erschütterten. In einer derselben war am Schlusse ein Problem ungelöst geblieben, das der Autor einem grösseren Geiste vorbehielt; in kürzester Zeit hatte Lie die Lösung gefunden und zu seiner unsagbaren Freude sein Talent und seine Lebensaufgabe erkannt.

Nun begann bei seiner kraftvollen und stürmischen Natur mit elementarer Gewalt ausbrechend ein rastloses Studium der Geometrie, aus dem ihm alsbald neue Ideen erwuchsen und aus deren Verfolg er in erstaunlich kurzer Zeit sich zum vollendeten, die schwierigsten Theile der modernen Geometrie meisternder Mathematiker entwickelte. Bei seiner grossen Produktivität wünschte er seine Entdeckungen sich zu wahren. Er gab daher in der ersten Zeit kleine Flugblätter heraus, welche nur kurze Thesen ohne den Beweis enthielten; diese losen Blätter sammelte er (1869) zu einer 16 Seiten umfassenden Abhandlung, Repräsentation des Imaginären der Plangeometrie, in der schon seine originalen Ideen in der modernen Geometrie, seine Imaginärtheorie, enthalten waren, aus denen sich nach und nach seine späteren denkwürdigen Arbeiten auf diesem Gebiete ableiteten; die Abhandlung erschien auch in Crelle's mathematischem Journal, wurde aber wegen des Mangels an Beweisen vielfach nicht verstanden und nicht genügend gewürdiget. Namentlich fand er in der Heimath noch nicht das volle Zutrauen in seine Fähigkeiten, da seinem Fluge die etwas älteren einheimischen Mathematiker nicht zu folgen vermochten.

Die Arbeit verschaffte ihm aber doch durch die Befürwortung von Broch ein Staatsstipendium zu einer Studienreise nach Berlin und Paris, wo er (1869 und 1870) mit den dortigen hervorragenden Mathematikern zusammentraf und seine letzte Durchbildung förderte.

Die berühmte Berliner Schule unter Weierstrass, Kummer und Kronecker, welche besonders die Funktionentheorie und

andere algebraische Theorien ausgebildet hatte, fesselte ihn nicht so sehr, er fühlte sich durch seine Neigung zu geometrischen Anschauungen mehr zu der geometrischen Schule von Clebsch in Göttingen hingezogen.

In Berlin und Paris hatte er das Glück mit dem talentvollen jungen Mathematiker Felix Klein zusammenzutreffen, welcher die gleiche Neigung zur Geometrie hatte und sein Freund sowie mehrere Jahre sein Mitarbeiter auf diesem Gebiete wurde. Der Pariser Aufenthalt wurde jedoch jäh unterbrochen durch den deutsch-französischen Krieg; Klein musste nach Deutschland zurückkehren, und Lie wurde 30 Tage lang in Fontainebleau gefangen gehalten, da man die Zeichen in seinen mathematischen Papieren für die geheime Chiffreschrift eines preussischen Spions hielt; es befreite ihn daraus nur das Zeugniss eines jungen französischen Mathematikers, des jetzigen berühmten Geometers Darboux, der den beiden Freunden nahe getreten war und später viel that, um Lie's Bedeutung für die Geometrie darzuthun. Der Umgang mit Klein war für Lie von besonderer Bedeutung; die beiden in der neueren Geometrie völlig Bewanderten ergänzten sich gegenseitig in glücklicher Weise, Lie durch die Fülle der Ideen und Klein durch die Feinheit und Klarheit der Darstellung. Sie bearbeiteten gemeinsam die Ueberführung der Gruppentheorie in der Gleichungslehre auf geometrische Probleme, kurze Zeit in Paris und dann in der Abhandlung: „Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen“ (1871) bei Zusammenkünften in Göttingen, Erlangen und Düsseldorf; darnach theilten sie die Arbeit, indem Klein die Anwendung der Theorie auf diskontinuirliche Gruppen in der Geometrie übernahm, Lie die kontinuirlichen Gruppen, in denen er bald seine grösste Leistung vollbringen sollte. Lange aber unterrichtete Lie den Freund von seinen neuen Ideen in einem lebhaften wissenschaftlichen Briefwechsel. Nach seiner Rückkehr in die Heimath promovirte er und habilitirte sich alsbald als Privatdozent an der Universität Christiania,

woselbst für ihn in Anerkennung seiner wissenschaftlichen Verdienste (1872) wesentlich auf Befürwortung von Clebsch und Cremona ein besonderer Lehrstuhl der Mathematik an der Universität gegründet wurde, um ihm die Möglichkeit zu geben, sich ganz seinen Studien widmen zu können. In wenigen Jahren hatte sich Lie zu einem der berühmtesten und verdientesten Mathematiker seiner Zeit emporgeschwungen.

Lie's erste grössere Abhandlung enthält eine Fortsetzung seiner Imaginärtheorie mit Betrachtungen über eine merkwürdige Transformation gerader Linien in eine Kugel, welche zu seiner Kugelgeometrie führte. Er kam bald bei weiterer Verfolgung dieser seiner Curventheorie zu zwei anderen neuen Gebieten der Mathematik, nämlich zu der Lehre von den geometrischen Transformationen und zu der berühmten Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Er hat diese Untersuchungen in zwei Abhandlungen niedergelegt; in seiner 1870 erschienenen Dissertation, welche in schwedischer Sprache geschrieben ist, und in einer zweiten Schrift, die wie alle seine übrigen Mittheilungen in deutscher Sprache erschienen ist. Und daran reihte sich endlich die Gründung und Ausbildung eines weiteren mathematischen Gebietes, die Theorie der kontinuirlichen Transformations-Gruppen, womit Lie's Wirken seinen Höhepunkt erreichte. Diese grosse fundamentale Theorie, welche für die Behandlung der verschiedensten Gebiete der Mathematik bestimmend geworden ist, hat er nicht nur in allen wesentlichen Theilen entworfen und ausgebaut, sondern auch in den verschiedensten Gebieten: in der Lehre von den totalen und partiellen Differentialgleichungen, in der Geometrie und Invariantentheorie wie in der Mechanik angewendet. Seine Arbeiten haben eine völlig neue Fragestellung eröffnet und behandelt, deren Weiterentwicklung heute ein umfangreiches Gebiet der modernen mathematischen Literatur bildet. Es gehören dazu: die Berührungstransformationen und seine Behandlung der Minimalflächen. In den drei Jahren von 1871—1873 concentriren sich diese seine grossen Theorien und er verbrachte sein ganzes übriges Leben in rastloser Arbeit, um dieselben durchgearbeitet

darzustellen. Aber selbst der ungewöhnlichen Kraft von Lie wurde die Arbeit zu viel; er suchte nach Hilfe bei der begonnenen Herausgabe seiner Werke, welche er in dem durch die Vermittlung der Leipziger Mathematiker Klein und Mayer mit einem Staatsstipendium (1884) zu ihm gesandten Dr. Friedrich Engel fand, der sich in dem neuen Fache ausbilden sollte. So kam in den Jahren 1888—1893 die Theorie der Transformationsgruppen in drei starken Bänden heraus; 1891 die Vorlesungen über die Differential-Gleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen; 1893 die Vorlesungen über kontinuirliche Gruppen; 1896 die Geometrie der Berührungstransformationen und seit 1883: die Untersuchungen über die Theorie der Differential-Invarianten und ihre Anwendung auf die Theorie der höheren partiellen Differentialgleichungen.

Mittlerweile hatte Lie (1886) einen höchst ehrenvollen Ruf als Klein's Nachfolger für den geometrischen Unterricht nach Leipzig erhalten. Es war dies ein grosser Verlust für Christiania, jedoch erschien ihm der Wirkungskreis an einer der grössten und ruhmreichsten deutschen Universitäten ein bedeutenderer zu sein. Sein Aufenthalt gestaltete sich daselbst jedoch nicht so glücklich als er und seine Freunde für ihn gehofft hatten, trotz der bedeutenden Wirksamkeit und der grossen Anzahl lernbegieriger Schüler aus allen Ländern. Es begann in Folge der rastlosen aufreibenden Arbeit seine sonst so eiserne Gesundheit zu wanken. Trübe Lebensanschauungen bemächtigten sich seines so klaren Geistes, die sich zeitweise bis zur Melancholie steigerten; er wurde bitter gegen Andere, was sich namentlich in allzuscharfem Urtheile gegen deutsche Mathematiker, besonders gegen Helmholtz, in dem Vorwort zum dritten Bande der Transformations-Gruppen äusserte. Eine tiefe Sehnsucht nach den einfacheren Verhältnissen der Heimath, deren Berge und Thäler er über alles liebte, befiel ihn. Als man diesen Jammer in Christiania erfuhr, stellte eine Anzahl der bedeutendsten Männer den Antrag an die Nationalversammlung Lie einen Ehrengehalt zu bewilligen, damit er in der Heimath leben könne. Er kam 1898 nach 12jährigem Aufent-

halt in Leipzig zurück, aber nicht um sich zu erholen, sondern um zu sterben.

So ist denn der geniale Mathematiker von seltener reicher Begabung und Tiefe der Gedanken zu früh für die Wissenschaft dahingegangen. In der Begeisterung für sein Fach hat der lebendige energische Mann, in unerschütterlichem Glauben an bedeutende Leistungen und eine ehrenreiche Zukunft, in kürzester Zeit eine wahrhaft kolossale Arbeit bewältigt. Cremona sagte bewundernd von seinem Wirken: „manchmal habe ich mir selbst gesagt, dass ich mit Freude auf alle meine Arbeiten verzichten würde, wenn ich so glücklich gewesen wäre, das entdeckt zu haben, was Lie entdeckt hat.“ Seine Arbeiten werden noch auf lange Zeit hinaus befruchtend auf die verschiedensten Gebiete der mathematischen Forschung wirken.

Eugenio Beltrami.[1])

Der berühmte italienische Mathematiker Eugenio Beltrami, der Präsident der k. italienischen Akademie der Wissenschaften dei Lincei in Rom, ist am 18. Februar 1900, 64 Jahre alt, gestorben.

Er ist geboren zu Cremona am 16. November 1835. Nachdem er in seiner Vaterstadt das Lyzeum besucht hatte, trat er an die Universität zu Pavia über, woselbst er sich während drei Jahren mit dem grössten Eifer mathematischen Studien hingab. Da er nicht in glänzenden Verhältnissen lebte, war er genöthiget, sich alsbald nach dem Verlassen der Universität eine Stellung zu suchen und in die Administration der Eisenbahnen einzutreten. Jedoch beschäftigte er sich in seinen Freistunden mit mathematischen Problemen und wurde schon in einigen Jahren durch seine vortrefflichen Arbeiten so bekannt, dass die italienischen Universitäten sich den ausgezeich-

---

[1]) Gedächtnissrede gehalten von Enrico D'Ovidio, in der physikal.-math.-naturwiss. Classe der k. Akademie der Wiss. zu Turin (Jahrgang 1899—1900).

neten Gelehrten streitig machten. Er vertrat nach einander die Lehrfächer der Analysis, der Geodäsie, der Mechanik und der mathematischen Physik an den Universitäten zu Bologna und Pisa, darnach wiederum zu Bologna, dann zu Rom und Pavia; zuletzt war er Professor der mathematischen Physik und höheren Mechanik an der Universität zu Rom.

Beltrami hat in fast allen Zweigen der Mathematik Glänzendes geleistet. Ich entnehme dem Wahlvorschlage meines verehrten Collegen W. Dyck vom Jahre 1899 die folgende Schilderung der wissenschaftlichen Verdienste Beltrami's.

Die wichtigsten Arbeiten Beltrami's gehen auf die sechziger Jahre zurück und beziehen sich auf Differentialgeometrie und auf Nichteuklidische Geometrie. Besonders durch die fundamentalen Untersuchungen Riemann's „über die Axiome, welche der Geometrie zu Grunde liegen", waren die Fragen der Nichteuklidischen Geometrie in den Vordergrund des mathematischen und philosophischen Interesses gerückt. Beltrami gab in seinem „Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea", in der Abhandlung über eine gewisse Abbildung der Flächen von constanter Krümmung auf die Ebene („Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette") und in der „Teoria fundamentale degli spazii di curvatura costante" eine überaus anschauliche Darlegung der sogenannten Lobatschewsky-schen Geometrie in der Entwicklung der Geometrie auf den pseudosphärischen Flächen, und verallgemeinerte diese Untersuchungen in der zuletzt genannten Abhandlung auf dreidimensionale und weiter auf n-dimensionale Gebilde, deren geometrische Resultate für drei Dimensionen Helmholtz in einer bekannten populären Darstellung weiteren Kreisen zugänglich gemacht hat.

Die Arbeiten Beltrami's zur Nichteuklidischen Geometrie sind für immer mit der Geschichte dieser Theorie verknüpft.

Die Untersuchungen über die Differentialparameter gehen auf Lamé zurück, welcher im Gebiete von drei Dimensionen die Bedeutung dieser Invarianten für die mathematische Physik,

wie für die Theorie der krummlinigen Coordinaten entwickelt hat. Beltrami hat zuerst in der Arbeit „Sulle teorica dei parametri differenziali" die Theorie der Differentialparameter für ein zweifach ausgedehntes Gebiet entworfen und insbesondere unter Zugrundelegung der Invarianteneigenschaft dieser Gebilde für eine grosse Reihe zunächst von geometrischen Fragen verwerthet. — Auch in den späteren physikalischen Arbeiten Beltrami's ist es die Lehre von den Differentialparametern, welche ihn naturgemäss zu Anwendungen in der Potential-Theorie, in Hydrodynamik und Elasticitätstheorie, in der Elektricitätstheorie und der Lehre vom Magnetismus, kurz in allen Gebieten, wo der Ausdruck $\Delta_2 u$ eine Rolle spielt, führt. Dabei legte Beltrami seinen Untersuchungen mit Vorliebe krummlinige Coordinaten zu Grunde unf formulirt sie für n-dimensionale und nichteuklidische Räume. Im besonderen hat Beltrami die Sätze von Green und Gauss mit ihren mannigfachen Anwendungen verallgemeinert, präcisirt und ausgebaut.

Endlich hat Beltrami eine grosse Reihe von Einzelarbeiten aus fast allen Gebieten der Geometrie und der mathematischen Physik veröffentlicht, in denen er theils durch elegante Zusammenfassung bekannter Resultate, theils auf Grund durchaus neuer Ideen und Betrachtungen fördernd gewirkt hat. Hierher gehören insbesondere die Untersuchungen über die Biegung der Regelflächen, über Minimalflächen, über die Kinematik der Räume von konstantem Krümmungsmaass, über geodätische Linien; dann auf dem Gebiete der mathematischen Physik Arbeiten zur Potentialtheorie (Anziehung elliptischer Ringe), zur Hydrodynamik (über schraubenförmig fortschreitende Wirbel), zur Elektrostatik (über gewisse Analogien zwischen den Problemen der Elektrostatik und Thermodynamik) und Andere mehr.

Beltrami hat ohne Frage mit Cremona und Brioschi am nachhaltigsten unter allen älteren italienischen Mathematikern auf die Entwicklung der Mathematik in Italien eingewirkt.

Durch seine wissenschaftliche Thätigkeit, durch den Scharfsinn und die vollendete Reife seiner Arbeiten, war er eine Zierde der Universität und der Akademie zu Rom. In seiner

hohen Stellung, auch als Mitglied des obersten Rathes für den öffentlichen Unterricht, lebte er ganz für die Wissenschaft und war stets bereit dieselbe zu fördern, wo es ihm möglich war. Es ist sehr zu beklagen, dass der ausgezeichnete Mathematiker so bald nach seinem ebenso hervorragenden Vorgänger Francesco Brioschi, der am 14. Dezember 1897 starb, aus dem Leben geschieden ist; die mathematische Wissenschaft in Italien hat durch den Heimgang dieser beiden Gelehrten einen höchst empfindlichen Verlust erlitten.

Wilhelm Gottlieb Hankel.[1])

Mit Wilhelm Hankel ist der älteste der deutschen Physiker, dessen Arbeiten bis in die dreissiger Jahre zurückreichen, aus dem Leben geschieden. Er hat mehrere Generationen an sich vorüber gehen sehen und der Entwicklung der Physik durch sechs Jahrzehnte folgen können. Er ist als Senior der Universität Leipzig und der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, zu deren Zierden er einst gehörte, am 18. Februar 1899, 85 Jahre alt, gestorben. In unablässiger Arbeit hat er sich bedeutende Verdienste um die Physik, insbesondere um den Ausbau der Lehre von der Elektricität, erworben. Seit dem Jahre 1859 gehörte er als auswärtiges Mitglied unserer Akademie an.

Sein Lebensgang war der eines einfachen stillen Gelehrten. Am 17. Mai 1814 zu Ermsleben, einem kleinen Städtchen am Fusse des Harzes, als der Sohn eines Cantors und Lehrers geboren, besuchte er das Gymnasium in Quedlinburg und dann die Universität zu Halle um Naturwissenschaften zu studiren. Er schloss sich daselbst besonders dem verdienstvollen Physiker Schweigger an, bei dem er zu arbeiten begann. Da seine

---

[1]) Mit Benützung der Nekrologe von Paul Drude, Rede im Auftrage der k. sächs. Ges. der Wiss. am 14. November 1899; und C. Neumann, Worte zum Gedächtniss an W. Hankel, gesprochen an seinem Grabe am 21. Februar 1899. (Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. 1899 Bd. 51).

Eltern bald starben, musste er sich anfänglich durch Ertheilung von Privatstunden durchbringen, bis ihn, den 21 jährigen, eine Anstellung als Assistent für Physik und dann (1836) die Ernennung als Lehrer an der Realschule der Francke'schen Stiftungen aus seiner misslichen Lage befreiten. In der letzteren Anstalt trat schon seine grosse Lehrergabe hervor.

Im Jahre 1839 erwarb er in Halle den Doktorgrad und habilitirte sich ein Jahr darnach als Privatdozent für Chemie und Physik. Eine schwere Rippenfellentzündung, deren Folgen er lange Zeit spürte, nöthigte ihn die Chemie aufzugeben und sich sorglich zu schonen.

Seine mittlerweile begonnene wissenschaftliche Thätigkeit veranlasste seine Beförderung zum ausserordentlichen Professor an der Universität Halle (1847); 1849 bekam er den Ruf als ordentlicher Professor der Physik und Leiter des physikalischen Instituts der Universität Leipzig, wo er sein langes Leben über verblieb und bis 1887 getreu seines Amtes waltete und, obwohl fast erblindet, bis in die letzten Monate seines Daseins wissenschaftlich thätig war.

Schon seine im Jahre 1839 erschienene Doktordissertation sowie seine Habilitätsschrift handelte von den merkwürdigen Erscheinungen, welche ihn während seines ganzen Lebens beschäftigten und vor Allem sein Ansehen in der Wissenschaft durch die unübertroffene Genauigkeit der Beobachtung begründeten, nämlich von der durch Erwärmen von Krystallen entstehenden Elektricität oder der Pyroelektricität der Krystalle. Er kam dabei zu wichtigen Aufschlüssen über die Beziehungen der Elektricitätsentwicklung zu den Formen der Krystalle; so entdeckte er einen Zusammenhang der pyroelektrischen Erregbarkeit eines Krystalls mit seiner Fähigkeit die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen; dann fand er, dass hemimorph ausgebildete Krystalle wie der Turmalin stark pyroelektrisch erregbar sind; ferner, dass sich der ganze Krystall pyroelektrisch anders verhält, wie Bruchstücke desselben. Zum Nachweis dieser Eigenschaften erfand er sein Elektrometer, ein äusserst bequemes und genaues Messinstrument, da das ge-

wöhnlich angewandte Bohnenberger'sche Goldblatt-Elektroscop für seine Zwecke nicht ausreichte. Seine Arbeiten in dieser Richtung gaben die Anregung zu vielen Untersuchungen prinzipiell wichtiger Fragen.

Der Besitz des feinen Elektrometers veranlasste ihn zu weiteren elektrischen Versuchen. Zunächst zu einer Arbeit über Piezoelektricität, d. i. die beim Zusammendrücken eines Krystalls zwischen isolirenden Backen stattfindende Entwicklung elektrischer Ladungen. Er entdeckte ferner (1877) die wichtige Thatsache, dass durch Bestrahlung mit Licht die Krystalle elektrisch werden können (Photo-Elektricität), besonders der farbige Flussspath. Beim Bergkrystall glaubte er eine besondere Erregung durch die schwächer brechbaren Wärmestrahlen, die er Actino-Elektricität nannte, gefunden zu haben.

Indem er mit seinem Elektrometer die Spannungen, wie sie bei der Berührung verschiedener Metalle mit einander und von Metallen mit Flüssigkeiten entsteht, genau bestimmte (1861—65), lieferte er werthvolle Beiträge zur quantitativen Aufstellung der Spannungsreihe und zur Theorie der galvanischen Kette.

Er untersuchte weiterhin, ebenfalls mit seinem Elektrometer, die Entwicklung von elektrischen Strömen durch Erwärmung und zwar zwischen Metallen und erhitzten Salzen; dann das elektrische Verhalten der Flamme, die bei einigen Gasentwicklungen auftretenden Elektricitäten, und die bei Einwirkung des Lichts auf in Wasser und Salzlösungen eintauchende Metalle entstehenden elektrischen Ströme. Er beschäftigte sich auch mit der atmosphärischen Elektricität, welche er (1852) durch Anwendung der Drehwage auf absolutes Maass zurückführte.

In das Gebiet der Elektrokinematik gehören die Untersuchungen über die thermo-elektrische Spannungsreihe der Metalle, bei der sich ergab, dass die thermoelektrische Potential-Differenz bei grösseren Temperaturdifferenzen eine ganz andere ist wie bei geringen Temperaturdifferenzen. Ferner die Untersuchungen über die Abhängigkeit des elektrischen Leitungs-

widerstandes von der Temperatur. Dann der Nachweis, dass bei Durchleiten eines Wechselstroms durch einen Elektrolyten ein Richtungswechsel des Polarisationsstroms nach Oeffnung des primären Stroms eintritt. Von Interesse ist auch die Beobachtung, dass der spitze negative Pol eines Induktions-Apparates unter geeigneten Umständen nur positive Elektricität an die Luft austreten lässt.

Auch aus dem Gebiete des Magnetismus liegen einige bedeutsame Arbeiten von ihm vor. Er verfolgte die von Savary (1827) entdeckten Erscheinungen der wechselnden Polaritäten an Stahlnadeln, welche durch den Entladungsschlag der Leidener Batterie magnetisirt werden; er erkannte die bedeutenden Kräfte des Magnetfeldes des elektrischen Stromes, welche zum Betrieb starker Arbeitsmaschinen genügen; er machte Messungen über die Kräfte, welche das Wismuth im Magnetfelde erfährt, und Untersuchungen über das magnetische Verhalten von Nickel und Kobalt.

Auch optische Erscheinungen erregten seine Aufmerksamkeit. Es wurde die farbige Reflexion des Lichtes von mattgeschliffenen Flächen beschrieben; Messungen über die Absorption der chemisch wirksamen Strahlen des Sonnenlichts in Quarz, Glas etc. gemacht; die Umkehr der Natriumlinie untersucht; und nachgewiesen, dass zum phosphorigen Leuchten des Fleisches die Gegenwart von Sauerstoff nöthig ist.

Ausser dem Elektrometer gab er noch mehrere sehr brauchbare Messinstrumente an: so den Hitzdraht-Strommesser, dann einen Apparat zur Messung kleiner Zeiträume, den er zur Bestimmung der persönlichen Fehler bei verschiedenen Beobachtungsmethoden sowie zum Nachweis der Verzögerung der Ausbildung des elektrischen Sromes bei vorhandener grosser Selbstinduktion benützte.

Das grösste Verdienst hat sich Hankel zwar als Experimentator durch Auffinden von Thatsachen erworben; er hat aber auch eine für die damalige Zeit sehr beachtenswerthe „neue Theorie der elektrischen Erscheinungen" aufgestellt, durch welche er eine einheitliche Erklärung für das Wesen der

Elektricität zu geben versuchte. Er ersetzte die gebräuchliche Annahme zweier elektrischer Fluida durch die Vorstellung von kreisförmigen Wirbelbewegungen des Aethers unter Betheiligung der materiellen Theilchen des Leiters; die positive und negative Elektricität unterscheiden sich durch die Richtung der Wirbel. Es werden dadurch auch die Fernwirkungen zwischen elektrisirten Körpern oder elektrischen Strömen in mechanischer Weise durch Vermittlung eines Zwischenmediums, eventuell des Lichtäthers, erklärt. Diese seine Theorie der elektrischen Erscheinungen unterscheidet sich wesentlich von der älteren besonders dadurch, dass in ihr die elektrischen Massen fehlen und durch Geschwindigkeiten ersetzt sind. Sie hat in einigen Stücken Aehnlichkeit mit der neueren Maxwell'schen Anschauung. — Er wandte seine Theorie auch auf die Gesetze der Elektrokinematik in einer vom Ohm'schen Gesetz abweichenden Form an, und suchte ferner daraus die Bewegung des Crookesschen Radiometers abzuleiten.

Die Arbeiten Hankel's finden sich grösstentheils in Poggendorff's Annalen und den Berichten der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften; seine elektrischen Untersuchungen sind in einem Werke gesammelt worden. Mit Freunden hat er eine deutsche Ausgabe der Werke Arago's in 16 Bänden (1854 bis 1860) herausgegeben.

So hat der vortreffliche Gelehrte in seltener Uneigennützigkeit sein ganzes Leben hingebracht, um mit staunenswerther Ausdauer die Kenntniss in einzelnen Theilen der Physik durch das Experiment und die Beobachtung zu erweitern. Er war sich bewusst, dass er im Wesentlichen nur Vorarbeiten liefere, aber auch, dass diese zu einer späteren weiteren Erkenntniss nöthig sind.

Er war ausserdem ein begeisterter und seine Schüler für die Vorgänge in der Natur begeisternder Lehrer; ein edler schlichter Mensch von lauterem Charakter und voll Eifers für die Wahrheit, ein echter Gelehrter alten Schlages, den man ob seiner stillen glücklichen Arbeit bei dem nicht selten unlauteren Getriebe unserer Tage beneiden könnte.

Gustav Wiedemann.[1])

Wenige Tage nach dem Ableben von Hankel ist sein Nachfolger auf dem Lehrstuhle für Physik an der Universität Leipzig, Gustav Wiedemann, gestorben. Er hat sich als experimenteller Forscher durch die Auffindung zahlreicher wichtiger Thatsachen, dann als Schriftsteller durch die Herausgabe eines grossen Werkes „die Lehre von der Elektricität" und als Redakteur der angesehensten deutschen physikalischen Zeitschrift um die Physik und Chemie hohe Verdienste erworben. Er war der letzte der alten Garde von Physikern, welche sich in Berlin um Magnus geschaart und so glänzende Erfolge hatten.

Er wurde am 2. Oktober 1826 als Sohn eines Kaufmanns in Berlin geboren. Er besuchte das Köllnische Realgymnasium daselbst, in welchem die Schüler neben der humanistischen Bildung auch einen vorzüglichen Unterricht in den Naturwissenschaften und der Mathematik erhielten; es sind mehrere bedeutende Naturforscher aus dieser Schule hervorgegangen, z. B. der Physiker Beetz. Der Rektor war damals der verdiente Physiker E. F. August, der Erfinder des nach ihm benannten Psychrometers, auch lehrte daselbst der jüngere Seebeck die Physik und Robert Hagen die Chemie. Diese drei Männer haben offenbar die Neigung Wiedemann's zur Naturwissenschaft erweckt und ausserdem auch sein Oheim, der Mechaniker Gruel, der allerlei einfache Apparate für den physikalischen Unterricht herstellte und bei dem sich der Neffe in Zusammensetzung derselben übte.

An die Universität Berlin übergetreten, studirte er von 1844—1847 Chemie, Mathematik und Physik. Er erwarb sich ein umfassendes Wissen hierin bei den Chemikern Heinrich Rose, Sonnenschein und Mitscherlich, bei den Mathematikern

---

1) Mit Benützung der Rede zur Erinnerung an G. Wiedemann von W. Ostwald in der Leibniz-Sitzung der k. sächs. Ges. d. Wiss. am 14. Nov. 1899; des Nachrufs auf G. Wiedemann von F. Kohlrausch in der deutschen physikal. Ges. am 30. Juni 1899; und des Lebensbildes von H. Helmholtz in den Annalen der Physik und Chemie. N. F. Bd. 50. 1893.

Joachimsthal und Dirichlet, und den Physikern Dove und Magnus.

Der letztere übte auf die aufstrebenden Talente einen grossen Einfluss aus, indem er einen Kreis begabter junger Physiker zur Besprechung der neueren physikalischen Untersuchungen in seinem gastlichen Hause Abends um sich versammelte, und auch einzelne derselben in seinem Privatlaboratorium physikalische und chemische Arbeiten ausführen liess. Es entstand daraus die so einflussreich gewordene Berliner physikalische Gesellschaft und die Herausgabe der „Fortschritte der Physik". Zu den Stiftern der Gesellschaft gehörten: Beetz, du Bois Reymond, Brücke, Clausius, Heintz, Karsten, Knoblauch, denen sich dann Baeyer, Brunner, Halske, Helmholtz, Pistor, Radicke, Siemens, Traube, Werther und Wiedemann anschlossen. Es wird wohl nicht leicht wieder eine so grosse Anzahl von für die Wissenschaft begeisterten Jüngern sich zusammenfinden, welche nicht nur die reine Physik, sondern auch die physikalischen Vorgänge im Organismus und die Technik gefördert haben.

Wiedemann schloss namentlich mit Helmholtz, welcher Eleve der militärärztlichen Bildungsanstalt war, eine enge Freundschaft; sie studirten gemeinsam die Werke der theoretischen Physik, von Poisson und Anderen, da der Einfluss von Magnus nur die experimentirende Physik zuliess und die Theorie aus Furcht vor dem Wiederaufleben der eben überwundenen unseligen Naturphilosophie abwies.

Im Jahre 1847 erwarb Wiedemann den Doktorgrad mit einer in dem Magnus'schen Laboratorium ausgeführten chemischen Arbeit: „de novo quodam corpore ex urea producto"; dann habilitirte er sich 1851 an der Universität zu Berlin als Privatdozent für Physik unter Vorlage einer physikalischen Schrift: „über elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes".

Der junge Gelehrte lenkte durch seine schönen experimentellen Arbeiten bald die Aufmerksamkeit auf sich, und es begann eine glänzende akademische Laufbahn. Schon vier

Jahre nach seiner Habilitation erhielt er einen Ruf als Professor der Physik an die Universität Basel; dort trat er zu dem ausgezeichneten Chemiker Schönbein in nahe Beziehungen, dessen Bedeutung erst spät erkannt wurde, weil er bei seinen denkwürdigen Forschungen über die Katalyse seine besonderen Bahnen einschlug; unsere Akademie war wohl die erste, die ihn verstand und auszeichnete.

Es kam dann (1863) die Berufung an das Collegium Carolinum nach Braunschweig; 1866 wurde er Nachfolger des trefflichen Eisenlohr an dem Polytechnikum in Karlsruhe; 1871 erhielt er die Stelle als Professor der physikalischen Chemie an der Universität Leipzig und endlich nach dem Rücktritt von Hankel die Professur für Experimental-Physik daselbst.

Die wissenschaftliche Thätigkeit von Wiedemann lieferte eine grosse Anzahl zum Theil grundlegender Arbeiten, bei denen seine Ausdauer und seine Geschicklichkeit in der Anordnung der Versuche den Erfolg brachten. Sie sind sämmtlich in den Annalen der Physik veröffentlicht.

Nach der erwähnten chemischen Doktor-Dissertation über das Biuret, ein durch Erhitzen von trockenem Harnstoff unter Ammoniakentwicklung entstehendes Zersetzungsprodukt, wandte er sich physikalischen, grösstentheils auf dem Gebiete der Elektricitätslehre und des Magnetismus liegenden Problemen zu.

Noch bei Magnus machte er (1849) die schöne Entdeckung, dass die durch Staubfiguren sichtbar gemachte Ausbreitung einer elektrischen Entladung auf einer Krystallplatte in Kreisen oder Ellipsen, je nach der krystallographischen Beschaffenheit der Platte, erfolgt.

Es kamen dann die ebenfalls schon erwähnten Messungen über die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes von verschiedener Wellenlänge durch die magnetischen Kräfte des galvanischen Stroms.

Zum Theil in Gemeinschaft mit Dr. R. Franz folgten (1853) die Arbeiten über die relative Wärmeleitungsfähigkeit der Metalle, wobei die Temperaturmessung mit dem Thermoelement und der von ihm construirten bequemen Bussole gemacht wurde;

es zeigte sich der merkwürdige enge Zusammenhang zwischen der Leitung der Elektricität und der Wärme.

Noch als Privatdozent begann er Versuche über die elektrische Endosmose und über die anderen Eigenschaften der elektrolytischen Lösungen, welche so viel zur Erkenntniss auf diesem Gebiete beigetragen haben (1852); es wurde dadurch die Abhängigkeit des endosmotischen Druckes von der Stromstärke, der Natur der Diaphragmen und dem Gehalt der Lösungen aufgefunden.

In Basel förderte er seine elektrochemischen Untersuchungen durch Messungen der Leitvermögen von Lösungen (1856), verbunden mit Bestimmungen der Zähigkeit derselben und mit dem Hinweis auf den Zusammenhang der beiden Eigenschaften. Auch beschäftigten ihn die durch Hittorf's Arbeiten angeregten Beobachtungen der Jonen-Wanderung.

Von grösster Bedeutung sind seine umfangreichen Arbeiten über den Magnetismus der Körper, denen er sich fast die ganze Zeit seiner wissenschaftlichen Thätigkeit mit besonderer Vorliebe hingab. Er begann mit Messungen des temporären und permanenten Magnetismus von Stahl- und Eisenstäben verschiedener Gestalt; es folgten mühsame und sinnreiche Untersuchungen über die gegenseitigen Analogien und Einwirkungen der Magnetisirung von Stahl und Eisen und der Torsion derselben, über den Einfluss der Temperaturveränderungen etc. auf beide Arten von Zustandsänderungen und ihre Nachwirkungen, wodurch enge Beziehungen zwischen dem magnetischen und dem mechanischen Verhalten der Körper dargethan wurden. Da man sich die Magnetisirung des Eisens als einen mechanischen, durch die Drehung der kleinsten Theilchen bedingten Vorgang vorstellte, so waren die Folgen bei der mechanischen Aenderung in der Lage der Theilchen von grösstem Interesse.

In Braunschweig begann er äusserst interessante Untersuchungen über die Magnetisirung der Salze, welche später in Karlsruhe und Leipzig fortgeführt wurden; er fand das additive Gesetz des magnetischen Verhaltens der chemischen Verbindungen; zuletzt zog er aus dem Unterschied im Magnetismus

des colloidalen Eisenoxyds von dem der Ferrisalze Schlüsse über die chemischen Gleichgewichtsverhältnisse, woraus der Dissociationszustand der Stoffe in Lösung in einem bestimmten Falle quantitativ ermittelt werden konnte. In diese Zeit fallen auch seine ersten Versuche über den Dampfdruck krystallwasserhaltiger Salze; dieser Dissociationsdruck des Wasserdampfs bei verschiedenen Temperaturen zeigte sich nur von der Temperatur und nicht von den relativen Mengen der anwesenden Stoffe abhängig.

In Karlsruhe machte er mit Rühlmann die ersten messenden Versuche über Funkenentladung durch verdünnte Gase, welche für Andere eine reiche Quelle wichtiger Entdeckungen geworden sind.

Der Physiker Wilhelm Weber hatte bei seinem Weggange von Leipzig einen grossen Induktionsapparat zurückgelassen, mit welchem er die elektromagnetische Widerstandseinheit nach absolutem Maass bestimmen wollte. Wiedemann hat in einer grossen, ausserordentlich sorgfältigen Arbeit mit diesem Instrumente den Widerstand des Quecksilbers, den Werth des Ohm, ermittelt.

Obwohl sich Wiedemann als Forscher einen sehr bedeutenden Namen gemacht hat, so liegt darin doch nicht sein hauptsächlichstes Verdienst um die Wissenschaft; dasselbe hat er sich vielmehr durch die Bearbeitung seines mustergiltigen grossen Werkes: „die Lehre von der Elektricität“ erworben. Durch die Beschäftigung mit den Erscheinungen des Galvanismus und des Elektromagnetismus hatte er das Bedürfniss empfunden der Literatur näher nachzugehen, und schon in Berlin eine Sammlung aller einschlägigen Arbeiten begonnen; nach zehnjähriger Thätigkeit gab er dieselbe, kritisch gesichtet und methodisch geordnet, 1861 von Basel aus als Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus in zwei Bänden heraus. Es war dadurch für die strömende Elektricität ein ähnliches Hilfsmittel entstanden wie vorher für die Reibungselektricität durch Peter Riess. Da die scheinbaren durchgreifenden Unterschiede zwischen der reibenden und der strömenden Elektricität immer

mehr sich verwischten, so bearbeitete er das gesammte Gebiet der Elektricität und veröffentlichte (1882—1885) sein vierbändiges grosses Werk: „die Lehre von der Elektricität"; er hat sich mit demselben vierzig Jahre lang, bis an das Ende seines Lebens, beschäftigt und es sind von ihm vier Auflagen (1898) erschienen. Durch dieses sein eigentliches Lebenswerk, gleich hervorragend durch Vollständigkeit und Zuverlässigkeit, hat er dem Forscher in dem grossen, fast unübersehbaren Gebiete ein unentbehrliches Hilfsmittel geliefert und einen mächtigen Einfluss auf die Entwicklung der Wissenschaft ausgeübt; man kann wohl sagen, dass das Werk an der grossartigen Entwicklung der wissenschaftlichen und technischen Elektrik in den letzten Dezennien einen reichlichen Antheil hat. Wir besitzen dadurch eine musterhafte Geschichte der Lehre von der Elektricität im 19. Jahrhundert.

Endlich liegt noch ein drittes, nicht minder geringes Verdienst von Wiedemann vor, nämlich durch die Leitung der Annalen der Physik und Chemie nach dem Tode des verdienten Poggendorff seit dem Jahre 1877. Durch seine ausgebreiteten Kenntnisse und seine Erfahrungen in der experimentellen Physik sowie durch seine Unpartheilichkeit war er ganz besonders dazu befähigt diese für die Physik so wichtige Zeitschrift zu übernehmen. Er hat das verantwortungsvolle Amt in ausgezeichneter Weise im Sinne Poggendorff's fortgeführt; es mussten in Einigem, entsprechend den Erfordernissen der neueren Zeit, Aenderungen vorgenommen werden: der Inhalt musste gegenüber den der Physik nahe stehenden Zweigen der Naturwissenschaft, die früher in den Annalen vertreten waren, schärfer abgegrenzt werden; die Uebersetzungen von Arbeiten in nichtdeutscher Sprache fielen weg, zu umfangreiche Abhandlungen konnten nicht mehr aufgenommen werden; es wurden endlich die werthvollen Beiblätter mit seinem Sohne Eilhard ins Leben gerufen, in denen alle neuen Erscheinungen auf dem Gebiete der Physik rasch zur Kenntniss der Fachgenossen gebracht werden. Wiedemann hat 65 Bände der Annalen herausgegeben. Der im Jahre 1893 veröffentlichte 50. Band wurde ihm mit

einer von Helmholtz geschriebenen Skizze seiner Verdienste um die Wissenschaft gewidmet und an seinem 50jährigen Doktorjubiläum im Jahre 1897 dankten ihm abermals die Physiker durch Ausgabe eines besonderen Bandes der Annalen (dem 63ten).

Im Jahre 1897 zog er sich wegen Kränklichkeit von der Lehrthätigkeit zurück; am 23. März ist er dahingeschieden.

Der Name des berühmten Gelehrten wird in der Wissenschaft noch lange fortleben.

Robert Bunsen.[1])

Am 16. August 1899 ist Robert Bunsen im Alter von 88 Jahren in Heidelberg gestorben. Er war wohl die ehrwürdigste Gestalt unter den deutschen Naturforschern; nicht nur die, welche sich mit der Naturwissenschaft beschäftigen, sondern auch alle Gebildeten brachten ihm die grösste Verehrung und Dankbarkeit entgegen wegen seiner ganz ausserordentlichen Verdienste um das Wissen und um die Menschheit; denn er hat durch seine Arbeit viele Gebiete, die Chemie, die Physik, die Mineralogie, die Geologie, die Astronomie und selbst die Medizin mit wichtigen Kenntnissen bereichert, aber auch noch viel weiter gewirkt, indem seine Schöpfungen der Wissenschaft neue fruchtbare Bahnen eröffnet, ja die Grenzen unseres Naturerkennens hinausgeschoben haben.

Er war einer der genialsten und eigenartigsten Forscher von der feinsten Beobachtungsgabe, ein Gelehrter, der durch unablässige Arbeit sich einen enormen Schatz von Kenntnissen angesammelt und die grössten Erfolge errungen hat. Es ergreift uns Wehmuth, dass ein so glänzender Geist, zu dem man seit über 60 Jahren mit Stolz als auf einen der Führer aufsah, nicht mehr unter den Lebenden weilt, aber man blickt doch mit freudigem Gefühl auf das schöne, ungestört verlaufene Leben

[1]) Heinz, Münchener mediz. Wochenschrift 1899 Nr. 44.
Landolt, Berichte der deutschen chem. Ges. 1899 Nr. 14.
Curtius, Akademisches Gedenkblatt, Heidelberg 1900.
Chemiker-Zeitung 1895 I. S. 523.

zurück, wie es nur selten einem Sterblichen beschieden war, voll köstlicher Arbeit und im Drange nach Erkenntniss nur dem Dienste der Wissenschaft gewidmet.

Robert Bunsen wurde am 31. März 1811 in Göttingen geboren, woselbst sein Vater Bibliothekar und Professor der Sprachwissenschaften an der Universität war. An den Gymnasien zu Göttingen und Holzminden hatte er sich eine gute klassische Bildung erworben, denn er las noch später gerne lateinische Schriftsteller, Cicero's Reden und Sueton, und schrieb ein elegantes Latein. Trotz dieser jetzt nach der Ansicht Vieler für die Ausbildung in den Naturwissenschaften verkehrten Vorbildung ist er ein Naturforscher ersten Ranges von den grössten praktischen Erfolgen geworden, weil er denken gelernt hat. Mit 17 Jahren bezog er die Universität Göttingen, wo er sich mit Vorliebe mit Physik, Chemie, Geologie und Mineralogie, auch mit Mathematik beschäftigte. In der Chemie war Friedrich Stromeyer, der vortreffliche analytische Chemiker, sein Lehrer, in der Mineralogie und Geognosie der verdienstvolle Hausmann. Schon als Knabe nahm er lebhaftes Interesse an der Geognosie, welches durch Fusswanderungen in der Umgebung Göttingens und im Harz geweckt worden war. Im Jahre 1830 erwarb er im Alter von 19 Jahren den philosophischen Doktorgrad mit einer Dissertation: „enumeratio ac descriptio hyrometrorum“, was in unserer Zeit, in der zu unserem Unglück viel zu viel gelernt, aber nur wenig verstanden wird, eine Unmöglichkeit wäre. Es folgten (1832) ausgedehnte Reisen, zu denen er ein Stipendium erhalten hatte, um sich in den praktischen Zweigen der Chemie durch Besichtigung industrieller Etablissements weiter auszubilden. Dabei arbeitete er in Berlin einige Zeit bei dem Mineralogen Weiss und lernte Heinrich Rose und Mitscherlich kennen. In Giessen traf er den jungen Liebig und Wöhler, die ihre berühmte gemeinschaftliche Untersuchung über das Radikal der Benzoesäure ausführten. Grosse geognostische Exkursionen, namentlich eine mit Mitscherlich in die Eifel gemachte, schärften seinen Blick. Er ging dann nach Paris, wo der Deutsche

damals immer noch seine Ausbildung holen musste; er kam mit Pelouze zusammen, an den er einen Empfehlungsbrief von Liebig erhalten hatte, dann mit Regnault und Reiset, mit Depretz und Anderen; vielfache Anregung brachte der Besuch von Fabriken, besonders der berühmten Porzellanmanufaktur zu Sevres. Von Paris sollte die Reise nach Wien und Oesterreich durch die Schweiz gehen. Er durchwanderte in weiten Touren zu Fuss das schöne Land mit hohem Genuss und kehrte Ende 1833, nachdem er seine physikalischen, chemischen und geognostischen Kenntnisse vervollständigt und auf chemisch-technischem Gebiete viel gesehen hatte, nach Göttingen zurück.

An der Universität daselbst begann Bunsen jetzt seine akademische Laufbahn; mit 22 Jahren habilitirte er sich als Privatdozent für Chemie; er hielt während drei Semestern Vorlesungen und wurde dann (1835) gewürdiget die Vorlesungen des verstorbenen Stromeyer über theoretische und praktische Chemie zu vertreten. Im Jahre 1836 kam der aufstrebende Wöhler, der Professor der Chemie an der höheren Gewerbeschule in Kassel war, als Nachfolger Stromeyer's nach Göttingen und Bunsen ersetzte ihn in Kassel. Bald erhielt er von dort einen Ruf als ausserordentlicher Professor an die Universität Marburg, an der er 1841 zum Ordinarius vorrückte. Nach fast 13jähriger bedeutsamer Wirksamkeit in Marburg kam er (1851) an die Universität Breslau, wo nach seinen Angaben ein Laboratorium erbaut wurde; aber schon ein Jahr darauf erfolgte die glückliche Berufung an das schöne Heidelberg als Nachfolger Gmelin's. Er konnte im Jahre 1855 das neue grosse Laboratorium, damals das grösste und am besten eingerichtete in Deutschland, eröffnen, in dem er nun seine segensreiche Wirksamkeit als Lehrer und Forscher begann. Im Jahre 1889 trat er im Alter von 78 Jahren vom Lehramt zurück.

Seine wissenschaftlichen Arbeiten begann Bunsen als Privatdozent; eine rein chemische Arbeit über die Doppelcyanüre in ihrem Verhalten zu Ammoniak hatte er mit Himly gemacht und dann eine weithin bekannt gewordene von praktischer Bedeutung mit Berthold über ein Gegengift gegen die arsenige

Säure. Er suchte die in den Magen meist in Schweinfurter Grün gelangte arsenige Säure in eine unlösliche Verbindung überzuführen, als welche sich die mit Eisenoxydhydrat am besten eignete; er empfahl ein frisch bereitetes Gemisch von Eisenvitriol mit gebrannter Magnesia, wobei sich die ausfallende Eisenbase der arsenigen Säure und Bittersalz bildet.

In Kassel begann er seine einzige grössere, rein chemische Arbeit: es sind die von 1837—1842 fortgeführten denkwürdigen Untersuchungen über die Kakodylreihe, die ihn, den 26 jährigen, alsbald in die erste Reihe der Chemiker erhoben. Dieselben sind von grösster Bedeutung für die Entwicklung der Radikal-Theorie und der Chemie der Kohlenstoffverbindungen geworden. Man hatte bei der Destillation von Arsenik mit essigsaurem Kali die sogenannte Cadet'sche Flüssigkeit von grosser Giftigkeit, eckelhaftem Geruch und leichter Selbstentzündlichkeit gewonnen, deren Zusammensetzung unbekannt war. Trotz der Gefährlichkeit der Substanz gieng Bunsen an die Untersuchung, bei welcher in Folge der Explosion eines Glasrohrs durch einen Splitter sein eines Auge erblindete und die entströmenden giftigen Dämpfe sein Leben gefährdeten. Es war damals die Radikal-Theorie aufgestellt worden; es sollten nämlich in den organischen Verbindungen gewisse Gruppen von Elementen, die bei den Reaktionen unverändert bleibenden zusammengesetzten Radikale, die Rolle der Elemente der unorganischen Verbindungen spielen; als solche Radikale hatte man das Cyan und das der Benzoesäure erkannt. Bunsen gewann aus der Cadet'schen Flüssigkeit ein aus Arsen, Kohlenstoff und Wasserstoff bestehendes Radikal, das Kakodyl, das sich mit Sauerstoff verbindet (Alkarsin) und viele andere Verbindungen eingeht wie das Natrium. An die Entdeckung dieses neuen Radikals, und noch dazu eines so merkwürdigen arsenhaltigen, knüpften sich lebhafte Erörterungen der Chemiker. Aber Bunsen blieb dem Streite fern, ja er kümmerte sich nicht um die davon ausgehende umgestaltende Bewegung in der organischen Chemie. Er, der den grössten Anstoss gegeben und von dem man hätte erwarten sollen, dass er alle Kraft aufbieten würde, die Sache

zu verfolgen, stand theilnahmslos da und hat niemals mehr sich mit einer Aufgabe der organischen Chemie beschäftigt. Hat er geglaubt, dass in dieses dunkele Gebiet nicht so bald ein erhellender Lichtstrahl dringen werde? Jedenfalls erschienen seinem universellen Geiste andere Dinge interessanter zu sein. Er gieng an die Untersuchung der bei dem Hochofenprozess sich entwickelnden Gase, der Gischtgase, und zeigte, dass ein grosser Theil der Wärme dadurch verloren gehe und wie man dieselbe für die Hüttenindustrie wieder nutzbar machen kann. In diese Zeit fällt die Construktion seiner Zink-Kohlenbatterie für starke elektrische Wirkungen, die er dann zu seinen elektrochemischen Versuchen benutzte und die lange für die Gewinnung elektrischen Lichtes und für die Galvanoplastik Anwendung fand.

Von Marburg aus unternahm er (1846) eine merkwürdige und für die Wissenschaft fruchtbare Reise nach der Insel Island, indem er sich an der von dem Geologen Sartorius von Waltershausen veranstalteten Expedition mit dem Mineralogen Bergmann betheiligte; er sollte dabei die chemische Thätigkeit der dortigen Vulkane, insbesondere deren gasförmige Emanationen, untersuchen. Er kehrte nach 6 Monaten nach grossen Entbehrungen und Anstrengungen mit einem reichen Material für wissenschaftliche Arbeit, namentlich an in Glasröhren eingeschlossenen Gasproben, zurück, dessen Abarbeitung ihn bis zum Jahre 1854 in Anspruch nahm. Die Resultate der Reise, welche er in einem gedruckten Schreiben an Berzelius vorläufig zusammenfasste, waren für die Geologie höchst bedeutsame: aus der Beschaffenheit der vulkanischen Gase ergaben sich wichtige Aufschlüsse, die chemischen Analysen der Eruptivgesteine zeitigten eine Theorie der plutonischen Erscheinungen, er beschreibt die eigenthümlichen Veränderungen der Gesteine durch den Einfluss der Hitze und des Wassers, und erklärt die Geysir-Phänomene d. i. das periodische Auftreten von heissen Wassermassen aus der Erde.

In Marburg und Breslau machte er seine elektrochemischen Untersuchungen über die Abscheidung der Metalle durch den

elektrischen Strom, zu denen seine kräftige Zink-Kohlenbatterie Veranlassung gegeben hat; aus den Lösungen der Chloride stellte er reines Chrom und Mangan, aus den geschmolzenen Chloriden Magnesium, Aluminium, Natrium, Barium, Calcium und Lithium dar. Auch gab er eine Erklärung der Vorgänge bei der Elektrolyse. Die wissenschaftliche Chemie und die Technik haben dadurch gleichermaassen gewonnen. Indem er das metallische Magnesium zu Draht presste und diesen verbrannte, erhielt er das glänzende Magnesiumlicht, dessen chemisch wirkende Strahlen er zur Photochemie anwandte. Die rein dargestellten Metalle dienten dazu ihre specifische Wärme mittelst seines sinnreichen Eis-Calorimeters zu bestimmen und auch die noch unbekannten Atomgewichte derselben festzustellen.

In die erste Heidelberger Zeit (1852—1862) fallen die mit Roscoe gemeinschaftlich ausgeführten äusserst mühevollen photochemischen Untersuchungen. Sie bedienten sich zur quantitativen Bestimmung der chemischen Wirkungen des Sonnenlichtes eines Gemisches von gleichen Raumtheilen Wasserstoff und Chlor, das bei Einwirkung des Lichtes in Salzsäure übergeht. Durch viele, mit den sinnreichsten Apparaten angestellten Beobachtungen haben sie die chemischen Wirkungen des in der Atmosphäre zerstreuten Lichtes und des direkten Sonnenlichtes ermittelt. Auch haben sie dabei die ungeheure chemische Kraft berechnet, welche die Sonne durch ihr Licht in den Weltraum sendet.

Um dieselbe Zeit machte er eine maassanalytische Methode von allgemeiner Verwendbarkeit, die Jodometrie, bekannt, welche die höheren Oxydationsstufen der Elemente mit Sicherheit erkennen lässt.

Jahre lang hat er sich mit der Analyse von Gasgemischen abgegeben, schon bei der Untersuchung der Hochofengase und der Geysirgase; im Jahre 1857 erschien sein abschliessendes klassisches Buch „gasometrische Methoden“, durch das er die Gasanalyse, unter Erfindung zahlreicher Hilfsmittel, zu der gleichen Vollkommenheit wie die Gewichts- und Maassanalyse erhob. Es findet sich in dem Büchlein ausserdem eine Fülle

werthvollster Angaben: die Bestimmung des specifischen Gewichts der Gase, ihrer Diffusions- und Absorptions-Erscheinungen, sowie ihrer Verbrennungserscheinungen. Er erwähnt darin auch der Hilfe, welche ihm der leider zu früh verstorbene, zu den grössten Hoffnungen berechtigende Dr. August Pauli aus München bei den Absorptions-Versuchen der Gase geleistet hat. Die Methoden von Bunsen wurden zuerst von seinem Schüler Lothar Meyer zur genauen Untersuchung der Blutgase angewendet, sowie auch vielfach zur Ermittlung der Zusammensetzung der ausgeathmeten Luft, wodurch in diese Vorgänge ein helles Licht geworfen worden ist.

Zu allen diesen Verdiensten gesellte sich nun seine bekannteste und glänzendste Schöpfung, die mit Kirchhoff gefundene Spektralanalyse. Im Jahre 1861 erschien ihr epochemachendes Werk: „chemische Analyse durch Spektralbeobachtungen". Es ist wohl kaum eine Entdeckung von gleicher Tragweite für die ganze Wissenschaft gemacht worden als diese und zwar nicht durch eine zufällige Beobachtung, sondern durch systematische, die Erscheinungen erklärende Untersuchungen. Zuerst wurden mit Hilfe der nicht leuchtenden Flamme des Bunsen-Brenners in dem in der optisch-astronomischen Werkstätte von C. A. Steinheil in München entstandenen ersten Spektroscop die merkwürdigen farbenprächtigen Spektren der einzelnen, von Bunsen rein dargestellten Metalle festgestellt. Glühende feste Körper geben ein continuirliches Farbenspektrum ohne dunkle Linien, glühende Gase senden Licht von bestimmter Farbe aus und geben daher unterbrochene, aus einzelnen farbigen Linien bestehende Spektren. Dabei fiel es auf, dass die gelbe Natronlinie mit der Fraunhofer'schen dunkeln *D*-Linie des Sonnenspektrums zusammenfiel. Es zeigte sich ferner, dass wenn man Drummond'sches Kalklicht mit einem continuirlichen Spektrum ohne dunkle Linien durch glühenden Natriumdampf gehen lässt und dann durch ein Prisma zerstreut, an Stelle der gelben Natriumlinie eine schwarze Linie auf hellem farbigen Grund auftritt. Diese auffallende Erscheinung fand durch Kirchhoff's eindringenden Verstand ihre Deutung: ein gas-

förmiger Körper absorbirt diejenigen Strahlen, welche er im leuchtenden Zustande aussendet. Da das Sonnenspektrum die Fraunhofer'schen dunkeln Linien giebt, so mussten die beiden Forscher folgern, dass vor dem festen leuchtenden Kern der Sonne eine Gasatmosphäre sich befindet, welche glühende Natriumdämpfe enthält; auch die übrigen Fraunhofer'schen Linien stimmen mit den hellen Linien irdischer Stoffe überein. Dadurch waren die bis dahin unverstandenen Fraunhofer'schen dunkeln Linien erklärt. Indem sie die Spektra der Himmelskörper untersuchten, fanden sie, aus welchen Urstoffen ihre Gashülle oder Photosphäre besteht; es sind auf unserer Erde vorkommenden Stoffe, denn das in der Sonne gefundene neue Element Helium that später Ramsay in einigen seltenen norwegischen Mineralien dar. So entstand eine neue Wissenschaft, die Astrophysik: die Planeten geben reflektirtes Sonnenlicht und liefern daher das Sonnenspektrum, die Fixsterne haben drei verschiedene Spektren, eines mit dem der Sonne übereinstimmend. Die Protuberanzen der Sonne wurden als glühende Wasserstoffdämpfe erkannt; die Nebelflecken als glühendes Stickstoff- und Wasserstoffgas.

Mit Hilfe der Spektralanalyse lehrte er die geringsten Mengen der in den Flammen verflüchtigten Elemente und ihrer Verbindungen zu erkennen. Zuerst führte sie zur Entdeckung zweier neuer Elemente, des Rubidiums und Cäsiums, aus der Dürkheimer Salzsoole und aus kalihaltigen Urgesteinen; er zeigte dann dadurch das weit verbreitete Vorkommen des Lithiums und die Spektren seltener Erden, z. B. der Erbin- und Yttererde, des Rhodiums, der Cergruppe, woran sich eine Untersuchung des Didyms, eines Gemisches der Elemente der seltenen Erdmetalle, deren Oxyde mit Thorerde als Hauptbestandtheil das Material zur Herstellung der Auer'schen Glühstrümpfe liefern. Wer weiss nicht, welchen Gewinn die Untersuchung der Absorptionsstreifen gefärbter Stoffe, z. B. des Blutes, für die Chemie und die Physiologie gebracht hat?

Aus seinen Versuchen zur leichten Erkennung der Metalle bei höheren Temperaturen entstanden die an Feinheit und Sorg-

fältigkeit der Beobachtung einzig dastehenden „Flammen-Reaktionen", mit denen er die analytische Chemie beschenkte.

Es müssen noch erwähnt werden seine Anleitung zur Analyse der Aschen und Mineralwässer, die Methode zur Analyse der Silikate, die Trennung von Antimon und Arsen, seine Bestimmung des Harnstoffs, seine Untersuchung über die Natur der Gase.

Die drei letzten Untersuchungen des 75 jährigen Forschers handelten von der Verdichtung der Kohlensäure an blanken Glasflächen, von der kapillaren Gasabsorption und von einem Dampfcalorimeter zur Bestimmung der specifischen Wärme des Platins, des Glases und Wassers.

Bunsen hat ausserdem eine grosse Anzahl brauchbarer sinnreicher Apparate erfunden, ohne die man sich heut' zu Tage kein Laboratorium denken kann: den Gasbrenner, die Wasserluftpumpe zum Auswaschen der Niederschläge, das Photometer. Er war ein praktisches Genie von ausserordentlicher manueller Geschicklichkeit; zu der Zeit, wo der Chemiker die Apparate selbst herstellen musste, hatte er sich alle Kunstgriffe dazu zu eigen gemacht, er war ein Meister im Glasblasen, ein Experimentator sonder gleichen, der stets die einfachsten Mittel und kürzesten Wege zur Erreichung des Zwecks fand. Alle seine zahllosen Apparate und feinen Messinstrumente stammten von seiner Hand.

Nicht minder gross wie als Forscher war Bunsen als Lehrer. Nie hat wohl ein Lehrer sich seinen Schülern so hingegeben wie er. Unzählige Schüler, die meisten der jetzigen Physiker und Chemiker, haben seine Vorlesungen gehört und in seinem Laboratorium gearbeitet; sie sind alle voll von Dankbarkeit für das, was er ihnen für ihre wissenschaftliche Ausbildung gewesen ist, und für die geistige Anregung, die sie von ihm empfangen haben. Sein Vortrag war einfach und ohne rhetorischen Schmuck, aber von vollendeter Klarheit, begleitet von den instruktivsten Experimenten. In der ersten Zeit hat er die Schüler noch an seinen Arbeiten Theil nehmen lassen und an ihren wissenschaftlichen Beschäftigungen Interesse ge-

nommen, späterhin gab er sich immer mehr dem Unterricht talentvoller Anfänger in der unorganischen Chemie hin und leitete sie in der qualitativen und quantitativen Analyse unermüdlich aus der Fülle seiner Erfahrungen an, ihnen alle die Kunstgriffe, die man nicht aus Büchern lernen kann, zeigend; er lehrte sie die kleinsten Dinge beachton und scharf zu beobachten. Der Entwicklung der organischen Chemie sowie dem Lehren derselben stand er seit seiner Heidelberger Zeit ablehnend gegenüber; die physikalische und analytische Chemie nahmen sein ganzes Sein und Denken in Anspruch.

So liegt das Leben eines der grössten Denker und Experimentatoren aller Zeiten abgeschlossen vor uns, reich an Ergebnissen für die Wissenschaft und für das Wohl der Menschheit. Was ihn vor Allem auszeichnete, das war seine nie ermüdende Lust zum Forschen und zum Lehren, seine scharfe Beobachtungsgabe, welche ihn das Kleinste beachten und anscheinend fern liegende Dinge mit seinen Gedanken verknüpfen liess, seine ausserordentliche Geschicklichkeit in der Ueberwindung experimenteller Schwierigkeiten und sein enormes Wissen und seine Erfahrung auf allen Gebieten der Naturwissenschaft. Indem er mit aller geistigen Anstrengung durch seine wunderbaren Versuche möglichst einwurfsfreie Resultate zu erhalten suchte, war er ein Muster eines echten Naturforschers, der rastlos nach Erkenntniss strebte und die Wahrheit nur um der Wahrheit willen suchte. Ein charakteristischer Zug von ihm ist, dass als im Jahre 1870 seine sämmtlichen Notizen über Spektralbeobachtungen, die Arbeit von Jahren, verbrannten, er nach wenigen Tagen die gleichen Beobachtungen rüstig wieder aufnahm.

Sein Schüler Sir Henry Roscoe hat ihm aber wohl das schönste Denkmal gesetzt durch die Worte: er war gross als Forscher, grösser als Lehrer, aber am grössten als Mensch und Freund. Dass ein so grosser Forscher auch als Mensch gross und geliebt sein kann, dass auch die höchsten Gaben des Geistes mit einer edlen reinen Menschlichkeit verbunden sein können, das ist es, was das Leben des unvergleichlichen Mannes zu

einem so vollendeten und harmonischen macht. Trotz der Höhe seiner Stellung und aller ihm erwiesenen Ehren blieb er, bei aller Vornehmheit seines Wesens, bescheiden und schlicht. Jede Eitelkeit, alles Scheinwesen und das Haschen nach Popularität war ihm im Innersten zuwider. Völlig gleichgültig gegen äussere Anerkennung floh er öffentliche Ehrenbezeigungen, ja er konnte sich trotz der Bitten seiner Freunde nicht entschliessen einem Maler oder Bildhauer zu sitzen. Liebenswürdig und mild im Urtheil war ihm zugleich ein köstlicher Humor und eine gewisse Schalkhaftigkeit eigen; er wollte ein einfacher Mensch und kein Uebermensch sein; Niemand konnte sich dem Zauber seiner Person entziehen.

Er hatte eine grosse Liebe zur Natur; in ihr erholte er sich von der Arbeit, in jüngeren Jahren auf Reisen durch grosse Fusswanderungen, dann durch Spaziergänge und Wagenfahrten in die geliebten Berge und Wälder um Heidelberg. Sein grosser Geist hat es verstanden zu finden, wie man leben muss, um seine Pflicht auf der Erde in wahrer Lebensfreude zu erfüllen.

Charles Friedel.[1])

Am 20. April 1899 ist das correspondirende Mitglied unserer Akademie, der verdiente französische Mineralog und Chemiker Charles Friedel in Paris im Alter von 67 Jahren gestorben. Er war Professor an der Sorbonne und Mitglied der französischen Akademie (1878). Seine zahlreichen Arbeiten auf den Gebieten der Mineralogie, der anorganischen Chemie, besonders aber der organischen Chemie haben zur Förderung dieser Wissenschaften beigetragen. Er hat ferner in seinem Laboratorium, welches längere Zeit das besuchteste in Paris war und in dem der chemische Unterricht nach den von Liebig in Deutschland eingeführten Grundsätzen gegeben wurde, viele Schüler, auch deutsche, ausgebildet und dadurch zur Verbreitung chemischer Kenntnisse in Frankreich gewirkt.

[1]) Nekrolog von A. Ladenburg, in den Berichten der Deutschen chemischen Gesellschaft, 1899, Jahrgang 32. S. 3721.

Er wurde am 12. März 1832 in Strassburg geboren, wo sein Vater ein Bankgeschäft leitete; die Mutter war eine Tochter des bekannten Mineralogen G. L. Duvernoy, Professor am Collège de France, woher wohl seine Neigung zu der Mineralogie stammt. Nach Absolvirung des protestantischen Gymnasiums seiner Vaterstadt trat er an die Universität daselbst über, an welcher er naturwissenschaftliche Vorlesungen bei dem Chemiker Pasteur, bei dem Mineralogen Daubrée u. A. hörte. Er war eigentlich für das Geschäft seines Vaters bestimmt, aber seine Vorliebe für die Naturwissenschaft war so mächtig, dass er sich ganz derselben zuwenden durfte.

Als 20 jähriger gieng er nach Paris zu seinem Grossvater Duvernoy; er bildete sich namentlich an der Sorbonne weiter aus und erwarb sich bald den Grad eines Lizentiaten der mathematischen und dann der physikalischen Wissenschaften.

Anfangs war sein Interesse besonders der Mineralogie zugewandt; seine Kenntnisse in dieser Wissenschaft verschafften ihm auch das Conservatorium der Mineraliensammlung der Ecole des Mines (1856—1870), an welcher ihm später ein kleines Laboratorium eingerichtet wurde.

Daneben fieng er an, sich tiefer in die Chemie einzuarbeiten und zwar bei dem auch aus dem Elsass stammenden, hervorragenden Professor der medizinischen Chemie an der Ecole de Médicine, später (1874) der organischen Chemie an der Sorbonne, Adolphe Wurtz; durch die gemeinsame wissenschaftliche Thätigkeit wurden die beiden Landsleute innige Freunde und Friedel war lange Zeit eine wesentliche Stütze für Wurtz im Laboratorium. Nach dem Rücktritt des Mineralogen Des Cloizeaux erhielt Friedel die Vorlesungen an der Ecole normale, dann (1876) die Professur der Mineralogie an der Sorbonne, an deren Laboratorium er eine grosse Anzahl von Schülern der Wissenschaft zuführte, und nach dem Tode von Wurtz (1884) als dessen Nachfolger die Professur für organische Chemie an der Sorbonne. Er war bei seinen Schülern äusserst beliebt und ihr stets bereiter Berather und uneigennütziger Helfer.

Die wissenschaftliche Thätigkeit Friedel's begann mit mineralogischen und krystallographischen Untersuchungen; seit dem Jahre 1856 hat er fast ununterbrochen bis an sein Lebensende eine Reihe werthvoller Arbeiten auf diesem Gebiete veröffentlicht. Es würde zu weit führen dieselben alle hier aufzuzählen. Er hat eine Anzahl neuer Mineralien entdeckt; so z. B. den Wurtzit, ein hexagonales Schwefelzink, dann den Adamit, ein Zinkarseniat. Von vielen Mineralien hat er die chemische Zusammensetzung ermittelt, die des Tellurgoldsilbers, des Adamins, des Nesquehonits, des Delafossits aus Jekaterinburg im Ural, den er als ein Kupferoxydsalz des Eisenhydroxyds erkannte. Es wurden ferner viele krystallographische Bestimmungen von ihm ausgeführt; auch die pyroelektrischen Eigenschaften der Mineralien ermittelt. Die grössten Verdienste erwarb er sich aber mit den Synthesen zusammengesetzter Mineralien; so hat er den Atacamit, Rutil, das Kupfer- und Zinkarseniat, den Hopeït, Mellit, Quarz, Tridymit, Feldspath, Leadhillit, Calciumcarbonat, Wollastonit, Topas, Leucit, Percylith etc. künstlich hergestellt.

Seine ersten grösseren rein chemischen Untersuchungen betreffen die den Aldehyden verwandten Ketone (1857—1866), die man durch Oxydation von Alkoholen oder durch trockene Destillation von zwei einbasischen Fettsäuren erhält. Es gelang ihm die vorher nur ungenügend bekannte Constitution dieser Stoffe sowie des Acetons aufzuklären. Er entdeckte ferner dabei den Aceton-Alkohol, studirte die complizirten Produkte, welche sich neben diesem Körper bei der Reduktion des Acetons bilden und fand das Methylchloracetal auf, welches er in ein gechlortes Propylen verwandelte.

Es folgten (von 1863–1870) die wichtigen Arbeiten über die organischen Silicium- und Titan-Verbindungen, die er zum Theil mit Crafts und Ladenburg in eingehender Weise und mit glänzendem Erfolge untersuchte, so dass dieses von ihm allein bebaute Feld heute eines der interessantesten Kapitel der Chemie ausmacht. Bei Beginn seiner Untersuchungen war das Atomgewicht des Siliciums noch nicht sicher bekannt; er war

im Stande das von Dumas und Marignac angenommene Atomgewicht (Si = 28) festzustellen. Es ergab sich aber vor Allem eine völlige Analogie in dem chemischen Verhalten des Siliciums und des Kohlenstoffs, indem von ersterem organische Verbindungen gewonnen werden, in welchen ein Theil des Kohlenstoffs durch Silicium ersetzt ist; er entdeckte die Aethylreihe des Siliciums und that dar, dass das Silicium, ebenso wie der Kohlenstoff, sich mit sich selbst verbindet und dass es vierwerthig ist.

Von Bedeutung war auch der synthetische Aufbau des einen Componenten der Fette, des Oelsüsses oder Glyzerins, aus den Elementen mit Silva (1871—73).

Von der grössten Tragweite und weitester Anwendungsfähigkeit war die mit Crafts gemachte Auffindung (1877—1890) einer Reaktion, welche die Einführung der verschiedenen Radikale in das Benzol und seine Homologen gestattet bei Behandlung derselben mit den Halogenverbindungen jener Radikale bei Gegenwart von Aluminiumchlorid; auch ermöglicht sie die aromatischen Kohlenwasserstoffe bei Gegenwart von Aluminiumchlorid mit Sauerstoff, Kohlensäure und anderen Säureanhydriten direkt zu verbinden. Er und viele andere Chemiker haben mit Hilfe dieser neuen allgemeinen Methode der Synthese in der aromatischen Reihe eine sehr grosse Anzahl vorher schwer zugänglicher Körper mit Leichtigkeit dargestellt und Fragen von grosser allgemeiner Bedeutung gelöst, so dass ihr ganz wesentlich die rapide Entwicklung der organischen Chemie in den letzten Zeiten zu verdanken ist.

Ausser den genannten grösseren Arbeiten rühren von Friedel zahlreiche kleinere Untersuchungen her, welche zum Theil mit seinen Schülern ausgeführt worden sind und wichtige Beiträge zur Chemie geliefert haben.

Friedel hat sich auch an nützlichen literarischen Unternehmungen betheiliget: er war lange Zeit Redakteur des Bulletin de la société chimique, lieferte zahlreiche Beiträge zu dem von Wurtz herausgegebenen Dictionnaire de Chimie, gab eine Sammlung von Vorträgen in der Revue: „les Actualités chimiques“

heraus und gründete die Revue générale de Chimie pure et appliquée.

Viele Ehrenstellen wurden dem verdienten Manne übertragen; er war Präsident der internationalen Nomenklatur-Commission und auch Vorsitzender des chemischen Comités zur Vorbereitung für die Pariser Weltausstellung vom Jahre 1900. Er war ein glühender Patriot und konnte die Niederlage von 1870 nicht verschmerzen und er suchte Alles zu thun, um das geliebte Vaterland wieder aufzurichten. In diesem Bestreben rief er die Ecole alsacienne ins Leben, eine Schule für den Sekundär-Unterricht, durch welche die Jugend eine bessere moralische und körperliche Erziehung erhalten sollte; er führte ferner einen praktischen Curs der angewandten Chemie an der Sorbonne ein, um der Technik in Frankreich wissenschaftlich und praktisch durchgebildete Leute zuzuführen, damit sie die Conkurrenz des Auslandes besser überwinden können.

Friedel war reich an Gedanken und Kenntnissen und von scharfer Beobachtungsgabe, aber auch ein lauterer Charakter, gütig und von tief religiösem Sinne.

Sir Edward Frankland.[1])

Der berühmte englische Chemiker Sir Edward Frankland ist am 9. August zu Golaa in Gudbrandsdahl in Norwegen, wo er gerne Erholung suchte, nach kurzer Krankheit im 74. Lebensjahre gestorben.

Derselbe nimmt in der Geschichte der Chemie einen hervorragenden Platz ein, denn er gehört zu den ausgezeichneten Gelehrten jener klassischen Zeit in der Mitte des Jahrhunderts, in der die Grundlagen für die heutigen so fruchtbaren Anschauungen über die Constitution der Kohlenstoffverbindungen gelegt wurden; er hat durch seine Untersuchungen viel zu der Entwicklung der Lehre von der Werthigkeit der Elemente bei-

[1]) Mit Benützung des Nekrologs in Leopoldina 1899 Nr. 11 und des Nekrologs von Liebermann in den Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft 1899 Nr. 14.

getragen und ist dadurch einer der Mitbegründer des jetzigen chemischen Systems geworden. Er hat dies, wie Liebig in seinem Wahlvorschlage für unsere Akademie sagte, erreicht durch seine scharfsinnige Combinationsgabe und sein seltenes Talent für die Ausführung schwieriger Operationen, die ihm die Durchführung von Untersuchungen ermöglichte, deren Schwierigkeiten für viele Andere unüberwindbar gewesen wären.

Frankland wurde am 18. Januar 1825 zu Churchtown bei Lancaster geboren; nach Absolvirung der Lateinschule daselbst widmete er sich alsbald dem Studium der Chemie am Museum of Practical Geology, welches damals unter der Leitung des Chemikers Lyon Playfair stand, zu. Im Jahre 1847 wandte er sich zu seiner Ausbildung in der Chemie nach Giessen in Liebig's Laboratorium, wo er in die grosse Schaar talentvoller junger Chemiker aus allen Ländern eintrat. Darauf gieng er nach Marburg zu Bunsen, der wohl den grössten Einfluss auf ihn ausübte; mit dem etwas älteren Assistenten Bunsens, Hermann Kolbe, verband ihn bald eine innige Freundschaft; er führte mit ihm seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten aus. Nach der Rückkehr in sein Vaterland wurde der erst 26jährige, viel versprechende Gelehrte (1851) zum Professor der Chemie am Owens-College in Manchester ernannt, dann (1857) zum Professor der Chemie am St. Bartholomäus-Hospital in London und hierauf (1863) an der Royal Institution of Great Britain in London an Stelle des berühmten Faraday. Als A. W. Hofmann (1865) seine Professur an der Royal School of Mines, einer Abtheilung des Royal-College of Chemistry, aufgab, wurde er sein Nachfolger an dieser Schule; zuletzt bekam er (1881) noch die Professur an der Normal School of Science im South Kensington-Museum. Er hat an diesen Stellen eine äusserst fruchtbare Lehrthätigkeit entwickelt.

Die bedeutendsten und zahlreichsten wissenschaftlichen Leistungen Frankland's liegen auf dem Gebiete der organischen Chemie.

Bunsen hatte damals in Marburg eine der geistvollsten und fruchtbarsten Untersuchungen in der Chemie gemacht.

Es war damals die Theorie von den zusammengesetzten Radikalen aufgestellt worden, indem man annahm, in den organischen Verbindungen spielten gewisse Gruppen von Elementen die Rolle der Atome in den anorganischen Verbindungen. Ein solches Radikal isolirte Bunsen in dem äusserst widerlich riechenden Kakodyl, einer aus Arsen und 2 Molekülen Methyl bestehenden Gruppe, welche zahlreiche Verbindungen, wie die Atome der anorganischen Verbindungen, bilden.

Bunsen's Kakodyl-Arbeit war von befruchtendem Einfluss auf Kolbe's theoretische Anschauungen und auf die gemeinsame Untersuchung von Kolbe und Frankland über die Cyanüre und auch auf des Letzteren Entdeckung der metallorganischen Verbindungen.

Bei der ersteren liessen sie Kalium auf Cyanäthyl einwirken und glaubten dabei die entsprechenden organischen Radikale isolirt zu haben. Wenn dies auch nicht der Fall war, so hat die Untersuchung doch einen tieferen Einblick in den Aufbau der Säuren und Nitrile gebracht.

Daraus erwuchs die wichtige Entdeckung der beiden Forscher von der Spaltung der Nitrile — der Verbindungen der Alkoholradikale mit der Cyangruppe — in Ammoniak und Fettsäuren. Diese Reaktion wurde für die Synthese organischer Verbindungen von grosser Bedeutung, indem sie zum ersten Mal den systematischen Aufbau von einem Alkohol zu der nächst kohlenstoffreicheren Säure ermöglichte. Insbesondere war es ihre Elektrolyse der Essigsäure mit der Bunsen-Batterie, aus der sich neue Anschauungen über die Zusammensetzung der Kohlenstoff-Verbindungen entwickelten.

Im Verfolg der Untersuchungen über die organischen Radikale entdeckte nun Frankland das Zink-äthyl und Zink-methyl und dann eine ganze Reihe von neuen höchst merkwürdigen metallorganischen Verbindungen. Es war dies seine bedeutendste Entdeckung, welche den grössten Einfluss auf die Entwicklung der organischen Chemie gehabt hat; man zählt ihn daher mit Recht zu einem der Vorläufer der später von Kekulé begründeten Theorie von der Werthigkeit der Elementar-Atome.

Die Kenntniss der metallorganischen Verbindungen führte ihn zu wichtigen synthetischen Herstellungen zahlreicher Kohlenstoffverbindungen. Mit B. F. Duppa gelang ihm der Aufbau der Leucinsäure aus Oxalsäureester und Zinkäthyl, dann der der mono- und dialkylirten Essigsäuren, der Mono- und Dialkylacetonkohlensäureester, der alkylirten Glieder der Milch- und Acrylsäurereihe und der homologen Ketone.

In Folge seiner engen Beziehungen zu den deutschen Fachgenossen ist ein grosser Theil seiner grundlegenden chemischen Arbeiten zuerst in deutschen Zeitschriften, namentlich in Liebig's Annalen, erschienen.

Später hat er seine Kraft gemeinnützigen Bestrebungen zugewandt, indem er ausgedehnte Untersuchungen über die Versorgung der Stadt London mit Wasser anstellte, und die von acht privaten Gesellschaften aus verschiedenen Orten der Stadt zugeführten Trinkwasser chemisch analysirte sowie auf ihren Gehalt an Bakterien prüfte und die Verunreinigung des dortigen Flusswassers feststellte. Als einem der Her Majesty's Commissioners war ihm die Ueberwachung dieser für die Sanität der englischen Hauptstadt so wichtigen Angelegenheit übertragen. Ueber 30 Jahre hat er zum Theil mit X. E. Armstrong diese Arbeiten geführt und in seinen Jahresberichten einen wahren Schatz von Erfahrungen hierüber niedergelegt. Man hat dadurch in England praktisch zuerst den Werth der Beschaffung reinen Wassers und der Kanalisation für die Gesundheit der Bevölkerung erkannt; zahllose Einzelheiten über die Analyse des Wassers, seine Härte, die Verunreinigungen desselben und die Reinigung wurden von ihm festgestellt. Noch wenige Monate vor seinem Tode hat der unermüdlich thätige Mann mit seinem Collegen Crookes werthvolle Untersuchungen über die Londoner Wasserversorgung veröffentlicht.

Im Jahre 1877 erschien eine Gesammtausgabe seiner Arbeiten unter dem Titel: „Experimental Researches in pure, applied and physical chemistry", in der sich auch Abhandlungen aus anderen Gebieten vorfinden: z. B. über die Eiszeit,

die Sonnenwärme, die Schattentemperatur, die Quelle der Muskelkraft, über den Einfluss des atmosphärischen Drucks auf die Verbrennungs-Erscheinungen, über das Leuchten der Flamme etc. Diese Gesammtausgabe hat er seinem Lehrer und Freund Bunsen, für den er die grösste Verehrung hegte, gewidmet.

Schon vor einiger Zeit ist er von seiner Professur zurückgetreten und lebte auf seinem Gute The Yews in Surrey. Der verdienstvolle Gelehrte stand in seinem Vaterlande und auch ausserhalb desselben in hohem Ansehen; es wurden ihm viele Ehren von gelehrten Gesellschaften erwiesen; er war eines der wenigen Ehrenmitglieder der Deutschen chemischen Gesellschaft, unserer Akademie gehörte er seit dem Jahre 1869 an.

Franz v. Hauer.[1]

Die Reihen der unserer Akademie angehörigen Geologen, denen wir die Entwicklung dieser Wissenschaft in dem zweiten Dritttheil des vergangenen Jahrhunderts verdanken, lichteten sich in den beiden letzten Jahren: wir haben den Tod von Gümbel und von Sandberger betrauert und nun ist auch Franz v. Hauer, der frühere Direktor der geologischen Reichsanstalt und Intendant des naturhistorischen Museums, am 20. März 1899 in Wien, 77 Jahre alt, aus dem Leben geschieden. Er war der Nestor und der Führer der österreichischen Geologen und Paläontologen, einer der bedeutendsten Gelehrten in seinem Fache durch die Bedeutung, den Umfang und die Tiefe seiner wissenschaftlichen Arbeiten, der sich namentlich um die geologische Durchforschung seines Heimathlandes die grössten Verdienste erworben hat. Im Gebiete der Alpengeologie war er nach dem Urtheile Gümbel's unbestreitbar der allseitigste,

[1] Dr. M. Weinberg in Wien in der Illustrirten Zeitung vom 6. April 1899.
Dr. August Böhm, Privatdozent an der technischen Hochschule in Wien in den Abhandlungen der geographischen Gesellschaft in Wien I. 1899.

gelehrteste und erfahrungsreichste, so dass sein Name sich unmittelbar an jene eines Studer und Escher von der Linth anreiht; er hat durch seine geologischen Aufnahmen die Grundlage zur neuen Alpengeologie gelegt und eine Schule von tüchtigen Feldgeologen gebildet, durch deren Thätigkeit allein es möglich wurde, dass Oesterreich in erstaunlich kurzer Zeit sich zu einem der geologisch am besten durchforschten Länder erhob.

Franz v. Hauer wurde am 30. Januar 1822 zu Wien als der Sohn des Geh. Raths und Vicepräsidenten der Hofkammer im Münz- und Bergwesen, Joseph v. Hauer, geboren. Der Vater hatte eine der grössten paläontologischen Sammlungen in Wien angelegt und die fossilen Foraminiferen des tertiären Beckens von Wien entdeckt. Dadurch wurde der junge Franz v. Hauer frühzeitig zu dem Studium der Geologie und Paläontologie angeregt.

Nach Vollendung seiner Studien am Gymnasium und der Universität zu Wien gieng er (1839) an die Bergakademie zu Schemnitz im ungarischen Erzgebirge, um sich als Berg- und Hütteningenieur auszubilden. In dieser damals in hoher Blüthe stehenden Frei- und Bergstadt war eine vorzügliche Gelegenheit zur Ausbildung im Bergwesen; die seit Anfang des 12. Jahrhunderts betriebenen und um die Mitte des 16. Jahrhunderts der Augsburger Familie Fugger gehörigen reichhaltigen Gold- und Silberbergwerke sowie die berühmte Mineralien-Sammlung boten vortreffliches Material zu emsigem Studium. Von da kam er (1843) auf kurze Zeit als Bergwesens-Praktikant an die Bergverwaltung in Eisenerz, wurde aber dann noch im nämlichen Jahre zu den Vorlesungen des hervorragenden Mineralogen Wilhelm Haidinger in Wien berufen und nach Vollendung des einjährigen Lehrkurses demselben zur Dienstleistung am damaligen montanistischen Museum zugetheilt, wo er auch gut besuchte Vorlesungen über Paläontologie, damals die einzigen zu Wien, hielt. Haidinger erkannte das Talent des 22 jährigen jungen Bergpraktikanten und war bemüht ihn der Wissenschaft zu erhalten, indem er beantragte, ihn nochmals

einem Jahreskurse zuzutheilen und nach demselben ihn zum Assistenten am montanistischen Museum für drei Jahre zu ernennen; so hat Hauer seinem Lehrer Haidinger die Einführung in die Wissenschaft, aber auch die Ebnung seiner wissenschaftlichen Laufbahn zu verdanken.

Denn nach Ablauf der drei Assistentenjahre (1849) stellte Haidinger das Ansuchen, am montanistischen Museum eine Professur für Paläontologie zu schaffen und Hauer, der durch fünf Jahre hindurch eine nützliche Thätigkeit entwickelt hatte, dafür zu ernennen. Dem wurde zwar zunächst nicht stattgegeben, wohl aber gab es die Veranlassung, dass der erleuchtete Minister v. Thinnfeld, der die hohe Bedeutung einer geologischen Durchforschung des Landes erfasste, in einem für andere Regierungen lesenswerthen Erlass weiter gieng und die so berühmt gewordene und grossartige geologische Reichsanstalt gründete (1849). Sie sollte eine selbständige Anstalt sein, welche zunächst die Aufgabe hatte die geologische Aufnahme der Monarchie zu besorgen; Haidinger wurde zum Sektionsrath und Direktor, Hauer zum Bergrath und ersten Geologen der Anstalt befördert. Als Haidinger (1866) in den Ruhestand trat, kam Hauer an seine Stelle, welche er während 18 Jahren inne hatte; er brachte sie zu grosser Blüthe und zur Entwicklung eines höchst segensreichen wissenschaftlichen Lebens, indem er seine Mitarbeiter zu freier wissenschaftlicher Thätigkeit anspornte und die Verhandlungen der geologischen Reichsanstalt (1867) begründete. Von 1874—1885 war er auch Honorardozent für Geologie an der Wiener Hochschule für Bodenkultur. Im Jahre 1885 wurde er der Nachfolger Ferdinand v. Hochstetter's als Intendant des naturhistorischen Hofmuseums, als welcher er die Uebersiedelung (1889) der zum Theil zerstreuten Schätze der naturhistorischen Sammlungen des Kaiserhauses in den Prachtbau am Burgring leitete. Auch das Hofmuseum erlangte unter ihm eine angesehene wissenschaftliche Stellung, besonders auch durch die (1886) Schaffung der Annalen des naturhistorischen Hofmuseums.

Im Jahre 1896 trat er nach redlich gethaner Arbeit in

den Ruhestand und am 20. März 1899 machte der Tod dem thatenreichen Leben ein Ende.

Der Anfang der wissenschaftlichen Laufbahn Hauer's fiel in die Zeit, wo durch die Sammlungen von Mohs, Haidinger und Joseph Hauer eine systematische geologische Durchforschung der österreichischen Lande angeregt war. Durch das eingehende Studium derselben erwarb er sich die dafür nothwendigen paläontologischen Kenntnisse. Die Lösung der grossen Aufgabe und die Entwicklung der berühmten Schule für Geologie gieng von der gemeinsamen rastlosen Thätigkeit in dem montanistischen Museum und der geologischen Reichsanstalt aus.

Die Arbeiten Hauer's, welche grössten Theils in den Jahrbüchern der geologischen Reichsanstalt und den Schriften der Akademie enthalten sind, sind vorwiegend stratigraphischer und paläontologischer Natur.

In ersterer Beziehung beschäftigte er sich frühzeitig mit der Untersuchung der so verwickelten geschichteten Ablagerungen der Alpen, des früher so genannten Alpenkalkes, sowie der in ihnen enthaltenen thierischen und pflanzlichen Einschlüsse, zunächst in den Ostalpen (von 1850—53) und dann (1857) in den Nordtiroler Alpen. Auf Grund derselben hat er als Erster eine sichere, unübertroffene Gliederung der geschichteten Gesteine in den östlichen Alpen geschaffen: diese Arbeit legte den ersten festen Grund für die richtige Auffassung der geognostischen Verhältnisse der Ostalpen und stellte sein Talent als beobachtender und vergleichender Geologe in das glänzendste Licht. Er traf [illegible] im Westen mit den schweizerischen Geologen mit Bernhard Studer und Arnold Escher von der Linth zusammen und in Nordtirol mit unserem unvergesslichen Gümbel, der von 1854 an die bayerischen Alpen bearbeitete. Der letztere hatte die grosse Genugthuung, dass die österreichischen Geologen, Hauer, Richthofen, Pichler, Cotta, zum Theil in gemeinschaftlichen Begehungen, die wesentlichen Ergebnisse seiner Forschung bestätigen konnten; und Hauer hat in rühmlicher Anerkennung das Alpenwerk Gümbel's als die wichtigste und ausführlichste Monographie.

welche bisher überhaupt über einen Theil der Kalkalpen erschienen ist, als die Frucht der mit unermüdlicher Ausdauer und begeisterter Hingebung durchgeführten geologischen Landesaufnahme und als ein wahres Grundwerk bezeichnet. Später (1858) hat Hauer die Verhältnisse am Südabhang der Alpen studirt, nachdem er schon 1857 in grossen Zügen einen geologischen Durchschnitt quer durch die Alpen von Passau bis Duino ausgeführt hatte; auch bei den Aufnahmen in Ungarn, Siebenbürgen und Dalmatien war er betheiligt. Dadurch erlangte er die umfassendsten Kenntnisse des geologischen Baues und der Bodenbeschaffenheit von Oesterreich, welche er in einem Meisterwerke: „Die Geologie und ihre Anwendung auf die Kenntniss der Bodenbeschaffenheit der österreichisch-ungarischen Monarchie“ in klarster, allgemein verständlicher und doch streng wissenschaftlicher Darstellung zusammenfasste.

Nachdem schon 1843 und 1844 von den zu den Lehrkursen in das montanistische Museum eingerufenenen Bergwerkspraktikanten unter Haidinger's Leitung und unter Hauer's Mitwirkung die erste grössere Uebersichtskarte Oesterreichs in 9 Blättern im Maassstabe 1 : 864 000 zusammengestellt worden war, erfolgte von der geologischen Reichsanstalt unter Hauer die ganz hervorragende geologische Uebersichtskarte der österreichisch-ungarischen Monarchie in 12 Blättern im Maassstabe 1 : 576 000 (1867—73), eine Zusammenfassung der Ergebnisse aller bis dahin ausgeführten Aufnahmsarbeiten in Oesterreich-Ungarn, welche alle ähnlichen Darstellungen an Gründlichkeit der Ausarbeitung, Klarheit der Darstellung und Harmonie der Durchführung als wahres Muster- und Meisterwerk zur Seite, wenn nicht voran steht; dann die geologische Uebersichtskarte von Siebenbürgen (1 : 576 000) im Jahre 1861 und im Jahrbuch der geologischen Reichsanstalt eine geologische Karte der nördlichen Lombardei (1 : 432 000).

Mit dem Geologen Fötterle gab er (1853) die geologische Uebersicht der Bergbauten der österreichischen Monarchie heraus; mit G. Stache, seinem späteren Nachfolger, (1863) die Geologie Siebenbürgens; mit Melchior Neumayer den Führer

zu den Exkursionen der deutschen geologischen Gesellschaft nach der allgemeinen Versammlung in Wien im Jahre 1877; für das von dem Kronprinzen Rudolf angeregte Prachtwerk: „die österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild" schrieb er (1887) die geologische Uebersicht von Oesterreich-Ungarn.

Ausser diesen stratigraphischen Arbeiten hat er zahlreiche Abhandlungen paläontologischen Inhalts veröffentlicht. Noch im montanistischen Museum entstand 1846 seine erste grössere wissenschaftliche, von Haidinger mit einem Vorworte eingeführte Arbeit: „die Cephalopoden des Salzkammergutes aus der Sammlung des Fürsten Metternich", welche hauptsächlich von Friedrich Simony zusammengebracht worden war. Dieses verbreitete Geschlecht der zu den Mollusken gehörigen Kopffüsser hat er später noch mehrmals bearbeitet, so die Cephalopoden der karnischen und norischen Hallstädter Kalke (1847. 1848. 1855. 1860), dann die aus dem Muschelmarmor von Bleiberg (1847), aus dem Lias der nordöstlichen Alpen (1856) und der Medolo vom Val Trompia (1861). Hierher gehören auch seine Abhandlungen über die Fauna der Raibler Schichten (1857), über die Kreidepetrefakten des Bakonyer Waldes (1861) und die Studien über die triassischen Cephalopoden Bosniens (1887. 1892. 1896).

Einen ganz wesentlichen und erfolgreichen Einfluss hat Hauer auf die Verbreitung der Naturwissenschaften und die Entwicklung des wissenschaftlichen Lebens in Wien ausgeübt. Als er begann in die Wissenschaft einzugreifen, gab es in Wien noch keinen Verein für Pflege der Naturwissenschaft und keine Zeitschrift für grössere wissenschaftliche Arbeiten. Er gab (1845) die erste Anregung zu einer Gesellschaft junger Naturforscher, den „Freunden der Naturwissenschaften", die sich in den Räumen des montanistischen Museums bei Haidinger versammelten und Berichte über die gemachten Mittheilungen (von 1847—51) herausgaben. Diese Vereinigung der Jüngeren gab für die Aelteren erneut den Anstoss die Gründung einer Akademie der Wissenschaften anzustreben, welche 1847 erfolgte

und zu deren correspondirendem Mitglied er als 26jähriger Assistent bei der ersten Wahl ernannt wurde. Er war bei der Gründung von zahlreichen Fachvereinen betheiligt und als Mitglied thätig, so bei der zoologisch-botanischen Gesellschaft, der geographischen Gesellschaft, dem Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse, dem österreichischen Alpenverein, der anthropologischen Gesellschaft, dem wissenschaftlichen Club, dem Verein für Höhlenkunde. In den Mittheilungen der geographischen Gesellschaft brachte er Beiträge über Höhenmessungen in Ungarn und Siebenbürgen. In der österreichischen Touristen-Zeitung berichtete er über die Wasserverhältnisse in den Kesselthälern in Krain, über die Krausgrotte bei Gams in Steiermark, über die Arbeiten des Karst-Comités. Er förderte die Untersuchung der physikalischen Verhältnisse und der Fauna und Flora in den Tiefen der Oesterreich benachbarten Meere. Als Mitglied der prähistorischen Commission der Akademie interessirte er sich für Höhlenuntersuchungen und paläographische Ausgrabungen.

Durch diese umfassende Thätigkeit hat Hauer eine glänzende Periode wissenschaftlichen Aufschwungs in Oesterreich mit herbeigeführt sowie den Ruf der Wiener geologischen Schule begründet, deren machtvoller Führer und Meister er mehr als 50 Jahre hindurch war; für seine Schüler, denen er ein stets sorgender Lehrer war, war er zugleich ein Vorbild in edler Gesinnung und in der Liebe zur Wahrheit und Begeisterung für die Wissenschaft.

An seinem Grabe hat sein ältester Schüler Suess in wahrhaft erhebenden Worten die Eigenschaften und das Verdienst des geliebten Lehrers geschildert: Niemand habe den heimischen Boden besser gekannt und daher auch Niemand besser geliebt; er habe den Funken der Begeisterung in den Schülern erweckt, der nicht erlöschen werde, sodass sein Leben fruchtbar bleibe noch nach dem Tode, und nur diesen Dank der Schüler habe er angestrebt und gewünscht. Wenn Suess dabei den Segen der Wissenschaft durch die Erkenntniss der Wahrheit und die Emporhebung des Gemüths durch die erkannte Wahr-

heit zu nie zu trübender innerer Befriedigung schildert, so weiss man nicht, soll man mehr den Schüler um den Lehrer, oder den Lehrer um solche Schüler beneiden.

Othniel Charles Marsh.[1])

Am 18. März 1899 starb nach kurzer Krankheit der Professor der Paläontologie an der Yale Universität in New Haven Othniel Marsh im 67. Lebensjahre. Der noch in voller Arbeitskraft stehende Mann war einer der verdientesten Paläontologen und einer der angesehensten Gelehrten Nordamerikas; er war Präsident der amerikanischen Akademie der Wissenschaften (von 1882—1895) sowie der amerikanischen Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften und bis zu seinem Tode Landes-Paläontologe für Wirbelthiere in den Vereinigten Staaten. Man verdankt ihm vor Allem die Kenntniss zahlreicher merkwürdiger fossiler Wirbelthiere aus dem Westen Nordamerikas; er ist nicht lange seinem gleich berühmten Rivalen Edward Cope in Philadelphia im Tode gefolgt.

Marsh wurde am 29. Oktober 1831 bei Lockport im Staate New York geboren. Den ersten Unterricht erhielt er in der Schule von Lockport, dann in dem College des am Ontario-See schön gelegenen Ortes Wilson. Die an Mineralien und Fossilien reiche Gegend von Wilson erweckte in dem kräftigen und talentvollen Jüngling das lebhafteste Interesse, und er begann damals schon in seiner freien Zeit diese Naturobjekte zu sammeln. Im Jahre 1851 trat er in die Akademie von Andover im Staate Massachussets ein, dann in die Yale Universität zu New Haven, an welcher er bis 1860 vor Allem zoologischen und geologischen Studien oblag. Von New Haven aus machte er naturwissenschaftliche Reisen nach New England in dem nördlichen Dakota und der

[1]) Nekrolog von H. B. Geinitz in Leopoldina 1899 Nr. 7 S. 122. — Nekrolog von Charles E. Becher im American Journal of science 4. Ser. Vol. 7. p. 403, 1899.

im Nordosten der vereinigten Staaten gelegenen Insel Nova Scotia, auf welcher er schon 7 Jahre früher in der Steinkohle den merkwürdigen Eosaurus-Wirbel gefunden, jedoch nicht beschrieben hatte.

Nach Abschluss seiner Studien in Amerika begab er sich zur weiteren Ausbildung nach Frankreich und nach Deutschland, woselbst er drei Jahre verblieb. Er besuchte dabei die Universitäten zu Berlin, Heidelberg und Breslau; in Berlin hörte er die beiden Rose und Ehrenberg, in Breslau Römer und Göppert. Er verdankte die Mittel dazu seinem reichen Onkel mütterlicherseits George Peabody.

Im Jahre 1866 erhielt er die Anstellung als Professor der Paläontologie am Yale College. Nach dem Besuch der Verhandlungen der American Association for the Advancement of Science zu Chicago (1868) entschloss er sich mit der eben eröffneten Pacific-Bahn die damals kaum bekannten Felsengebirge im fernen Westen zu besuchen, von wo vorher die ersten fossilen Säugethierreste durch Leidy beschrieben worden waren. Er kam bis Nebraska und Wyoming und erkannte den ungeheuren Reichthum an fossilen Ueberresten. Er erstattete darüber einen Bericht und es gelang seinen Bemühungen im Jahre 1870 eine erste von ihm ausgerüstete und organisirte Yale scientific Expedition ins Werk zu setzen; 13 thatkräftige Männer begleiteten ihn als Gehilfen und eine Bedeckung von den Militärposten längs der Bahn diente zum Schutz gegen die Indianer. Ein glänzender Erfolg lohnte das Unternehmen, so dass in den drei folgenden Jahren noch weitere grossartige Expeditionen nach dem Westen, namentlich nach den Rocky Mountains, von ihm ausgerüstet wurden theils auf eigene, theils auf öffentliche Kosten. Es muss bemerkt werden, dass gleichzeitig mit Marsh der Paläontologe Edward Cope von Philadelphia die Fundstätten von Dakota, Wyoming, Colorado und Oregon mit ihren kolossalen Ablagerungen vergangener Thierformen, besonders fossiler Wirbelthiere, ausbeutete, wobei von den beiden ebenbürtigen Rivalen mit fieberhafter Energie gearbeitet wurde und ein nicht immer in friedlichster Weise geführter Wettstreit

sich entspann. Es gehörte die grösste Energie und Arbeitsfreudigkeit dazu, um zum Ziele zu gelangen, denn sie mussten Monate lang in den unwirthlichsten und gefährlichsten Theilen der Indianer-Gebiete zubringen.

Nicht allein die tertiären, sondern auch die jurassischen Ablagerungen lieferten ihm eine geradezu staunenswerthe Anzahl neuer gigantischer Säugethiergattungen und Arten von theilweise höchst merkwürdiger, bis dahin gänzlich unbekannter Organisation; aber auch die mesocoischen Reptilien und Vögel wurden durch eine beträchtliche Zahl neuer Formen bereichert, unter denen z. B. die ersten zahnlosen Flugeidechsen von Wyoming und die in der Kreide des westlichen Kansas gefundenen ersten mit kräftig entwickelten Zähnen versehenen Wasservögel allgemeine Aufmerksamkeit erregten. Die Unruhen der Indianer verhinderten weitere Untersuchungen auf diesen Gebieten; Marsh gieng daher in die Bad Lands nach Nebraska und Dakota bis nach Red Cload Agency, wobei er von einer Eskorte vom Fort Laramie begleitet wurde. Bis zum Jahre 1892 betheiligte er sich an den Arbeiten im Felde.

Auf diese Weise brachte Marsh kolossale werthvollste Sammlungen fossiler Wirbelthiere nach New Haven, während die von Cope gesammelten Fossilien in Philadelphia Aufstellung fanden.

Es war nun die Aufgabe die reichen Schätze wissenschaftlich auszunützen und zu bearbeiten. In dem American Journal of Science finden sich von ihm in den Jahren 1861—1899 zahlreiche Abhandlungen, welche über seine Funde vorläufig Bericht erstatten. Die ausführlichen Beschreibungen mit den Schlussfolgerungen und den sich daran anknüpfenden philosophischen Betrachtungen folgten in grossen Monographien. Es mögen von diesen nur hervorgehoben werden: das prachtvoll ausgestattete Werk über die fossilen Odontornithen, seine bahnbrechenden Schriften über die Dinosaurier, seine Abhandlungen über Flugsaurier und Crocodilier, über die neue Säugethierordnung der Pantotherier, über die Dinoceraten, über

Brontotherium, Fillotherium, Coryphodon, über die Gehirnentwicklung fossiler Säugethiere, über fossile Pferde etc.: Arbeiten, deren Resultate in alle neueren Lehrbücher der Geologie und Paläontologie Eingang gefunden haben. Es war Marsh nicht vergönnt die übrigen Monographien zum Abschluss zu bringen, dieselben sind jedoch mit der Beschreibung und den Abbildungen genügend vorbereitet. Durch die Thätigkeit von Cope und Marsh wurde eine vollständige Umgestaltung der bis dahin herrschenden Ansichten über die Mannigfaltigkeit, Organisations- und Verwandtschaftsverhältnisse der fossilen Vertebraten herbeigeführt.

Marsh's Untersuchungen bewegen sich zwar vorzüglich auf descriptivem Gebiete; jedoch war er, als Anhänger der Descendenztheorie, bestrebt, die genetischen Beziehungen der verschiedenen Vertebratentypen zu ermitteln. In dieser Hinsicht gehört ein Vortrag: introduction and succession of vertebrated life in Amerika, den er als Vicepräsident der amerikanischen Naturforscherversammlung im Jahre 1877 in Nashville hielt, zu seinen bedeutenderen literarischen Leistungen.

Zur Aufnahme der werthvollen Sammlungen von Marsh war vorläufig der im Jahre 1875 im Bau vollendete Flügel des grossen Peabody-Museums in New Haven bestimmt worden. Es war Marsh, der seinen reichen Onkel, den hochherzigen George Peabody, veranlasst hatte auf seine Kosten das Museum zu errichten. Als das Museum die Sammlungen nicht mehr zu fassen vermochte, fand eine Theilung derselben zwischen dem Yale College und der National Academy of Science in Washington, deren Präsident Marsh war und für welche er auch gesammelt hatte, statt. Da Marsh keine Familie besass, so vermachte er am 1. Januar 1898 seine eigenen Sammlungen der Yale University, für welche er einen linken Flügel des Peabody-Museums erbauen liess. Es war ihm kein Preis zu hoch, um werthvolle Fossilien für seine Sammlung zu erwerben; so kaufte er auch den berühmten Rhamphorhynchus von Eichstädt an, da es in Bayern damals aus Mangel an Mitteln nicht möglich war, denselben dem Lande zu erhalten; wir wollen

hoffen, dass diese miserabeln Zeiten vorüber sind und die Wissenschaft jetzt besser in ihrem Werthe gewürdiget wird.

Die Sammlung wurde von den grössten Meistern des Faches besucht und bewundert; Huxley sah sie 1876, Darwin 1878 und beide haben sich damals überzeugt, dass sie in wissenschaftlicher Beziehung von keiner in der Welt übertroffen wird, und sie ist seitdem noch sehr vermehrt worden.

Sein ganzes Leben lang war Marsh rastlos thätig im Dienste der Wissenschaft, immer nach neuen Entdeckungen strebend in der Ueberzeugung noch Bedeutendes leisten zu können. Man darf von dem edlen Manne ohne Uebertreibung sagen, dass seit Cuvier und Richard Owen Niemand die Paläontologie der Wirbelthiere durch eine gleiche Fülle neuen Materials bereichert hat; sein Name ist mit den wichtigsten Entdeckungen auf paläontologischem Gebiete in diesem Jahrhundert verknüpft.

Karl Friedrich Rammelsberg.[1])

Karl Friedrich Rammelsberg, früher Professor der Chemie an der Universität Berlin und seit 1855 Mitglied der k. preussischen Akademie der Wissenschaften, ist am 28. Dezember 1899 auf seinem Ruhesitze zu Grosslichterfelde bei Berlin nach längerer Krankheit im 87. Lebensjahre gestorben.

Er war einer der angesehensten Vertreter der unorganischen Chemie in Deutschland und übte eine grosse und erfolgreiche Forscherthätigkeit in mehreren Gebieten der Mineralogie aus, in der Mineralchemie und der quantitativen Mineralanalyse sowie in der Krystallographie.

Er wurde am 1. April 1813 zu Berlin geboren. Nachdem er (1834) das Gymnasium zum grauen Kloster absolvirt hatte, studirte er an der Universität zu Berlin Physik und Chemie und promovirte (1839) daselbst. Anfangs wollte er sich der Pharmazie zuwenden, später aber wurde er, vorzüglich durch

[1]) Mit Benützung der Nekrologe in Leopoldina 1900 Nr. 3 S. 53 und den Berichten der deutschen chem. Ges. 1900 Nr. 1 S. 1.

die Vorlesungen des Chemikers Gustav Rose, bestimmt, die akademische und wissenschaftliche Laufbahn einzuschlagen. 1840 habilitirte er sich an der Universität als Privatdozent für Chemie, wurde 1845 ausserordentlicher Professor, 1851 Lehrer der Chemie und Mineralogie sowie Leiter des chemischen Laboratoriums am Gewerbeinstitut, 1883 kam er als Vorstand an das damals gegründete zweite Universitätsinstitut; im Jahre 1891 trat er in den wohl verdienten Ruhestand.

Rammelsberg hat sich in diesen Stellungen als ungemein eifriger und tüchtiger Lehrer sehr bedeutende Verdienste um den Unterricht in der Chemie erworben; er war es, der das erste chemische Unterrichtslaboratorium in Preussen leitete, nachdem allerdings in Giessen schon länger eine grosse chemische Schule bestand. Auch durch seine zahlreichen vortrefflichen Lehrbücher hat er sehr anregend gewirkt; durch das Lehrbuch der wissenschaftlichen und angewandten Chemie, das Lehrbuch der Stöchiometrie, der chemischen Metallurgie, der Krystallographie und krystallographisch-physikalischen Chemie, dann durch die Leitfäden der qualitativen und quantitativen chemischen Analyse und endlich durch sein gross angelegtes Handbuch der Mineralchemie. Diese Bücher haben zum Theil mehrere Auflagen erlebt und enthalten eine Fülle von Material, namentlich in der physikalischen Chemie.

Als Forscher beschäftigte er sich insbesondere mit der chemischen Zusammensetzung der Mineralien; lange Zeit galt er als der auf diesem Gebiete erfahrenste Gelehrte und es hat wohl Niemand so viele Mineralanalysen ausgeführt, wie er. Seine zahlreichen krystallographischen Arbeiten führten ihn in das Grenzgebiet der physikalischen Chemie, das damals noch wenig betreten war.

Der um die Wissenschaft verdiente Mann war seit dem Jahre 1859 Mitglied unserer Akademie.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 3. November 1900.

1. Herr H. Ebert macht eine Mittheilung über: „Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches) am Starnberger-See."

2. Herr W. Dyck legt eine Abhandlung des Privatdozenten an der hiesigen Universität Dr. Eduard v. Weber: „Liniencomplexe im R_4 und Systeme Pfaff'scher Gleichungen" als Fortsetzung seiner in der Sitzung vom 7. Juli d. Js. eingesandten Abhandlung vor.

3. Herr Alf. Pringsheim spricht über die „Convergenz periodischer Kettenbrüche."



Liniencomplexe im R_4 und Systeme Pfaff'scher Gleichungen.

Von **Eduard von Weber.**

(*Eingelaufen 8. November.*)

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich das Fundamentalproblem in der Theorie der Pfaff'schen Systeme, d. i. die Frage nach der Reducirbarkeit eines solchen Systems auf eine gegebene Zahl von Differentialelementen, für $n-3$- und $n-4$-gliedrige Systeme in n Variabeln eingehend behandelt und die dabei auftretenden Integrationsprobleme charakterisirt. Bei dieser Untersuchung erwies sich als wichtigstes Hilfsmittel die Geometrie der linearen Complexe des R_3, und es liegt sonach die Vermutung nahe, dass die Erledigung unseres Problems für den allgemeinen Fall eines $n-m$-gliedrigen Pfaff'schen Systems in n Variabeln im Wesentlichen auf die Theorie der linearen Complexe im $m-1$-dimensionalen Raume zurückkommt.

In der vorliegenden Note soll die genannte Methode auf $n-5$-gliedrige Pfaff'sche Systeme in n Variabeln angewendet werden.

I. Die linearen Liniencomplexe im vierdimensionalen Raum.

1. Die homogenen Coordinaten eines Punkts in einem vierdimensionalen Raum R_4 bezeichnen wir mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_5$ oder $\eta_1, \ldots \eta_5$ oder $\zeta_1 \ldots \zeta_5$ etc. und sprechen demzufolge auch kurz

---

[1]) „Ueber die Reducirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen", diese Berichte 1900 Bd. XXX, p. 278—300.

von dem „Punkt ξ", dem „Punkt η" u. s. w. Der Buchstabe μ_k bedeute eine k-fach ausgedehnte lineare Punktmannigfaltigkeit des R_4, d. h. die Gesamtheit der Punkte ξ, die ein System von $4 - k$ linear unabhängigen linearen homogenen Gleichungen zwischen den ξ befriedigen. Für die Mannigfaltigkeiten μ_1, d. h. für die „Geraden" des R_4 gebrauchen wir die Bezeichnungen g, h, g', h' u. s. w. Eine μ_2, welche durch die Gerade g und den nicht auf ihr liegenden Punkt P bestimmt ist, werde als die $\mu_2\,(P, g)$ bezeichnet u. s. w. Eine μ_3 nennen wir auch eine „Ebene" des R_4.

Ein linearer Complex im R_4 wird definirt durch eine alternirende bilineare Gleichung:

$$\sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k a_{ik}\,\xi_i\,\eta_k = 0, \tag{1}$$

worin die a_{ik} Constante bedeuten, die den Gleichungen

$$a_{ik} = -a_{ki}\,;\ a_{ii} = 0$$

genügen. Wir wollen diesen Complex mit dem Buchstaben α bezeichnen. Eine „Gerade des Complexes α" ist dann jede μ_1 der Eigenschaft, dass zwei (und infolge dessen irgend zwei) ihrer Punkte die Relation (1) befriedigen. Es gibt in R_4 ∞^6 Gerade, von denen ∞^5 dem Complex α angehören. Den Inbegriff aller Geraden, die zwei Complexen

$$\sum\sum a_{ik}\,\xi_i\,\eta_k = 0,\ \sum\sum \beta_{ik}\,\xi_i\,\eta_k = 0$$

gemeinsam sind, bezeichnen wir als „die zweigliedrige Congruenz (α, β)". Ebenso sprechen wir von drei-, vier-gliedrigen Congruenzen u. s. w. Dabei wird immer angenommen, dass die betreffenden Complexe linear unabhängig sind, d. h. dass ihre linken Seiten nicht durch eine lineare homogene Identität mit constanten Coefficienten verknüpft seien.

Der Rang der alternirenden Matrix

$$a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots 5) \tag{2}$$

ist entweder 4 oder 2; im ersten Fall nennen wir den Complex α „allgemein", im zweiten „speziell".

2. Ist a allgemein, wie wir in dieser und den folgenden 3 Nummern annehmen, so besitzen die linearen Gleichungen:

$$\sum_1^5{}^k a_{ik}\, \xi_k = 0 \tag{3}$$

eine und nur eine Lösung $\zeta_1 \ldots \zeta_5$, die der „singuläre Punkt" von a heissen möge. Alle ∞^3 Geraden durch diesen Punkt S sind Complexgerade. Durch einen beliebigen Punkt η gehen nur ∞^2 Complexgerade; sie liegen in der durch (1) definirten Ebene, wobei die ξ laufende Coordinaten bedeuten. Diese Ebene bezeichnen wir als eine „zugeordnete μ_3", speziell als die dem Punkte η zugeordnete μ_3. Bedeutet ζ den singulären, η einen beliebigen Punkt, so wird die Gleichung (1) nicht geändert, wenn man η_i durch $\eta_i + \lambda\, \zeta_i$ ersetzt. Daraus folgt: Allen Punkten einer Geraden g, die den singulären Punkt S enthält, ist dieselbe μ_3 zugeordnet. Man erkennt auch sofort, dass zwei verschiedenen Punkten η, η', deren Verbindungslinie nicht durch S geht, auch zwei verschiedene μ_3 zugeordnet sind.

3. Jede zugeordnete μ_3 enthält den Punkt S; ist daher eine solche Ebene durch die Relation

$$u_1\, \xi_1 + \ldots + u_5\, \xi_5 = 0 \quad \text{oder} \quad u_\xi = 0 \tag{4}$$

definirt, so besitzt die alternirende Matrix:

$$\begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{15} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{51} & a_{52} & \ldots & 0 & u_5 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_5 & 0 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

den Rang vier. Umgekehrt, ist dies der Fall, so haben die linearen Gleichungen mit den 6 Variabeln ξ_i, ϱ:

$$u_\xi = 0; \; \sum{}^k a_{ik}\, \xi_k = \varrho\, u_i \quad (i = 1, \ldots 5)$$

zwei Lösungensysteme

$$\begin{array}{l} \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_5, 0 \\ \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_5, \varrho \quad (\varrho \neq 0), \end{array}$$

d. h. die durch (4) definirte μ_3 ist jedem Punkte der Geraden

g zugeordnet, die die Punkte η, ζ verbindet. Jede in der μ_3 gelegene Gerade, die dem Complex a angehört, trifft g und umgekehrt, m. a. W.: die auf der μ_3 gelegenen Complexgeraden bilden einen speziellen R_3-Complex mit der Direktrix g.

Demgegenüber ist für eine beliebige, durch (4) dargestellte Ebene die Determinante (5) nicht null, und die auf ihr liegenden Complexgeraden bilden einen allgemeinen R_3-Complex. In der That schliesst man aus bekannten Sätzen[1]), dass sich die linke Seite der Gleichung (1) vermöge der beiden kongruenten Relationen $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ auf eine Bilinearform in 4 Variabelnpaaren vom Range 4 oder 2 reducirt, je nachdem der Rang der Matrix (5) gleich 6 oder 4 ist.

4. Wir sagen, eine μ_2, die durch die Gleichungen

$$(6) \qquad u_\xi = 0, \quad v_\xi = 0$$

definirt sei, „genügt" dem Complex a, oder „ist eine μ_2 des Complexes a" (eine „Complex-μ_2"), wenn irgend zwei ihrer Punkte die Gleichung (1) erfüllen. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass drei linear unabhängige Punkte der μ_2 wechselseitig in der genannten Beziehung stehen. Dann verschwindet die linke Seite von (1) identisch vermöge (6) und der dazu congruenten Relationen $u_\eta = 0$, $v_\eta = 0$[2]). Damit also durch (6) eine Complex-μ_2 definirt sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Matrix:

$$(7) \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{15} & u_1 & v_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{51} & a_{52} & \ldots & 0 & u_5 & v_5 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_5 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_5 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

den Rang 4 besitze[3]). Man erkennt unmittelbar, dass es für einen allgemeinen Complex ∞^3 solcher Complex-μ_2 gibt; sie

[1]) Vgl. z. B. mein Buch: „Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem etc." (Leipzig 1900), Kap. IX, § 3.

[2]) Diese Berichte 1900, p. 280.

[3]) Vgl. z. B. mein Buch a. a. O.

gehen alle durch den singulären Punkt S, und man erhält sie sämtlich, indem man die ∞^3 Geraden des allgemeinen R_3-Complexes, den der Complex a aus einer beliebigen nicht durch S gehenden μ_3 ausschneidet (Nr. 3), mit S durch je eine μ_2 verbindet. Durch einen beliebigen Punkt P gehen einfach unendlich viele Complex-μ_2; diese bilden ein Büschel mit der Axe PS, das in der dem Punkte P zugeordneten μ_3 liegt.

Ist m eine beliebige, durch S gehende μ_2, und sind P, Q irgend zwei auf ihr gelegene Punkte, deren Verbindungslinie nicht durch S geht, so schneiden sich die beiden μ_3, die bezw. den Punkten P und Q zugewiesen sind, in einer ebenfalls durch S gehenden μ_2, die wir die „zu m conjugirte" nennen, und mit m' bezeichnen wollen; m und m' haben nur den Punkt S gemein. Die Beziehung zwischen m und m' ist wechselseitig; eine Complex-μ_2 und nur eine solche ist sich selbst conjugirt.

5. Ist der Complex a speziell, so besitzen die Gleichungen (3) drei unabhängige Lösungen; die entsprechenden Punkte definiren eine μ_2, die wir die „singuläre μ_2" von a nennen und mit s bezeichnen. Jede Gerade, die s schneidet, gehört dem Complex an, und umgekehrt; ein spezieller Complex ist also durch Angabe seiner singulären μ_2 eindeutig bestimmt. Jede μ_2, die s nach einer Geraden schneidet, ist eine Complex-μ_2, und umgekehrt; die Mannigfaltigkeit der Complex-μ_2 ist infolgedessen ∞^4. Dagegen gibt es jetzt nur ∞^1 zugeordnete μ_3, die ein Büschel bilden und alle die s enthalten. Jede solche Ebene hat die Eigenschaft, dass irgend zwei ihrer Punkte die Complexgleichung (1) befriedigen, dass also die linke Seite von (1) vermöge der Definitionsgleichung $u_\xi = 0$ einer solchen μ_3 und vermöge der dazu congruenten Relation $u_\eta = 0$ identisch verschwindet. Infolge dessen kann die Gleichung (1) auch in der Form

$$u_\xi\, v_\eta - u_\eta\, v_\xi = 0$$

geschrieben werden, worin $u_\xi = 0$ und $v_\xi = 0$ irgend zwei zugeordnete Ebenen bedeuten.

Umgekehrt, gibt es ein Relationenpaar $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$, das die Gleichung (1) identisch befriedigt, so ist a ein spezieller Complex.

6. Wir betrachten nunmehr eine Schaar von ∞^1 Complexen

$$(8) \qquad \sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k (\lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik})\, \xi_i\, \eta_k = 0,$$

und nehmen zunächst an, dass in der Matrix

$$(9) \qquad \lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots 5)$$

nicht alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten für beliebige λ, μ verschwinden. Wir bezeichnen ferner mit:

$$(-1)^{i+1} \cdot \Pi_i$$

das Pfaff'sche Aggregat der Ordnung 4, dessen Quadrat gleich derjenigen 4-reihigen Unterdeterminante ist, die aus dem Schema (2) durch Streichung der i^{ten} Zeile und Spalte entsteht, setzen also:

$$\Pi_1 = a_{23}\, a_{45} + a_{24}\, a_{53} + a_{25}\, a_{34}$$
$$-\Pi_2 = a_{13}\, a_{45} + a_{14}\, a_{53} + a_{15}\, a_{34} \text{ etc.,}$$

und legen den Buchstaben $K_1 \ldots K_5$ die analoge Bedeutung hinsichtlich des Complexes β bei. Die Unterdeterminante, die aus (9) durch Weglassung der i^{ten} Zeile und Spalte entsteht, ist dann gleich dem Quadrat des Ausdrucks:

$$(10) \qquad A_i = \lambda^2\, \Pi_i + \lambda\, \mu\, \Omega_i + \mu^2\, K_i,$$

wobei die Ω_i in folgender Weise definirt sind:

$$\Omega_1 = a_{23}\, \beta_{45} + a_{24}\, \beta_{53} + \ldots + a_{45}\, \beta_{23} \text{ u. s. w.}$$

Die linearen Gleichungen:

$$(11) \qquad \sum_1^5{}^k \omega_k\, (\lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}) = 0 \quad (i = 1 \ldots 5)$$

besitzen ein und nur ein Lösungensystem $\omega_1 \ldots \omega_5$, bestehend aus binären Formen in λ, μ, die wir auf ihren Minimalgrad m

reducirt denken. Die Theorie der Elementarteiler[1]) liefert dann folgende Gleichung:

$$(12) \qquad 5 = 2m + 1 + 2l,$$

worin l den Grad des grössten gemeinsamen Divisors der binären Formen A_i bezeichnet; m hat also einen der Werte 2, 1, 0.

7. Bei der folgenden Untersuchung richten wir unser Hauptaugenmerk auf die Frage nach den Mannigfaltigkeiten μ_2, die die Congruenz (α, β), d. h. alle Complexe der Schaar (8) befriedigen; eine solche μ_2 nennen wir kurz eine „Congruenz-μ_2" oder eine „μ_2 der Congruenz (α, β)." Diese Definition überträgt sich ohne weiteres auf mehr als zweigliedrige Congruenzen. Insbesondere erkennt man leicht: Damit eine zweidimensionale ebene Mannigfaltigkeit der r-gliedrigen Congruenz $(\alpha, \beta \ldots \varepsilon)$ genüge, ist notwendig und hinreichend, dass sie r bestimmte, irgendwie ausgewählte, aber linear unabhängige Complexe der Schaar $(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon)$ befriedige. Dazu ist natürlich vor allem notwendig, dass sie die singulären Punkte aller in der Schaar vorhandenen allgemeinen Complexe enthalte, und die singuläre μ_2 eines jeden der Schaar angehörenden speziellen Complexes nach je einer Geraden schneide.

8. Hat die in Nr. 6 definirte Zahl m den Wert 2, so gibt es (wegen $l = 0$) in der Schaar (8) keinen speziellen Complex. Zwei verschiedene Complexe der Schaar besitzen verschiedene singuläre Punkte; alle diese Punkte liegen nach Nr. 6 in einer μ_2 und erfüllen daselbst einen Kegelschnitt C. Die Annahme nämlich, dass ∞^1 singuläre Punkte von Complexen der Schaar (8) eine Gerade erfüllen, zieht, wie wir in der nächsten Nr. sehen werden, die Bedingung $m = 1$ nach sich.

Nach Nr. 7 gibt es also nur eine einzige „Congruenz-μ_2", d. h. ein einziges zweigliedriges Relationensystem (6) derart, dass in der siebenzeiligen Matrix

---

[1]) Vgl. z. B. meine Arbeit: „Ueber Schaaren von Bilinearformen", diese Berichte 1898, p. 374.

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \lambda\,a_{ik} + \mu\,\beta_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k & , 0, & 0 \\ v_k & , 0, & 0 \end{vmatrix} \text{[1]}$$

alle 6-reihigen Hauptdeterminanten für beliebige Werte λ, μ verschwinden. Dieses zweigliedrige Relationensystem wird auch erhalten, wenn man in der 5-zeiligen Matrix:

$$\| \xi_i,\ \Pi_i,\ \Omega_i,\ K_i \| \quad (i = 1, \ldots 5)$$

alle 4-reihigen Determinanten null setzt, oder noch einfacher in der Form:

$$(14)\qquad \sum^i \sum^k a_{ik}\, K_k\, \xi_i = 0,\ \sum \sum \beta_{ik}\, \Pi_k\, \xi_i = 0$$

mit Hilfe der Bemerkung, dass die in Rede stehende μ_2 derjenigen Ebene angehören muss, die dem singulären Punkt des einen Complexes im andern Complex zugewiesen ist.

Die Congruenz (α, β) umfasst in dem vorliegenden Fall ∞^4 Gerade, von denen je ∞^1 durch einen beliebigen Punkt des R_4, und je ∞^2 durch einen Punkt des Kegelschnitts C gehen.

9. Wenn die singulären Punkte der ∞^1 Complexe (8) eine Gerade g erfüllen sollen, so müssen in der Matrix

$$(15)\qquad \begin{matrix} \Pi_1 & \Omega_1 & K_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Pi_5 & \Omega_5 & K_5 \end{matrix}$$

die dreireihigen Determinanten alle verschwinden, und wir dürfen annehmen, dass nicht alle zweireihigen Determinanten null sind, da sonst die Complexe (8) einen gemeinsamen singulären Punkt hätten, also $m = 0$ wäre.

Die Formen A_i (Nr. 6) sind also unter der gemachten Annahme lineare Combinationen zweier Formen $\Phi(\lambda, \mu)$ und $\Psi(\lambda, \mu)$, die sich nicht nur um einen constanten Faktor unterscheiden, und der singuläre Punkt des den Parameterwerten

[1] Wir gebrauchen hier und im folgenden für geränderte alternirende Schemata eine auch sonst übliche abkürzende Schreibweise.

λ, μ entsprechenden Complexes der Schaar (8) hat die Coordinaten

$$\rho\,\xi_i = a_i\,\Phi(\lambda, \mu) + b_i\,\Psi(\lambda, \mu), \tag{16}$$

worin ρ einen Proportionalitätsfaktor, die a_i, b_i Constante bedeuten. Die in λ, μ quadratische Gleichung:

$$\Phi - \omega\,\Psi = 0$$

besitzt, wenn für ω eine beliebige von Null verschiedene Constante gewählt wird, zwei Lösungen λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2, deren Determinante $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ von Null verschieden ist. Sind nun die Complexe, die bezw. den Parameterwerten

$$\lambda_1, \mu_1;\quad \lambda_2, \mu_2 \tag{17}$$

entsprechen, beide allgemein, so sind die Grössen $\Psi(\lambda_1, \mu_1)$ und $\Psi(\lambda_2, \mu_2)$ beide von Null verschieden, da andernfalls die Formen $A_1 \ldots A_5$ für eines der beiden Wertsysteme (17) verschwänden; ferner verschwinden die Grössen

$$a_i\,\omega + b_i \quad (i = 1, \ldots 5) \tag{18}$$

nicht alle, da sonst die A_i proportional, also $m = 0$ wäre. Die genannten beiden allgemeinen Complexe haben dann einen gemeinschaftlichen singulären Punkt mit den Coordinaten (18), was offenbar wiederum auf die Voraussetzung $m = 0$ hinauskommt.

Ist aber einer der genannten zwei Complexe speziell, etwa der den Parameterwerten λ_1, μ_1 entsprechende, so hat man

$$a_i\,\Phi(\lambda_1, \mu_1) + b_i\,\Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0,$$

und infolgedessen $\Phi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, $\Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, da die Determinanten $a_i b_k - a_k b_i$ aus dem vorhin angeführten Grund nicht alle verschwinden; die Formen Φ und Ψ, und mithin auch die Formen $A_1 \ldots A_5$ haben also einen Linearfaktor gemein, d. h. die Zahlen, die in Nr. 6 mit m und l bezeichnet wurden, haben beide den Wert 1.

10. Umgekehrt, ist $m = l = 1$, so haben die A_i einen Linearfaktor gemein, d. h. die Schaar (8) enthält einen und nur einen speziellen Complex, dessen singuläre μ_2 mit s be-

zeichnet werde; die singulären Punkte der ∞^1 Complexe (8) erfüllen eine Gerade g, die die Mannigfaltigkeit s in einem Punkte P trifft.

Diese letztere Behauptung ergibt sich folgendermassen: Jede Gerade der Congruenz (α, β) trifft die Mannigfaltigkeit s (Nr. 5), und die Verbindungslinie der singulären Punkte irgend zweier Complexe der Schaar ist eine Congruenzgerade; die Annahme ferner, dass g auf s liege, ist unstatthaft, da sonst die Gleichungen

$$(19) \qquad \sum^k \alpha_{ik}\,\xi_k = 0, \ \sum^k \beta_{ik}\,\xi_k = 0 \quad (i = 1, ..5)$$

von allen singulären Punkten ξ der Complexe unserer Schaar erfüllt würden, also der Fall $m = 0$ vorläge.

Sind α und β allgemeine Complexe, und λ_0, μ_0 die Parameter des speziellen Complexes der Schaar, so hat der vorhin genannte Punkt P Coordinaten der Form $\varrho\, \Pi_i + \sigma\, K_i$, und man hat:

$$\varrho\,\sigma \neq 0; \ \lambda_0\,\mu_0 \neq 0;$$

$$(20) \quad \sum^k (\lambda_0\,\alpha_{ik} + \mu_0\,\beta_{ik})\,(\varrho\,\Pi_k + \sigma\,K_k) = 0 \quad (i = 1, 2, ..5),$$

oder auch:

$$(21) \quad \lambda_0\,\sigma \sum^k \alpha_{ik}\,K_k + \mu_0\,\varrho \sum^k \beta_{ik}\,\Pi_k = 0 \quad (i = 1, 2, ..5),$$

in Worten: Bezeichnet man mit M die $\mu_3\,(g, s)$, so ordnet jeder Complex der Schaar (8) einem beliebigen Punkte von g eben die Mannigfaltigkeit M zu (Nr. 2). In der That drücken ja die Relationen (21) aus, dass die μ_3, die der Complex α dem Punkte K_k zuweist, übereinstimmt mit der μ_3, die der Complex β dem Punkte Π_k zuordnet; also ordnet jeder Complex der Schaar (8) einem beliebigen Punkte von g dieselbe μ_3 zu, und letztere enthält g, aber offenbar auch s, d. i. die singuläre Mannigfaltigkeit des in der Schaar enthaltenen speziellen Complexes.

Daraus folgt sofort: Alle in M liegenden Geraden, die g schneiden, sind Congruenzgerade, alle einfach unendlich vielen in M gelegenen μ_2, die g enthalten, sind Congruenz-μ_2, und nach Nr. 7 gibt es auch keine

andere Congruenz-μ_2; M möge die ausgezeichnete Ebene der Congruenz (α, β) heissen.

Die Gleichungen (14) reduciren sich jetzt auf eine einzige, nämlich diejenige der ausgezeichneten Ebene. Man erhält die allgemeinste Congruenz von der hier studirten Beschaffenheit, indem man einen beliebigen allgemeinen Complex α und einen beliebigen speziellen Complex β wählt, doch so, dass der singuläre Punkt von α nicht auf der singulären μ_2 von β gelegen ist.

11. Ist die in Nr. 6 definirte Zahl $m = 0$, so wird wegen Gleichung (12) die Zahl $l = 2$, d. h. die Pfaff'schen Aggregate A_i sind proportional. Die Complexe der Schaar haben also einen gemeinsamen singulären Punkt S, und es gibt zwei im allgemeinen verschiedene spezielle Complexe, die der Schaar angehören, und deren singuläre μ_2 beide durch S gehen. Sind s, s' diese beiden μ_2, und bedeutet α einen allgemeinen Complex der Schaar, so schneiden alle Geraden von α, die mit s einen Punkt gemein haben, auch die Mannigfaltigkeit s' und umgekehrt, d. h. s und s' sind hinsichtlich des Complexes α conjugirt (Nr. 4 am Schluss).

Man erhält die allgemeinste in Rede stehende Configuration, wenn man α beliebig wählt, und unter β einen speziellen Complex versteht, dessen singuläre μ_2 durch den singulären Punkt S von α geht. Wählt man insbesondere eine μ_2 des Complexes α (Nr. 4), dann und nur dann coincidiren die beiden speziellen Complexe der Schaar (α, β), d. h. die 4-reihigen Hauptunterdeterminanten der Matrix (9) werden alle mit λ^4 proportional.

Durch jede Gerade g einer Congruenz (α, β), für die $m = 0$ ist, geht im allgemeinen (d. h. wenn g den singulären Punkt S nicht enthält) eine und nur eine Congruenz-μ_2; es ist dies diejenige μ_2, die g mit S verbindet. Dasselbe gilt für jede Gerade, die S enthält, ohne in einer der beiden singulären Mannigfaltigkeiten s, s' zu liegen; dagegen ist jede in s oder s' gelegene Gerade auf einfach unendlich vielen Congruenz-μ_2

enthalten. Es gibt daher im gegenwärtigen Fall zweifach unendlich viele Congruenz-μ_2.

12. Verschwinden in der Matrix (9) alle vierreihigen Determinanten identisch, so sind alle Complexe der Schaar (8) speziell, und die linearen Gleichungen (11) besitzen 3 Lösungensysteme, deren Minimalgradzahlen hinsichtlich λ, μ mit m_1, m_2, m_3 bezeichnet seien. Sind dann die Elemente der Matrix (9) nicht proportional, also die Complexe α und β nicht identisch, so folgt aus der Theorie der Bilinearformen[1]) die Gleichung:

$$5 = 2(m_1 + m_2 + m_3) + 3.$$

Man hat sonach $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = 1$, d. h. die linearen Gleichungen (19) haben zwei und nur zwei Lösungen η_i, ζ_i gemein. Die Verbindungslinie der Punkte η, ζ werde mit g bezeichnet. Die ∞^1 singulären μ_2 der Complexe unserer Schaar bilden ein Büschel mit der Axe g, das in einer μ_3 gelegen ist. Diese letztere μ_3 nennen wir die „singuläre Ebene M". Da jede Congruenz-μ_2 alle singulären μ_2 nach je einer Geraden schneiden muss (Nr. 7), so gibt es zwei Arten von Congruenz-μ_2: einmal sämtliche 3-fach unendlich vielen μ_2, die in M liegen, sodann die zweifach unendlich vielen μ_2, die die Gerade g enthalten. Die Congruenz ist identisch mit dem Inbegriff aller Geraden, die entweder g schneiden oder in M liegen.

Ist $u_\xi = 0$ die Definitionsgleichung der Ebene M, so verschwinden in der Matrix:

$$(22) \qquad \begin{Vmatrix} \lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}, & u_i \\ u_k & , 0 \end{Vmatrix}$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten identisch, und M ist die einzige Ebene dieser Eigenschaft.

13. Die Sätze der vorigen Nr. lassen sich leicht verallgemeinern. Wir betrachten die r-gliedrige Congruenz ($r > 2$):

$$(23) \qquad \sum \sum (\lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik} + \ldots + \tau\, \varepsilon_{ik})\, \xi_i\, \eta_k = 0$$

und nehmen an, dass der Rang des Schemas

[1]) Vgl. z. B. diese Berichte 1898, pag. 374.

(24) $$\left| \lambda a_{ik} + \ldots + \tau \varepsilon_{ik} \right| \quad (i, k = 1, \ldots 5)$$

gleich zwei sei. Dann sind alle Complexe der Schaar (23) speziell; von den singulären μ_2 der Complexe $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ schneiden sich also je zwei nach einer Geraden. Diese $r-1$-fach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten haben also entweder

a) eine Gerade g gemein, d. h. die $5r$ linearen Gleichungen:

(25) $$\sum^k a_{ik} \xi_k = 0, \ldots \sum^k \varepsilon_{ik} \xi_k = 0 \quad (i = 1, \ldots 5)$$

besitzen zwei Lösungen, und man hat $r = 3$; oder

b) sie liegen alle in einer dreidimensionalen linearen Mannigfaltigkeit M, der „singulären Ebene der Congruenz (23)", und es ist $r = 3$ oder 4.

Im ersten Fall besteht die Congruenz $(\alpha \beta \gamma)$ aus allen Geraden, die g treffen; es gibt zweifach unendlich viele Congruenz-μ_2, die alle durch g gehen und mit den singulären μ_2 der Complexe (23) identisch sind. Ist im Falle b) $r = 4$, so sind die Congruenzgeraden mit dem Inbegriff der in M liegenden Geraden identisch; ist aber $r = 3$, so haben die singulären μ_2 der Complexe α, β, γ einen Punkt P gemein, und die Congruenz setzt sich zusammen aus allen durch P gehenden und allen in M liegenden Geraden; unter beiden Annahmen gibt es dreifach unendlich viele Congruenz-μ_2, nämlich alle in M gelegenen μ_2.

Ist im Falle b) die Ebene M durch die Gleichung $u_\xi = 0$ definirt, so erhält man zur Bestimmung der Unbekannten u_i ein verträgliches System linearer Gleichungen, indem man ausdrückt, dass in der Matrix

$$\left| \begin{matrix} \lambda a_{ik} + \ldots + \tau \varepsilon_{ik}, & u_i \\ u_k & , 0 \end{matrix} \right|$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten identisch verschwinden, und es gibt nur e i n Wertsystem u_i dieser Eigenschaft.

Natürlich folgt aus der Existenz einer Ebene $u_\xi = 0$, deren sämtliche Gerade den Complexen $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ genügen, auch umgekehrt, dass der Rang der Matrix (24) gleich zwei ist.

Ist der Rang der Matrix (24) gleich vi
Schaar (23) ∞^{r-1} allgemeine Complexe. E
muss alle singulären Punkte dieser Complexe
also überhaupt eine Congruenz-μ_2 existiren,
singulären Punkte der ∞^{r-1} Complexe entwed
liegen, oder eine Gerade erfüllen, oder endlic
sein; wir wollen diese Annahmen der Reihe n

14. Bezeichnet man ähnlich wie in Nr. 6 r
$A_i \equiv \Omega_{11}^{(i)} \lambda^2 + \Omega_{22}^{(i)} \mu^2 + \ldots + \Omega_{rr}^{(i)} \tau^2 + \Omega_{12}^{(i)} \lambda \mu + \ldots$
das Pfaff'sche Aggregat, dessen Quadrat gleich i
Streichung der i^{ten} Zeile und Spalte aus (24)
Minor, so ist der singuläre Punkt des Complexe
die Gleichungen

$$\varrho\, \xi_i = A_i \quad (i = 1, \ldots 5) \tag{26}$$

definirt, worin ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeu

Damit diese Punkte alle einer μ_2 angehören, ist
und hinreichend, dass alle 4-reihigen, nicht aber alle
Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ \Omega_{11}^{(i)} & \Omega_{12}^{(i)} & \ldots & \Omega_{r-1,r}^{(i)}, & \Omega_{rr}^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \end{array} \right\| \tag{27}$$

verschwinden, und man erhält die Definitionsgleichungen
μ_2, indem man obiger Matrix die Spalte $\xi_1 \ldots \xi_5$ beifügt
alle 4-reihigen Determinanten des so gebildeten Schemas
setzt. Damit aber diese μ_2 wirklich eine Congruenz-μ_2 se
weiterhin auszudrücken, dass sie die Complexe $\alpha, \beta, \ldots \tau$
befriedigt (Nr. 7).

15. Damit die singulären Punkte der Complexe (23) e
Gerade g erfüllen, ist notwendig und hinreichend, dass in
Matrix (27) alle dreireihigen, aber nicht alle zweireihigen Unte
determinanten verschwinden. Dann reduciren sich die quadrat
schen Formen $A_1 \ldots A_5$ auf nur 2 linear unabhängige, d. h. di
Formeln (26) können auf folgende Gestalt gebracht werden:

$$\varrho\,\xi_i = a_i\,\Phi + b_i\,\Psi \quad (i = 1, .. 5),$$

Φ, Ψ zwei quadratische Formen der r Variabeln $\lambda, \mu, .. \tau$, e a_i, b_i Constante bedeuten. Die Determinanten $a_i b_k - a_k b_i$ winden offenbar nicht alle, da sonst die singulären Punkte omplexe (23) alle identisch wären.

Deuten wir die $\lambda, \mu, .. \tau$ für den Augenblick als homogene tcoordinaten in einem Raume $\mathfrak{R}_{r-1}$, so wird durch jeden t $\mathfrak{P}$ dieses Raums ein Complex $\mathfrak{C}$ der Schaar (23) repräsentirt; r ist dann und nur dann speziell, wenn $\mathfrak{P}$ auf der Schnitt-nigfaltigkeit der beiden Flächen:

$$\Phi = 0, \; \Psi = 0$$

t. Es seien nun $\lambda, \mu, .. \tau$ und $\lambda', \mu', .. \tau'$ zwei Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ $\mathfrak{R}_{r-1}$, die nicht auf der Mannigfaltigkeit (29) liegen, aber de der Relation

$$\Phi - \omega\;\Psi = 0 \qquad \text{)}$$

nügen, worin ω eine beliebige Constante bedeutet. Dann präsentiren die Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ allgemeine Complexe $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ der haar (23) mit gemeinsamem singulären Punkt, und da alle ^{1} Complexe der durch $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ definirten Congruenz diesen ngulären Punkt gemein haben, so müssen ihre repräsentiren-en Punkte die Relation (30) ebenfalls erfüllen. Enthält also ie Fläche (30) zwei Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$, die nicht auf der Mannig-altigkeit (29) gelegen sind, so enthält sie auch alle Punkte hrer Verbindungslinie. Daher müssen alle quadratischen Formen $\Phi - \omega\,\Psi$ in je zwei Linearfaktoren zerfallen, und dies ist nur möglich, wenn Φ, Ψ selbst und infolge dessen auch die Pfaff-schen Aggregate $A_1 .. A_5$ einen Linearfaktor L gemein haben. Durch die Relation

$$L \equiv a\,\lambda + b\,\mu + .. + e\,\tau = 0$$

wird nun eine in der Schaar (23) enthaltene $r - 1$-gliedrige Congruenz definirt, die aus lauter speziellen Complexen besteht; also muss jedenfalls $r \leq 5$ sein.

16. Es sei zunächst $r = 3$. Unter a verstehen wir dann einen allgemeinen Complex, unter (β, γ) die soeben constatirte,

aus ∞^1 speziellen Complexen bestehende Congruenz. Ist der singuläre Punkt S von a nicht auf der singulären Ebene M dieser Congruenz gelegen, so kann nach Nr. 7 nur die μ_2, die den Punkt S mit der Schnittgeraden g der beiden singulären μ_2 von β und γ verbindet, den 3 Complexen a, β, γ gleichzeitig genügen. Damit dies der Fall sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Gerade g dem Complex a angehöre.

Liegt dagegen S auf M, so gibt es nach Nr. 4 einfach unendlich viele in M gelegene μ_2, die alle eine Gerade g' enthalten und dem Complex a, aber nach Nr. 12 auch den Complexen β und γ genügen: man erkennt auch nach Nr. 7 sofort, dass es keine andern μ_2 der Congruenz (a, β, γ) geben kann.

Zweitens machen wir die Annahme $r = 4$ und bezeichnen wieder mit a einen allgemeinen, mit (β, γ, δ) die Congruenz der ∞^2 speziellen Complexe. Haben die singulären Mannigfaltigkeiten der letzteren eine Gerade g gemein (Nr. 13), und genügt diese dem Complex a, so befriedigt die μ_2 (S, g) und nur diese alle 4 gegebenen Complexe. Besitzt dagegen die Congruenz (β, γ, δ) eine singuläre Mannigfaltigkeit M (Nr. 13), und liegt S auf dieser, so gibt es wie vorhin ein in M gelegenes Büschel von einfach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten μ_2, die unsere 4 Complexe gleichzeitig erfüllen. In allen andern Fällen existirt überhaupt keine μ_2 der Congruenz $(a\ \beta\ \gamma\ \delta)$.

Unter der Annahme $r = 5$ endlich muss der singuläre Punkt S des allgemeinen Complexes a auf der singulären Ebene M der speziellen Congruenz $(\beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon)$ liegen, wenn es überhaupt eine μ_2 der 5-gliedrigen Congruenz $(a \,.\,.\, \varepsilon)$ geben soll; ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es wie in den früheren Fällen ein Büschel von einfach unendlich vielen Congruenz-μ_2.

17. Aus der vorigen Nr. folgt, dass unter gewissen leicht aufzustellenden rationalen Bedingungsgleichungen für die $a_{ik}, \beta_{ik} \ldots$ innerhalb einer zwei- oder mehrgliedrigen Congruenz einfach unendlich viele Congruenz-μ_2 existiren können, die alle in einer μ_3 liegen und daselbst ein Büschel mit gemeinsamer Axe

g bilden; diese μ_3 wollen wir dann als die „ausgezeichnete Ebene“ der Congruenz $(\alpha, \beta, .. \varepsilon)$ bezeichnen.

18. Sind die in Nr. 14 betrachteten quadratischen Formen $\Delta_1, .. \Delta_5$ proportional, dann und nur dann haben die linearen Gleichungen

$$(31) \qquad \sum^k \alpha_{ik} \xi_k = 0, \; \sum^k \beta_{ik} \xi_k = 0 \, .. \quad (i = 1 \, .. 5)$$

eine Lösung, die Complexe der r-gliedrigen Congruenz $(\alpha, \beta, .. \varepsilon)$ mithin den singulären Punkt S gemein. Es sei R_3 eine beliebige ebene, dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die den Punkt S nicht enthält. Die auf R_3 gelegenen Geraden des Complexes α bilden dann einen gewöhnlichen R_3-Complex α'; ebenso schneidet β aus dem R_3 einen gewöhnlichen Liniencomplex β' aus, etc. Ist g eine gemeinsame Gerade der Complexe $\alpha', \beta', .. \varepsilon'$, so genügt die $\mu_2 \, (g, S)$ allen Complexen der Schaar $(\alpha .. \varepsilon)$, und umgekehrt erhält man auf diesem Wege auch alle μ_2 unserer Congruenz; die Aufsuchung dieser letzteren reducirt sich also auf die Ermittelung der gemeinsamen Geraden mehrerer Liniencomplexe im gewöhnlichen Raum.

Die Congruenz $(\alpha, \beta, .. \varepsilon)$ setzt sich unter der gemachten Annahme zusammen aus den Geraden, die durch S gehen, und aus den Geraden, die in den soeben definirten Congruenz-μ_2 gelegen sind.

19. Eine zweigliedrige Congruenz besteht aus ∞^4 Geraden; durch einen beliebigen Punkt P des R_4, der nicht auf der singulären μ_2 eines in der Congruenz enthaltenen speziellen Complexes gelegen ist oder mit dem singulären Punkt eines der Complexe der Schaar zusammenfällt, geht ein lineares Büschel von Congruenzgeraden; hat P eine der angegebenen besonderen Lagen, so gehen durch ihn ∞^2 Congruenzgeraden. Ist P gemeinsamer singulärer Punkt aller allgemeinen Complexe der Schaar, oder sind die ∞^1 Complexe alle speziell und liegt P auf der gemeinsamen Schnittgeraden ihrer singulären Mannigfaltigkeiten, so sind alle durch P gehenden Geraden in der Congruenz

Eine dre[illegible] steht im allgemeinen

aus ∞^3 Geraden, von denen eine und nur eine durch einen beliebigen Punkt P des R_4 geht. Sollen ∞^4 Congruenzgerade vorhanden sein, so können diese erstens eine dreifach ausgedehnte, notwendig lineare Punktmannigfaltigkeit M erfüllen; dann sind alle Complexe der Schaar speziell, und M ist ihre singuläre Mannigfaltigkeit (Nr. 13). Zweitens aber können die ∞^4 Congruenzgeraden den Raum R_4 erfüllen, und es geht dann durch jeden Punkt P ein lineares Büschel von ∞^1 Congruenzgeraden, mit andern Worten: Bedeuten $\eta_1 \ldots \eta_5$ die Coordinaten von P, so reduciren sich die drei linearen Gleichungen:

$$\sum \sum \alpha_{ik} \eta_k \xi_i = 0, \quad \sum \sum \beta_{ik} \eta_k \xi_i = 0, \quad \sum \sum \gamma_{ik} \eta_k \xi_i = 0$$

auf nur 2 linear unabhängige. Für jedes Wertsystem $\eta_1 \ldots \eta_5$ gibt es also drei Grössen $\varrho, \varrho', \varrho''$, die nicht alle verschwinden und die Relationen

$$\sum^k (\varrho\, \alpha_{ik} + \varrho'\, \beta_{ik} + \varrho''\, \gamma_{ik})\, \eta_k = 0 \quad (i = 1 \ldots 5)$$

erfüllen; d. h. jeder Punkt des R_4 ist entweder auf der singulären μ_2 eines speziellen Complexes der Schaar $(\alpha\, \beta\, \gamma)$ gelegen, oder mit dem singulären Punkte eines Complexes der Schaar identisch. Diese Schaar muss also aus ∞^2 speziellen Complexen bestehen, da sonst die singulären μ_2 bezw. Punkte der ∞^2 Complexe nicht den ganzen Raum R_4 erfüllen könnten.

Die singulären μ_2 der ∞^2 speziellen Complexe müssen ferner eine Gerade g gemein haben. Liegt eine solche Congruenz vor, so geht in der That durch jeden Punkt P ein lineares Büschel von Congruenzgeraden, bestehend aus den Geraden, die g schneiden.

Da durch eine gegebene Gerade g nur drei linear unabhängige μ_2 hindurchgehen, so schliessen wir:

Ist eine Congruenz mehr als dreigliedrig, so kann durch einen beliebigen Punkt des R_4 höchstens eine Gerade der Congruenz hindurchgehen.

Soll also eine 4-gliedrige Congruenz ∞^4 Geraden enthalten, so erfüllen diese eine ebene Mannigfaltigkeit M; die ∞^3 Complexe der Schaar sind speziell, M ist ihre singuläre Ebene (Nr. 13).

Eine mehr als 4-gliedrige Congruenz kann aus höchstens ∞^3 Geraden bestehen.

20. Soll durch jeden Punkt des R_4 mindestens eine Gerade der viergliedrigen Congruenz $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ hindurchgehen, so schliesst man aus der Thatsache, dass die vier linearen Gleichungen

$$\sum\sum \alpha_{ik}\,\eta_k\,\xi_i = 0\,..\,\sum\sum \delta_{ik}\,\eta_k\,\xi_i = 0$$

für jedes Wertsystem η linear abhängig sind, genau wie in der vorigen Nr., dass die Congruenz ∞^2 spezielle Complexe enthalten muss. Sie kann nun nicht aus ∞^3 speziellen Complexen bestehen, da in diesem Fall nur durch Punkte der singulären Ebene (Nr. 13), nicht aber durch einen beliebigen Raumpunkt, Congruenzgerade gingen. Also sind die aus den Elementen der Matrix:

$$\|\lambda\,\alpha_{ik} + \mu\,\beta_{ik} + \nu\,\gamma_{ik} + \varrho\,\delta_{ik}\| \quad (i, k = 1, ..\,5)$$

gebildeten Pfaff'schen Aggregate $A_1\,..\,A_5$ (Nr. 14) entweder:

a) proportional, und unsere Congruenz besteht aus allen ∞^3 Geraden, die den gemeinsamen singulären Punkt S der Complexe unserer Schaar enthalten, oder

b) die A_i haben einen in $\lambda\,\mu\,\nu\,\varrho$ linearen homogenen Faktor L gemein. Die durch die Relation $L = 0$ definirte ∞^2-Schaar von speziellen Complexen kann ferner keine singuläre Ebene besitzen, da sonst der singuläre Punkt eines jeden in der Schaar $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ enthaltenen allgemeinen Complexes nach Nr. 13 identisch sein müsste mit dem gemeinsamen Schnittpunkt der singulären Mannigfaltigkeiten jener ∞^2 speziellen Complexe, also wiederum die Annahme a) vorläge; die singulären μ_2 unserer ∞^2 speziellen Complexe haben also eine Gerade g gemein.

Umgekehrt, wählt man im R_4 eine Gerade g beliebig, so gehen durch sie drei linear unabhängige μ_2; die durch diese bestimmten speziellen Complexe nennen wir β, γ, δ. Ist dann α ein beliebiger allgemeiner Complex, dessen singulärer Punkt S nicht auf g liegt, so erhält man die allgemeinste viergliedrige Congruenz von der Art b). Durch jeden Punkt des R_4 geht

jetzt in der That eine und im allgemeinen nur eine Gerade der Congruenz $(\alpha \beta \gamma \delta)$; die letztere besteht aus ∞^3 Geraden, die alle die Gerade g schneiden.

21. Wenn eine 5- oder 6-gliedrige Congruenz die Eigenschaft besitzen soll, dass durch einen beliebigen Raumpunkt **eine** Congruenzgerade geht, so müssen alle ihre Complexe den singulären Punkt S, die linearen Gleichungen (25) also eine Lösung gemein haben.

In der That, bezeichnen wir die betrachtete fünfgliedrige Congruenz mit $(\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon)$, und gehört die viergliedrige Congruenz $(\alpha \beta \gamma \delta)$ zu dem vorhin mit a) bezeichneten Typus, so muss der singuläre Punkt von ε mit dem gemeinsamen singulären Punkt S der Complexe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ übereinstimmen, da ja der Annahme nach alle durch S gehenden Geraden auch in ε enthalten sind.

Ist aber die Congruenz $(\alpha \beta \gamma \delta)$ von der Art b) (Nr. 20), und verstehen wir unter $(\beta \gamma \delta)$ wie vorhin die aus ∞^3 speziellen Complexen bestehende Congruenz, unter α, ε allgemeine Complexe, so wird die Gerade g der Nr. 20 von allen ∞^3 Geraden der Congruenz $(\alpha \,..\, \varepsilon)$ geschnitten, also müssen durch jeden Punkt P von g zweifach unendlich viele Geraden der Congruenz $(\alpha \beta \,..\, \varepsilon)$, also auch der Congruenz $(\alpha \varepsilon)$ hindurchgehen, d. h. für jeden auf g gelegenen Punkt η reduciren sich die 2 linearen Gleichungen

$$\sum \sum a_{ik} \eta_k \xi_i = 0, \quad \sum \sum \varepsilon_{ik} \eta_k \xi_i = 0$$

auf eine einzige; ein beliebiger Punkt P von g ist also entweder

1) mit dem singulären Punkt eines allgemeinen Complexes α' der Schaar $(\alpha \varepsilon)$ identisch, oder

2) auf der singulären Mannigfaltigkeit eines in der Schaar $(\alpha \varepsilon)$ enthaltenen speziellen Complexes ε' gelegen.

Im Falle 1) besitzt die Congruenz $(\alpha' \beta \gamma \delta)$ den gemeinsamen singulären Punkt P, und wir kommen auf den Fall zurück, der zu Anfang dieser Nr. erledigt wurde. Da es ferner in der Congruenz $(\alpha \varepsilon)$ nicht ∞^1 spezielle Complexe gibt,

so wäre unter der Voraussetzung 2) die ganze Gerade g auf der singulären Mannigfaltigkeit eines speziellen Complexes ε' gelegen; ε' wäre also einerseits in der Congruenz $(\beta\ \gamma\ \delta)$, andererseits in der Congruenz $(\alpha\ \varepsilon)$ enthalten, was mit der linearen Unabhängigkeit unserer 5 Complexe unverträglich ist.

Da es ferner nach Nr. 18 nicht mehr als 6 linear unabhängige Complexe mit gemeinschaftlichem singulären Punkt geben kann, so existiren für eine mehr als sechsgliedrige Congruenz höchstens ∞^3 Raumpunkte, durch welche Congruenzgeraden hindurchgehen.

22. Schliesslich wollen wir noch die Frage erörtern, unter welchen Bedingungen eine mehr als dreigliedrige Congruenz dreifach unendlich viele Geraden enthält. Der Fall, dass diese Geraden den ganzen Raum R_4 durchziehen, wurde in den beiden vorhergehenden Artikeln erledigt. Es bleibt also nur noch die Möglichkeit zu diskutiren, dass die ∞^3 Congruenzgeraden eine dreifach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit, d. h. also eine „Fläche“ M erfüllen. Durch jeden Punkt P von M geht nun der Annahme nach ein System von ∞^1 Geraden, die auf M gelegen sind und ein lineares Büschel bilden, d. h. in einer durch P gehenden und auf M liegenden zweifach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit π enthalten sind.

Es sind nun mindestens ∞^1 solcher Mannigfaltigkeiten π vorhanden; gibt es deren weniger als ∞^3, so müssen umgekehrt jeder Mannigfaltigkeit π mindestens ∞^1 auf ihr liegende Punkte P zugewiesen sein, in dem Sinne, dass alle durch einen solchen Punkt gehenden und auf π liegenden Geraden unserer Congruenz angehören. Dann aber sind alle Geraden, die in π liegen, Congruenzgerade; mithin existiren einfach unendlich viele Congruenz-μ_2, und wir kommen auf die in Nr. 16 studirten Fälle zurück. Unter den dort angegebenen Bedingungen gibt es in der That einfach unendlich viele Congruenz-μ_2, die ein Büschel mit gemeinsamer Axe g bilden und in der „ausgezeichneten Ebene M“ gelegen sind, und infolge dessen auch ∞^3 Congruenzgerade, die in M liegen und einen speziellen R_3-Complex mit der Direktrix g darstellen.

Gibt es dreifach unendlich viele Mannigfaltigkeiten ist die Fläche M offenbar wiederum eine Ebene, und die Geraden der Congruenz bilden innerhalb derselben einen gemeinen linearen R_3-Complex. Die Bilinearformen

$$(32) \qquad \sum_1^5 \sum_1^5 a_{ik} \xi_i \eta_k, \quad \sum_1^5 \sum_1^5 \beta_{ik} \xi_i \eta_k \ldots \quad \sum_1^5 \sum_1^5 \varepsilon_{ik} \xi_i \eta_k$$

reduciren sich also, wenn die Ebene M durch die Gl $u_\xi = 0$ dargestellt wird, vermöge dieser Gleichung u dazu congruenten $u_\eta = 0$ auf nur eine einzige Bilinear 4 Variabelnpaaren. Durch Bildung geeigneter Linea nationen kann man insbesondere erreichen, dass alle B formen (32) mit Ausnahme der ersten vermöge $u_\xi = 0$, identisch verschwinden. Dann sind aber alle Compl Schaar $(\beta \ldots \varepsilon)$ speziell und besitzen die singuläre Mann keit M (Nr. 13). Indem wir diese Sätze zusammenfas langen wir zu dem Resultat:

Damit eine r-gliedrige Congruenz aus d unendlich vielen Geraden bestehe, ohne dass jeden Punkt des R_4 eine dieser Geraden hindur ist notwendig und hinreichend, dass $r = 4$ ode dass ferner die Pfaff'schen Aggregate $A_1 \ldots A$ Linearfaktor L gemein haben, dass endlich i $r = 4$ die durch $L = 0$ definirte spezielle Con eine singuläre Ebene besitze.

Aus dieser und den beiden vorhergehenden N folgt ferner:

Eine vier- oder mehrgliedrige Congruen höchstens zweifach unendlich viele Geraden ent ausser wenn die Pfaff'schen Aggregate $A_1 \ldots$ portional sind oder einen Linearfaktor gemein oder identisch verschwinden. In den beiden Fällen besteht die Congruenz aus ∞^3, in dem genannten Fall aus ∞^4 Geraden.

Reduction der $n-5$-gliedrigen Pfaff'schen Systeme mit n Veränderlichen.

23. Die Theorie des linearen R_4-Complexes soll uns nun zur Beantwortung folgender Frage dienen:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein $n-5$-gliedriges Pfaff-sches System in n Variabeln

$$(33) \qquad d\,x_{5+h} = \sum_1^5{}^i\, a_{ih}(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, d\,x_i \quad (h = 1, \ldots n-5)$$

sich auf eine Form mit nur $n-5+\varrho$ Differential-elementen

$$(34) \qquad d\,f_{\varrho+h} = \sum_1^{\varrho}{}^i\, F_{ih}\, d\,f_i \quad (h = 1, \ldots n-5)$$

bringen lasse, worin die Funktionen

$$f_1,\ f_2,\ \ldots f_{n-5+\varrho}$$

unabhängig sind?

Die Thatsache, dass das vorgelegte System (33) in der Form (34) geschrieben werden kann, ist nach Nr. 2 meiner früheren Arbeit[1]) mit der andern äquivalent, dass vermöge der Relationen

$$(35) \qquad \sum_1^5{}^i\, \xi_i \cdot A_i f_k = 0,\ \sum_1^5{}^i\, \eta_i \cdot A_i f_k = 0 \quad (k = 1, \ldots \varrho)$$

sämtliche Bilinearformen der Schaar:

$$(36) \qquad \sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k \left(\sum_1^{n-5}{}^h\, a_{ikh}\, \lambda_h\right) \xi_i\, \eta_k$$

identisch verschwinden; dabei ist gesetzt:

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 276.

$$A_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-5} {}^k a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_{5+k}}$$

$$a_{ikh} \equiv - a_{kih} \equiv A_i a_{kh} - A_k a_{ih},$$

und die $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-5}$ bedeuten willkürliche Parameter.

Damit also eine Darstellung (34) möglich sei, ist notwendig und hinreichend:

1) dass überhaupt wenigstens ein System von ϱ congruenten Relationenpaaren

$$\begin{aligned} u_{i1}\,\xi_1 + \ldots + u_{i5}\,\xi_5 &= 0 \\ u_{i1}\,\eta_1 + \ldots + u_{i5}\,\eta_5 &= 0 \end{aligned} \quad (i = 1, \ldots \varrho)$$

existire, vermöge deren die sämtlichen Bilinearformen der Schaar (36) identisch verschwinden;

2) dass sich unter den so definirten ϱ-gliedrigen Relationensystemen

$$(37) \qquad u_{i1}\,dx_1 + u_{i2}\,dx_2 + \ldots + u_{i5}\,dx_5 = 0 \quad (i = 1 \ldots \varrho)$$

wenigstens eines derart auswählen lasse, dass die Pfaff'schen Gleichungen (33) und (37) zusammen ein $n - 5 + \varrho$-gliedriges unbeschränkt integrables System bilden.

Mit $\varkappa$ bezeichnen wir fortan immer den „Charakter" des Pfaff'schen Systems (33), d. i. den Rang der aus 10 Spalten und $n - 5$ Zeilen bestehenden Matrix

$$(38) \qquad \begin{vmatrix} a_{121} & a_{131} & \ldots & a_{451} \\ a_{122} & a_{132} & \ldots & a_{452} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

also die Anzahl der linear unabhängigen Complexe in der Schaar (36); ferner mit 2σ den Rang der alternirenden 5-zeiligen Matrix

$$(39) \qquad \left| \sum_1^{n-5} {}^h \lambda_h a_{ikh} \right| \qquad (i, k = 1, \ldots 5),$$

d. h. die Ordnung der höchsten in dieser Matrix enthaltenen Hauptunterdeterminanten, die nicht für jedes beliebige Wertsystem $x_1 \ldots x_n, \lambda_1 \ldots \lambda_{n-5}$ verschwinden.

Da für die oben definirte Zahl ϱ nur die Werte 1, 2, 3 in Betracht kommen, so untersuchen wir zunächst die Annahme $\varrho = 1$.

24. Damit das gegebene Pfaff'sche System (33) auf die Form:

$$d f_{h+1} = F_h \, d f_1 \quad (h = 1, .. n - 5) \tag{40}$$

gebracht werden könne, ist zunächst notwendig, dass $2\sigma = 2$ [1]), also alle Complexe der Schaar (36) speziell seien. Ist überdies $\varkappa = 1$, so kann, wie ich früher gezeigt habe [2]), das gegebene Pfaff'sche System immer, und zwar auf unendlich viele Arten, in die Form (40) umgesetzt werden.

Ist aber $\varkappa = 2$, so besitzt nach Nr. 13 die Complexschaar (36) eine singuläre Ebene, die durch die Relation

$$u_1 \xi_1 + .. + u_5 \xi_5 = 0 \tag{41}$$

dargestellt werde, und das Relationenpaar $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ ist das einzige, vermöge dessen alle Bilinearformen der Schaar (36) identisch null sind. Zur Existenz einer reducirten Form (40) ist jetzt notwendig und hinreichend, dass das Pfaff'sche System

$$\begin{cases} d x_{5+h} = \sum_1^5{}^i \, a_{ih} \, d x_i \quad (h = 1 .. n - 5) \\ u_1 \, d x_1 + .. + u_5 \, d x_5 = 0 \end{cases} \tag{42}$$

unbeschränkt integrabel sei, mit andern Worten, dass in der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} 0 & u_{12} & .. & u_{15} & u_1 \\ u_{21} & 0 & .. & u_{25} & u_2 \\ . & . & ... & . & . \\ u_{51} & u_{52} & .. & 0 & u_5 \\ u_1 & u_2 & .. & u_5 & 0 \end{Vmatrix} \quad (u_{ik} = A_i u_k - A_k u_i) \tag{43}$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden. Die u_i bedeuten dabei leicht zu bildende rationale Funktionen der Grössen a_{ikh}.

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 275.

[2]) Leipziger Berichte 1898, pag. 207.

Ist $\varkappa = 3$, so besitzt die Congruenz (36) eine singuläre Ebene (41) oder nicht, je nachdem die $5(n-5)$ linearen Gleichungen

$$(44) \qquad \sum_1^5{}^k a_{ikh}\,\xi_k = 0 \quad (i = 1, .. 5;\ h = 1 .. n-5)$$

eine einzige oder zwei linear unabhängige Lösungen zulassen, je nachdem also die $5(n-5)$-spaltige und 5-zeilige Matrix, die durch Nebeneinandersetzen der $n-5$ alternirenden fünfzeiligen Schemata $\| a_{ik1} \|$, $\| a_{ik2} \|$, etc. entsteht, den Rang 4 oder den Rang 3 hat. Nur im ersteren Fall ist eine Darstellung (40) möglich, und zwar ist dazu weiterhin notwendig (und hinreichend), dass in der Matrix (43) wiederum alle vierreihigen Hauptunterdeterminanten Null sind.

Im Falle $\varkappa = 4$, $2\sigma = 2$ endlich gibt es immer eine singuläre Ebene (41), und man erhält für die Möglichkeit einer reducirten Form (40) dieselben Bedingungen wie soeben.

25. Wir diskutiren nunmehr die Bedingungen dafür, dass das vorgelegte $n-5$-gliedrige Pfaff'sche System (33) in der Form

$$(45) \qquad d f_{2+h} = F_{1h}\, d f_1 + F_{2h}\, d f_2 \quad (h = 1, .. n-5)$$

geschrieben werden kann, und zwar werde zunächst $2\sigma = 2$ angenommen.

Unter der Voraussetzung $\varkappa = 1$ ist nach dem Anfang der vorigen Nr. eine Darstellung (45) immer in dem Sinne möglich, dass die Funktion f_2 ganz beliebig gewählt werden kann.

Wir betrachten nun zunächst die Annahme $\varkappa = 3$ oder 4, und fügen im ersten Fall noch ausdrücklich die Bedingung hinzu, dass die Congruenz (36) eine singuläre Ebene besitze (was für $\varkappa = 4$ immer stattfindet). Diese Ebene werde durch die Gleichung (41) dargestellt. Ist dann das Pfaff'sche System (42) unbeschränkt integrabel, und bedeutet f_2 eine willkürliche Funktion von $x_1 .. x_n$, so bilden die Gleichungen (42) zusammen mit $d f_2 = 0$ ebenfalls ein unbeschränkt integrables $n-3$-gliedriges System, und man schliesst, dass für das vor-

gelegte $n - 5$-gliedrige System (33) unbegrenzt viele Darstellungen (45) existiren, in denen f_2 willkürlich gewählt werden kann, worauf die übrigen Funktionen f_i auf eine und wesentlich nur eine Weise bestimmt sind.

Ist das Pfaff'sche System (42) nicht unbeschränkt integrabel, so schreiben wir es in der Form:

$$(46) \quad d\,x_{4+h} = b_{1h}\,d\,x_1 + \ldots + b_{4h}\,d\,x_4 \quad (h = 1\,\ldots\,n-4).$$

Setzen wir dann:

$$B_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-4}{}^h\, b_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_{4+h}} \quad (i = 1, \ldots 4),$$

$$b_{ikl} \equiv - b_{kil} \equiv B_i\, b_{kl} - B_k\, b_{il},$$

so ist die Anzahl der linear unabhängigen bilinearen Formen des Systems

$$(47) \qquad \sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k\, b_{ikl}\, \xi_i'\, \eta_k' \quad (l = 1, \ldots n - 4)$$

gleich eins; denn vermöge der Relation (41) und der dazu congruenten verschwinden alle Bilinearformen der Schaar (36) identisch. Also hat man Identitäten der Form:

$$b_{ikl} \equiv \varrho_l\, b_{ik1} \quad (l = 2, 3, \ldots n - 4),$$

und der Rang der Matrix

$$(48) \qquad \| b_{ik1} \| \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ist gleich 4 oder 2, je nachdem derjenige der Matrix (43) gleich 6 oder 4 ist.

Soll nun für das ursprünglich vorgelegte $n - 5$-gliedrige Pfaff'sche System eine Darstellung (45) existiren, so müssen nach Nr. 23 die Relationen

$$(49) \qquad \sum_1^5{}^i A_i f_1 \cdot \xi_i = 0; \; \sum_1^5{}^i A_i f_2 \cdot \xi_i = 0$$

eine Congruenz-μ_2 der Complexschaar (36) darstellen, also mit den congruenten Relationen zusammen alle Bilinearformen (36) anulliren. Da aber nach Nr. 13 jede Congruenz-μ_2 in der singulären Ebene der Congruenz (36) enthalten ist, so muss

$u_\xi = 0$ eine Folge des Gleichungspaares (49) sein. Mit Rücksicht auf die vermöge (33) bestehende Identität

$$d f_i \equiv A_1 f_i \cdot d x_1 + \ldots + A_5 f_i \cdot d x_5$$

muss also auch das Pfaff'sche System (42) durch die Relationen

$$d f_1 = 0, \; d f_2 = 0, \ldots \; d f_{n-3} = 0$$

befriedigt werden.

Kann also das $n - 5$-gliedrige System (33) auf die Form (45) gebracht werden, so lässt sich das $n - 4$-gliedrige System (42) in der Gestalt:

$$(50) \qquad d f_{1+h} = \Phi_h \, d f_1 \quad (h = 1, \ldots n - 4)$$

schreiben, und offenbar gilt auch die Umkehrung dieses Satzes. Damit sich aber das System (42) auf die angegebene Gestalt reduciren lasse, ist nach meiner früheren Arbeit[1]) notwendig und hinreichend, dass der Rang der Matrix (48) gleich 2 sei, und es folgt:

Ist $2\sigma = 2$, $\varkappa = 3$ und besitzt die Congruenz (36) eine singuläre Ebene, oder ist $2\sigma = 2$, $\varkappa = 4$, so lässt sich das gegebene $n - 5$-gliedrige Pfaff'sche System dann und nur dann auf $n - 3$ Terme reduciren, wenn die 6-reihige alternirende Determinante (43) identisch verschwindet; es gibt dann unbegrenzt viele Darstellungen der geforderten Beschaffenheit.

26. Um die Voraussetzung $\varrho = 2$, $2\sigma = 2$ vollständig zu erledigen, bleiben nur noch die Annahmen $\varkappa = 2$, $\varkappa = 3$ zu diskutiren, letztere für den Fall, dass keine singuläre Ebene existirt. In beiden Fällen haben die singulären μ_2 der Complexe unserer Schaar (36) eine Gerade g, und mithin die linearen Gleichungen (44) zwei Lösungen ξ', ξ'' gemein, d. h. das Pfaff'sche System (33) gestattet[1]) die beiden unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$X' f = \sum \xi_i' A_i f; \quad X'' f = \sum \xi_i'' A_i f.$$

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 207.

und die Gleichungen $X'f = 0$, $X''f = 0$ bilden ein zweigliedriges vollständiges System mit $n-2$ Integralen $y_1, \ldots y_{n-2}$. Führt man diese nebst zwei beliebigen andern Funktionen als neue Variabeln in das System (33) ein, so verwandelt sich letzteres in ein Pfaff'sches System, das nur mehr die Variabeln y enthält, also die Form

$$(51) \qquad d\, y_{3+h} = \sum_1^3{}^i c_{ih} (y_1 \ldots y_{n-2})\, d\, y_i \quad (h = 1 \ldots n-5)$$

annimmt. Wir fügen diesem System zwei beliebige Gleichungen

$$(52) \qquad d\, y_1 : d\, y_2 : d\, y_3 = \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3$$

hinzu, worin die Φ irgend welche Funktionen der y bedeuten; stellen dann die Relationen

$$(53) \qquad \Psi_i (y_1 \ldots y_{n-2}) = \text{Const.} \quad (i = 1, \ldots n-3)$$

die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems (51) (52) dar, so kann das System (51) in der Form

$$d\, \Psi_{2+h} = \Phi_{1h}\, d\, \Psi_1 + \Phi_{2h}\, d\, \Psi_2 \quad (h = 1 \ldots n-5)$$

geschrieben werden, und man erhält für das ursprüngliche System (33) eine Darstellung mit $n-3$ Termen, indem man in die Ψ statt der y wieder die Variabeln x einführt und f_i statt Ψ_i schreibt.

Im Falle $\varkappa = 3$ erhält man durch diese Methode alle überhaupt möglichen Darstellungen (45). Denn ist (45) eine solche reducirte Form, so stellen die Relationen (49) eine Congruenz-μ_2 dar; da aber nach Nr. 13 jede Congruenz-μ_2 durch die Gerade g geht, so muss man auch haben:

$$\sum{}^i A_i f_k \cdot \xi_i' = 0, \ \sum{}^i A_i f_k \cdot \xi_i'' = 0 \quad (k = 1, 2),$$

mithin genügen f_1 und f_2 dem vollständigen System $X'f = 0$, $X''f = 0$. Aus der Gleichberechtigung der $n-3$ Funktionen f_i folgt sonach, dass alle diese Funktionen von $y_1 \ldots y_{n-2}$ allein abhängen, dass also die Gleichungen $f_i = \text{const.}$ eine Schaar von ∞^{n-3} Integralcurven des Pfaff'schen Systems (51) definiren.

Für $\varkappa = 2$ aber existirt noch
reducirter Formen mit $n - 3$ Termen, e
sache, dass es in diesem Fall noch eine
gruenz-μ_2 gibt, diejenigen nämlich, die
enthalten auf der singulären Ebene $u_\xi =$
legen sind. Man erkennt nämlich leicht,
Determinante (43) in diesem Fall identisch
die vorige Nr.).

27. Bei der Aufstellung der Bedingung
Pfaff'sche System (33) sich unter der Anna
eine reducirte Form mit $n - 3$ Differentialel
lasse, können wir wiederum den Fall $\varkappa = 1$
ausscheiden; denn unter dieser Voraussetzung g
viele Darstellungen

$$df_3 = F_1\, df_1 + F_2\, df_2;\ df_4 = 0, \ldots df_{n-}$$

die durch Integration simultaner Systeme gewöh
rentialgleichungen gefunden werden[1]).

Ist $\varkappa \geq 2$, so existirt nach den Artikeln 8—11
entweder überhaupt keine μ_2, die sämtlichen Co
Congruenz (36) genügt, oder es findet einer der
Fälle statt:

a) Es gibt eine und nur eine Congruenz-μ_2,
2 Gleichungen der Form

$$\sum_1^5 \mu_i \xi_i = 0,\ \sum_1^5 \mu_i' \xi_i = 0 \tag{54}$$

repräsentirt wird, worin die μ, μ' gewisse leicht zu
rationale Funktionen der a_{ikl} bedeuten.

b) Die Congruenz (36) besitzt eine „ausgezeichnete E

$$u_1 \xi_1 + \ldots + u_5 \xi_5 = 0, \tag{55}$$

worin die u rationale Funktionen der a_{ikl} bedeuten, und es
einfach unendlich viele Congruenz-μ_2, die alle in dieser E
liegen und ein Büschel mit der Axe g bilden.

---

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 217 ff.

)ie Complexe der Schaar (36) haben den singulären
? gemein, und die (für $\varkappa \leqq 4$ stets vorhandenen) Con-
$_2$ gehen alle durch P.
jeden dieser 3 Fälle existiren nach den citirten Artikeln
Alternativen, deren jede durch ein System rationaler
ıgsgleichungen zwischen den a_{ikl} charakterisirt ist.
ır das vorgelegte Pfaff'sche System eine reducirte Form
- 3 Termen existire, ist notwendig, dass einer dieser
realisirt sei. Dazu treten die sogleich aufzustellenden
ilitätsbedingungen.

Im Falle a) ist eine Darstellung (45) dann und nur
iglich, wenn das Pfaff'sche System (33) zusammen mit
chungen $\mu_{dx} = 0$, $\mu'_{dx} = 0$ ein $n - 3$-gliedriges unbe-
integrables System bildet.

ıer der Annahme b) ist, wie man durch die Schluss-
r Nr. 25 erkennt, eine reducirte Form (45) dann und
ı herstellbar, wenn das Pfaff'sche System

$$\begin{cases} d x_{5+h} = \sum_1^5{}^i a_{ih}\, d x_i \quad (h = 1 \,.\,.\, n-5) \\ \qquad u_1\, d x_1 + \,.\,.\, + u_5\, d x_5 = 0 \end{cases}$$

Form

$$d f_{1+h} = F_h\, d f_1 \quad (h = 1, 2, \,.\,.\, n-4)$$

werden kann. Nun enthält die ausgezeichnete Ebene
ıifach unendlich viele Congruenzgerade, die einen
len R_3-Complex bilden, und diese Thatsache findet
ren analytischen Ausdruck, dass die $n-5$ alterniren-
nearformen in 4 Variabelnpaaren, die aus den Formen

$$\sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k a_{ikh}\, \xi_i\, \eta_k \quad (h = 1 \,.\,.\, n-5)$$

ı, indem man ξ_5, η_5 mittels der Relationen

$$u_\xi = 0, \; u_\eta = 0$$

, einer unter ihnen proportional sind. Löst man also
-4-gliedrige Pfaff'sche System (56) in der Form

$$(60) \qquad d\,x_{4+h} = \sum_1^4{}^i\, b_{ih}\, d\,x_i \quad (h = 1 \,..\, n-4)$$

auf, und bildet wie in Nr. 25 die Bilinearformen

$$(61) \qquad \sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k\, b_{ikl}\, \xi_i'\, \eta_k' \quad (l = 1 \,..\, n-4),$$

so ist die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen gleich zwei oder gleich eins, letzteres offenbar dann und nur dann, wenn in der Matrix (43) der Nr. 25 alle vierreihigen Hauptunterdeterminanten identisch null sind. In dem letzteren Falle lässt sich das Pfaff'sche System (60) immer — und zwar auf unendlich viele Arten — in die Form (57)[1]), also das System (33) auf die Gestalt (45) bringen. Im ersteren Fall können wir, um die Ideen zu fixiren, annehmen, dass die Bilinearform $\sum\sum a_{ik1}\,\xi_i\,\eta_k$ nicht vermöge (59) verschwindet, und infolge dessen werden dann die beiden ersten Bilinearformen (61) linear unabhängig. Damit dann das $n - 4$-gliedrige System (60) eine Darstellung (57) zulasse, haben wir zunächst auszudrücken[2]), dass die 4-reihige Determinante

$$\lambda\, b_{ik1} + \mu\, b_{ik2} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

oder, was dasselbe besagt, die 6-reihige alternirende Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & . & \lambda\, a_{151} + \mu\, u_{15} & u_1 \\ \lambda\, a_{211} + \mu\, u_{12} & . & \lambda\, a_{251} + \mu\, u_{25} & u_2 \\ . & . & . & . \\ \lambda\, a_{511} + \mu\, u_{51} & . & 0 & u_5 \\ u_1 & . & u_5 & 0 \end{vmatrix}$$

für beliebige Werte $x_1 \,..\, x_n, \lambda, \mu$ identisch null sei. Diese letztere Determinante ist das Quadrat einer binären quadratischen Form in λ, μ, die offenbar für $\mu = 0$ verschwindet, da sich ja jede der Bilinearformen (58) vermöge $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ auf die linke Seite einer speziellen Complexgleichung des R_3

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 213 f.
[2]) Diese Berichte 1900, pag. 285.

reducirt. Wir erhalten sonach nur zwei unabhängige neue Bedingungen, von denen die eine das identische Verschwinden der Determinante (43) ausdrückt.

Sind diese Bedingungen erfüllt, und deuten wir $\xi_1' \ldots \xi_4'$ als homogene Punktcoordinaten im R_3, so sind alle R_3-Complexe der Schaar:

$$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k (\lambda\, b_{ik1} + \mu\, b_{ik2})\, \xi_i'\, \eta_k' = 0$$

speziell, und ihre Direktricen bilden ein Strahlenbüschel in einer Ebene:

$$v_1\, \xi_1' + \ldots + v_4\, \xi_4' = 0,$$

worin die v rationale Funktionen der a_{ikh}, u_{ik} bedeuten. Die Gleichungen $v_{\xi'} = 0$, $v_{\eta'} = 0$ sind die einzigen, vermöge derer alle Bilinearformen (61) verschwinden, und es erübrigt schliesslich noch auszudrücken, dass die Pfaff'schen Gleichungen (56) mit der Gleichung

$$v_1\, d\, x_1 + \ldots + v_4\, d\, x_4 = 0$$

zusammen ein n — 3-gliedriges unbeschränkt integrables System bilden. Sind auch diese Bedingungen erfüllt, dann und nur dann existirt für das vorgelegte n — 5-gliedrige Pfaff'sche System (33) eine und offenbar auch nur eine reducirte Form mit n — 3 Differentialelementen, welch' letztere man durch Integration des genannten unbeschränkt integrabeln Systems ermittelt.

29. Die Annahme c) der Nr. 27 erledigt sich durch die Bemerkung, dass in diesem Falle die linearen Gleichungen

$$(62) \qquad \sum_1^5{}^k a_{ikh}\, \xi_k = 0 \quad (i = 1, \ldots 5;\ h = 1 \ldots n - 5)$$

eine und nur eine Lösung ξ' besitzen, das Pfaff'sche System (33) also[1]) die infinitesimale Transformation:

$$(63) \qquad X' f = \xi_1'\, A_1 f + \ldots + \xi_5'\, A_5 f$$

---

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 209.

gestattet. Sind $y_2, y_3, \ldots y_n$ die Integrale der partiellen Differentialgleichung $X'f = 0$, so lässt sich das System auf die Gestalt:

$$(64) \qquad d\,y_{5+h} = \sum_2^5 {}^i\, b_{ih}(y_2 \ldots y_n)\, d\,y_i \quad (h = 1 \ldots n-5)$$

bringen, die nur mehr die Variabeln y enthält. Aus der Thatsache, dass alle μ_2, die der Congruenz (36) angehören, den Punkt P mit den Coordinaten $\xi_1' \ldots \xi_5'$ enthalten, schliesst man genau wie in Nr. 26, dass die Funktionen $f_1 \ldots f_{n-3}$ einer jeden überhaupt möglichen reducirten Form mit $n-3$ Termen von den Variabeln $y_2 \ldots y_n$ allein abhängen. Demnach kommt die Herstellung der allgemeinsten reducirten Form (45) darauf hinaus, das System (64), d. h. also ein $n-5$-gliedriges Pfaff'sches System in $n-1$ Variabeln auf eine Form mit $n-3$ Differentialelementen zu reduciren, ein Problem, das ich in meiner früheren Abhandlung[1]) vollständig erledigt habe. Die Bedingungen für die Möglichkeit einer solchen Reduction erscheinen dabei zunächst in der Form rationaler Relationen zwischen den Coefficienten b_{ih} und ihren Ableitungen; es ist aber leicht, diese Gleichungen in solche umzusetzen, die nur die a_{ih} und ihre Derivirten enthalten[2]).

30. Der Fall $\varrho = 3$, d. h. die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass das vorgelegte $n-5$-gliedrige Pfaff'sche System auf eine Form mit $n-2$ Termen:

$$(65) \quad d\,f_{3+h} = F_{1h}\, d\,f_1 + F_{2h}\, d\,f_2 + F_{3h}\, d\,f_3 \quad (h = 1 \ldots n-5)$$

gebracht werden kann, führt auf eine überaus grosse Zahl verschiedener Möglichkeiten. Wir begnügen uns daher, den Gang der Untersuchung zu skizziren; auch wollen wir nur solche

---

1) Diese Berichte 1900, pag. 2-8 ff.

2) Am einfachsten mittels der Bemerkung, dass identisch:

$$b_{ik}(y_2\, y_3 \ldots y_n) \equiv a_{ik}(x_1^0, y_2 \ldots y_n),$$

wenn die y die Hauptintegrale der Gleichung $X'f = 0$ hinsichtlich x_1^0 bedeuten.

Fälle behandeln, in denen eine Reduction auf weniger als $n-2$ Differentialelemente nicht möglich ist.

Nehmen wir daher zunächst wieder die Zahl $2\sigma = 2$ an, so haben wir nur die Fälle $\varkappa = 3$ und $\varkappa = 4$ unter der Voraussetzung zu betrachten, dass die spezielle Congruenz

$$(66) \qquad \sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k \left(\sum_1^{n-5}{}^h a_{ikh}\,\lambda_h\right) \xi_i\,\eta_k$$

eine singuläre Ebene $u_\xi = 0$ besitzt. Unter dieser Annahme aber lässt sich das $n-4$-gliedrige Pfaff'sche System (56), dessen bilineare Covarianten sich auf eine einzige reduciren, immer auf eine Form mit $n-2$ Differentialelementen bringen[1]), und dasselbe gilt sonach auch für das gegebene System (33). Auch erhält man, wenn $\varkappa = 4$, solcherweise alle möglichen Darstellungen (65), da ja unter den gemachten Voraussetzungen alle Geraden der Congruenz (66) in der singulären Ebene $u_\xi = 0$ gelegen sind (Nr. 13 und 19). Im Falle $\varkappa = 3$ dagegen existirt noch eine zweite Kategorie von Darstellungen (65); denn die dreigliedrige Congruenz (66) setzt sich jetzt aus zweierlei Arten von Geraden zusammen: aus denjenigen, die in der singulären Ebene liegen, und aus denjenigen, die durch den gemeinsamen Schnittpunkt P der singulären Mannigfaltigkeiten unserer ∞^2 speziellen Complexe hindurchgehen. Hat P die Coordinaten ξ', so haben die Gleichungen (62) die Lösung ξ_i' gemein, und das vorgelegte Pfaff'sche System gestattet die infinitesimale Transformation $X'f$ der Nr. 29, kann also in ein $n-5$-gliedriges System mit $n-1$ Variabeln verwandelt werden; reducirt man das letztere irgendwie auf $n-2$ Terme[2]), so erhält man für das erstere die allgemeinste Darstellung (65) der zweiten Art.

31. Indem wir uns nunmehr der Betrachtung des Falles $\varrho = 3$, $2\sigma = 4$ zuwenden, fassen wir zunächst diejenigen Fälle $\varkappa \geqq 3$ ins Auge, in denen durch einen beliebigen Punkt des R_4 eine und nur eine Gerade der Congruenz (66) hindurchgeht

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 213 f.

[2]) Vgl. die analoge Betrachtung der Nr. 26.

(Nr. 19, 20). In meiner früheren Abh[…]
Frage nach der Möglichkeit einer Darst[…]
führt auf die Untersuchung des Different[…]

$$\frac{\partial x_{5+h}}{\partial u} = \sum_1^5{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u}; \quad \frac{\partial x_{5+h}}{\partial v} = \sum_1^5 \ldots \tag{67}$$

$$\sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} = 0 \quad (h = 1 \ldots \tag{68}$$

Infolge der gemachten Annahmen reducir[…] ungen (68), wenn man darin $\frac{\partial x_1}{\partial v} \ldots \frac{\partial x_5}{\partial v}$ als […] Variable betrachtet, auf nur drei Gleichungen, […] hängig sind, solange die $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ nicht gewisse Be[…] ungen erfüllen (Nr. 20 und 21). Wir dürfen […] Ideen zu fixiren annehmen, dass die Gleichung[…] nach den Grössen

$$\frac{\partial x_{5+h}}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_{5+h}}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_4}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_5}{\partial v}$$

aufgelöst seien; und dieses System ist offenbar pass[…] die beiden Ausdrücke für $\frac{\partial^2 x_{5+h}}{\partial u \, \partial v}$, die sich durch Deri[…] Gleichungen (67) ergeben, wegen der Form des Diff[…] systems (67) (68) identisch ausfallen.

Wie in Nr. 14 meiner früheren Arbeit[3]) schliess[…] jetzt, dass durch eine beliebige Integralcurve

$$x_i = \psi_i(u) \quad (i = 1, \ldots n)$$

des vorgelegten Pfaff'schen Systems (33) eine und nur […] zweifach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeit

$$x_i = \psi_i(u, v) \quad (i = 1, \ldots n)$$

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 276 ff.
[2]) a. a. O., pag. 278 ff.
[3]) a. a. O., pag. 288.

stems hindurchgeht. Wählt man also eine Schaar von Integralcurven beliebig, und ermittelt die bezw. durch ndurchgehenden 2-fach ausgedehnten Integralmannig- eiten, so kann der Inbegriff der letzteren nach Elimi- der Parameter u, v durch Gleichungen der Gestalt

$$f_i(x_1 x_2 \ldots x_n) = c_i \quad (i = 1 \ldots n-2)$$

t werden, womit eine Darstellung (65) des vorgelegten chen Systems gefunden ist. Mithin haben wir den Satz:

estattet ein $n-5$-gliedriges Pfaff'sches System ariabeln eine infinitesimale Transformation der r (63), (d. h. haben die Complexe (66) den singu- Punkt gemein), oder ist $\varkappa = 4$ und der Fall b) der realisirt, oder ist $\varkappa = 3$, so lässt sich das vorge- System stets auf unbegrenzt viele Arten in einer mit nur $n-2$ Differentialelementen schreiben.

asselbe gilt a fortiori für $\varkappa = 2$ oder 1; in diesen Fällen s durch jede Integralcurve ∞^∞ zweifach ausgedehnte almannigfaltigkeiten.

enn das gegebene System eine infinitesimale Transfor- der Form (63) zulässt, so erhält man die allgemeinste llung (65) am einfachsten durch die Methode, die am s der Nr. 30 angegeben wurde. In den beiden übrigen en genannten Fälle erfordert die Herstellung der redu- Form die Integration des Differentialsystems (67) (68), blem, das mit der Integration einer partiellen Differential- ng dritter Ordnung mit einer Unbekannten und zwei ndenten zahlreiche Analogien aufweist[1]).

2. In allen denjenigen Fällen $\varkappa \geq 4$, die keiner der so- ehandelten Kategorien angehören, und in denen die Con- (66) aus dreifach unendlich vielen Geraden besteht, t nach Nr. 22 im Raum R_5 immer eine „ausgezeichnete" $u_\xi = 0$, auf der die ∞^3 Congruenzgeraden liegen und

---

[1]) Die letztere Theorie ist in der ersteren als Spezialfall enthalten; se Berichte 1900, pag. 290, Zeile 3—8.

einen allgemeinen oder speziellen R_3-Complex bilden; die u sind rationale Funktionen der a_{ikh}. Die Ermittelung der allgemeinsten reducirten Form mit $n - 2$ Termen kommt jetzt darauf hinaus, das in Nr. 28 angegebene $n - 4$-gliedrige Pfaff'sche System (56) auf die Gestalt

$$d f_{2+h} = \Phi_{1h}\, d f_1 + \Phi_{2h}\, d f_2 \quad (h = 1 \,..\, n - 4)$$

zu bringen, und diese Darstellung ist nach Nr. 14 meiner früheren Arbeit[1]) immer möglich, da sich die Bilinearformen (66) vermöge $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ auf eine einzige reduciren, und das Pfaff'sche System (56) sonach eine oder zwei linear unabhängige bilineare Covarianten besitzt, je nachdem der Rang der Matrix (43) gleich 2 oder grösser als 2 ist. Mithin können wir die Resultate dieser und der vorigen Nr. dahin resumiren, dass eine reducirte Form mit $n - 2$ Termen immer dann (und zwar auf unendlich viele Arten) hergestellt werden kann, wenn die Congruenz (66) aus dreifach unendlich vielen Geraden besteht.

33. In allen bisher nicht genannten Fällen, für die $\varkappa > 4$ ist, kann die Congruenz (66) nach Nr. 22 aus höchstens zweifach unendlich vielen Geraden bestehen. Nehmen wir also an, dass die Congruenz (66) mehr als dreigliedrig sei und ∞^2 Geraden enthalte, so werden die letzteren durch ein oder mehrere Gleichungstripel der Form:

$$\sum_1^5{}^k \mu_{ik}\, \xi_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

definirt sein, worin die μ_{ik} Funktionen von $x_1 \,..\, x_n$ bedeuten, die ausserdem noch von zwei willkürlichen Parametern τ_1, τ_2 rational abhängen. Jedes dieser Tripel liefert, wenn man es zu dem vorgelegten Pfaff'schen System (33) hinzufügt, je ein $n - 2$-gliedriges Pfaff'sches System, und die so erhaltenen Systeme wollen wir bezw. mit S, S', S'' .. bezeichnen. Existirt nun für das vorgelegte System (33) eine reducirte Form mit

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 288 f.

$n-2$ Termen, und sind $df_1, \ldots df_{n-2}$ die darin auftretenden Differentialelemente, so lassen sich die Grössen τ_1, τ_2 als Funktionen der x derart bestimmen, dass eines der Pfaff'schen Systeme $S, S', \ldots$, wenn man $\tau_1 \tau_2$ durch ihre Ausdrücke ersetzt, unbeschränkt integrabel wird und die Funktionen $f_1, \ldots f_{n-2}$ zu Integralen hat. Um also die allgemeinste reducirte Form mit $n-2$ Termen zu finden, haben wir τ_1 und τ_2 in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass eines der Systeme $S^{(i)}$ unbeschränkt integrabel wird.

Zu diesem Zwecke fassen wir eines dieser Systeme, etwa S, ins Auge, betrachten es als $n-2$-gliedriges Pfaff'sches System in $n+2$ unabhängigen Variabeln:

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \tau_1, \tau_2, \tag{69}$$

und untersuchen, ob es sich auf eine Form mit n Differentialelementen

$$df_i\,(x_1 \ldots x_n, \tau_1, \tau_2) \tag{70}$$

reduciren lässt, derart, dass unter den Relationen $f_i = c_i$ wenigstens zwei existiren, die nach τ_1 und τ_2 auflösbar sind. Da der Unterschied zwischen der Anzahl der Variabeln und der Anzahl der Gleichungen des Systems S gleich vier ist, so lässt sich dies Problem nach den Methoden behandeln, die ich in meiner früheren Arbeit[1]) entwickelt habe. Man hat darnach die Gleichungen S etwa nach $dx_3, dx_4 \ldots dx_n$ aufzulösen und die zugehörigen alternirenden Bilinearformen in den 4 Variabelnpaaren:

$$dx_1, \delta x_1;\; dx_2, \delta x_2;\; d\tau_1, \delta\tau_1;\; d\tau_2, \delta\tau_2$$

aufzustellen; diese Formen reduciren sich offenbar auf höchstens drei linear unabhängige. Sodann hat man das allgemeinste Relationenpaar

$$d\tau_1 = u_{11}\, dx_1 + u_{12}\, dx_2,$$
$$d\tau_2 = u_{21}\, dx_1 + u_{22}\, dx_2,$$

---

1) Diese Berichte 1900, pag. 288—298.

zu suchen, welches mit dem congruenten, in δx, $\delta \tau$ geschriebenen zusammen die genannten Bilinearformen anullirt, und im Verein mit S ein n-gliedriges unbeschränkt integrables System in den $n+2$ Variabeln (69) darstellt. Nach den citirten Untersuchungen ergeben sich dabei verschiedene Fälle, in denen die genannte Reduction von S möglich ist; jeder einzelne dieser Fälle ist durch je ein System von Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen α_{iks}, μ_{ik} und ihren partiellen Ableitungen nach den x und τ charakterisirt. Wir wollen diese verschiedenen Relationensysteme mit Σ_1, Σ_2, ... bezeichnen.

Ist eines der Systeme Σ_i identisch, also für beliebige Werte der $n+2$ Variabeln (69) erfüllt, dann und nur dann erhält man für S, also auch für das vorgelegte $n-5$-gliedrige Pfaff'sche System (33) eine reducirte Form mit n Termen (70). Wenn man also τ_1 und τ_2 aus zweien der Gleichungen $f_i = \text{const.}$ als Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ berechnet und in die genannte reducirte Form substituirt, so ergibt sich eine Darstellung mit $n-2$ Differentialelementen.

Ist keines der Systeme Σ_i identisch befriedigt, so ist die Reduction von S nicht möglich; man erkennt aber leicht, dass jedes Paar von Funktionen τ_1 τ_2 der Variabeln x, welches in S eingesetzt dies System unbeschränkt integrabel macht, wenigstens eines der Gleichungssysteme Σ_i erfüllen muss.

Lassen sich also aus jedem der Systeme Σ_i durch Elimination der Variabeln τ_1, τ_2 Relationen in den x allein ableiten, so kann man mittels des gerade betrachteten Systems S überhaupt zu keiner reducirten Form des Pfaff'schen Systems (33) gelangen.

Reducirt sich eines der Systeme Σ_i auf zwei unabhängige Gleichungen, die τ_1 und τ_2 als Funktionen der x zu bestimmen gestatten, so ist noch zu untersuchen, ob diese Funktionen das System S unbeschränkt integrabel machen, und man erhält dann für die Gleichungen (33) eine ganz bestimmte Darstellung mit $n-2$ Termen.

Besteht endlich eines der Systeme Σ_i aus nur einer Relation, die nach einer der Grössen τ_1, τ_2 auflösbar ist, etwa in der Form:

$$\tau_2 = \varphi(\tau_1, x_1 \ldots x_n),$$

so verwandelt sich S, wenn man τ_2 durch φ ersetzt, in ein $n - 2$-gliedriges Pfaff'sches System $\bar{S}$ mit $n + 1$ Variabeln, welches jetzt in analoger Weise zu behandeln ist wie vorhin S.

Man hat zunächst zu untersuchen[1]), ob sich $\bar{S}$ auf eine Form mit $n - 1$ Termen

$$d\varphi_i(\tau_1, x_1 \ldots x_n) \quad (i = 1 \ldots n - 1)$$

bringen lässt, derart, dass wenigstens eine der Gleichungen $\varphi_i =$ const. nach τ_1 auflösbar ist, und erhält wieder gewisse Systeme von Bedingungsgleichungen $\bar{\Sigma}_1$, $\bar{\Sigma}_2$, .., deren jedes, falls es identisch erfüllt ist, einen der Fälle charakterisirt, in denen die genannte Reduction möglich ist.

Gibt es für $\bar{S}$ eine solche reducirte Form, so findet man ganz ähnlich wie oben durch Elimination von τ_1 mittels einer der Gleichungen $\varphi_i =$ const. für das vorgelegte $n - 5$-gliedrige System eine Darstellung mit $n - 2$ Termen. Eine solche erhält man auch, wenn eines der Systeme $\bar{\Sigma}_i$ sich auf eine einzige Gleichung der Form

$$\tau_1 = \psi(x_1 \ldots x_n)$$

reducirt, und wenn die so definirte Funktion τ_1 das System $\bar{S}$ unbeschränkt integrabel macht. Ist keine dieser beiden Voraussetzungen erfüllt, so liefert $\bar{S}$ überhaupt keine reducirte Form des gegebenen Pfaff'schen Systems.

Führt man die vorstehende Rechnung für jedes der Systeme S, S', .. durch, so gelangt man in allen Fällen entweder zu der Gesamtheit der überhaupt möglichen reducirten Formen, oder zu dem Nachweis der Unmöglichkeit einer solchen Darstellung.

---

[1]) Diese Berichte 1900, p. 283—285.

Der Fall, dass die Congruenz (66) nur aus einfach unendlich vielen Geraden oder aus einer endlichen Zahl von Geraden besteht, ist durch die Entwickelungen dieser Nr. miterledigt.

34. Als wichtigstes Ergebnis der vorliegenden Untersuchung wollen wir zum Schluss noch constatiren:

Die Reduction eines Pfaff'schen Systems, für das die Zahl der Variabeln um fünf grösser ist als die Zahl der Gleichungen, lässt sich immer auf die Reduction solcher Pfaff'scher Systeme zurückführen, für die der genannte Unterschied kleiner als fünf ist, mit einziger Ausnahme zweier in Nr. 31 behandelter Fälle.

Berichtigung. Zu dem Schlusssatz der Nr. 25 ist ergänzend nachzutragen, dass in dem ersten der beiden genannten Fälle die Determinante (43) stets identisch verschwindet, die Reduction auf $n-3$ Terme also immer möglich ist.

In meiner früheren Arbeit (diese Berichte Bd. 30 (1900), p. 300, Zeile 1 v. o. ist zu lesen: „in n Variabeln" statt „in m Variabeln".

Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches), beobachtet am Starnberger See.[1])

Von **H. Ebert.**

(Eingelaufen 10. Dezember.)

Am Genfer See wurde bekanntlich zuerst eine Erscheinung beobachtet, deren allgemeinere Bedeutung für die Binnenseen überhaupt man erst allmählich erkannte. Man fand, dass sich am Rhoneausfluss bei Genf der Wasserspiegel rhytmisch in regelmässigen Perioden hebt und senkt und zwar um Beträge, die daselbst gelegentlich mehr als Meterhöhe erreichen können. Diese auch für den Wasserabfluss aus dem See, der in Genf grosse Turbinenwerke speist, wichtige Erscheinung nennt man nach einer Lokalbezeichnung „Seiches", ein Name, der für analoge Phänomene an anderen Seen allgemein angenommen wurde.

Eine einfache Vermehrung oder Verminderung der gesammten Wassermasse in Folge periodisch gesteigerten oder geschwächten Wasserzuflusses konnte diese Seiches nicht erzeugen; denn ihre Periode beträgt am Genfer See 73 Minuten und es war von vornherein unwahrscheinlich, dass innerhalb so kurzer Zeitintervalle sich die Wasserführung der Speisewässer um so erhebliche Beträge ändern sollte; vor allem wäre die vollständig regelmässige Wiederkehr des Anwachsens und

---

[1]) Die vorliegende Untersuchung wurde ermöglicht durch eine von dem Präsidium der kgl. bayerischen Akademie der Wissenschaften gewährte Geldunterstützung aus den Renten der Münchener Bürger-Stiftung für das Jahr 1900.

Sinkens des Seespiegels nach je 73 Minuten vollständig unverständlich geblieben. F. A. Forel, der sich zuerst eingehender mit dem Seichesproblem beschäftigte, fand vielmehr, dass die gesammte Wassermasse des Sees bei fast unveränderter Gesammtmenge regelmässige Pendelschwingungen ausführt, derart, dass diese Wassermasse periodisch bald gegen das westliche, Genfer Seeende andrängt und dort den Wasserspiegel hebt, bald gegen das Ostende, also gegen den Rhoneeinfluss zurückflutet, und zwar innerhalb 73 Minuten dasselbe Spiel fast das ganze Jahr unausgesetzt wiederholend; denn feinere Beobachtungsinstrumente liessen bald erkennen, dass das Seichesphänomen beinahe niemals erlischt, sondern zu jeder Tages- und Jahreszeit vorhanden ist, wenn so grosse Seespiegelschwankungen, wie die oben genannten, auch nur ausnahmsweise zu Stande kommen. Um näher in die feineren Einzelheiten dieser überraschenden Erscheinung einzudringen, construirte Forel einen selbstregistrirenden Pegel, sein „Limnimeter", welches von Plantamour und namentlich von Ed. Sarasin verbessert wurde. Letzterer richtete das Instrument so ein, dass es verhältnismässig leicht transportabel wurde und der Reihe nach an verschiedenen Punkten des Seeufers aufgestellt werden konnte („Limnimètre enregistreur transportable"). Als er seinen Apparat in La Tour de Peilz bei Vevey in der Nähe des Ostendes des Sees schreiben liess, während gleichzeitig der Apparat von Plantamour in Sécheron bei Genf, also am Westende, der von Forel in Morges nahe der Mitte des langgestreckten Seebeckens arbeitete, wurde durch den Vergleich der mit genauen Zeitmarken versehenen Registrir-Curven unzweifelhaft festgestellt, was Forel bereits früher wahrscheinlich gemacht hatte, dass man in den Seiches eine stehende Pendelschwingung vor sich habe. Wenn der Seespiegel bei Vevey sich hob, senkte er sich in der gleichen Zeit bei Genf und umgekehrt. Dagegen blieben die Amplituden der Seespiegelschwankung bei Morges fast die ganze Zeit über nahezu gleich Null. Hier in der Nähe ging also eine sog. „Knotenlinie" quer über den See. Solche Schwingungen mit

einem Knoten in der Mitte, sog. Schwingungsbäuchen an den Enden, nennt man „uninodale" Schwingungen. Sie entsprechen vollkommen den Schwingungszuständen bei den stehenden Seilwellen oder den Schwingungen in der Mitte festgeklemmter Stäbe, oder den durch einen Steg zur Bildung eines Knotens gezwungenen Saitenschwingungen in der Akustik. Ausser dieser uninodalen Grund- und Hauptschwingung wurde noch eine Oberschwingung von der kürzeren Periode von 35 Minuten entdeckt, die sich der ersteren überlagert. Diese veranlasste ein gleichzeitiges Ansteigen der Wassermassen an den beiden Enden des Sees, ein Herabgehen des Spiegels nahe der Mitte in der einen Phase der stehenden Schwingung, dagegen ein Sinken an den Enden, ein Anschwellen der Wassermasse in der Mitte der Längserstreckung des Sees in der entgegengesetzten Phase der Schwingung. Hier müssen sich zu beiden Seiten der Mitte zwei Zonen finden, in denen der Seespiegel relativ ruhig ist. Es ist dies daher eine zweiknotige, „binodale" Schwingung.

Wie man sieht stehen die Schwingungszeiten beider Systeme nicht in einem einfachen harmonischen Verhältnisse zu einander. Zu Zeiten, in denen beide Schwingungen deutlich ausgeprägt sind, tritt nun ein eigentümliches Ineinandergreifen der von ihnen an einem Orte erzeugten periodischen Bewegungen ein, wie wir es bei der Durchkreuzung zweier Wellensysteme zu studiren Gelegenheit haben. Man nennt diese Erscheinung in der Wellenlehre Interferenz; bei den Seichesschwingungen hat Forel für diesen Fall des Ineinandergreifens von Grund- und Oberschwingung die Bezeichnung: dikrote Schwingungsform eingeführt.

Durch die Arbeiten der genannten Forscher sind die Schwingungsverhältnisse am Genfer See im Laufe der Jahre vollkommen klar gestellt worden. Doch muss es bezüglich der Erklärung des Seichesphänomens im höchsten Grade erwünscht erscheinen, vorerst auch andere Seen genau auf diese Erscheinung hin zu studiren. Denn von der früher wohl gelegentlich geäusserten Vermutung, dass diese periodischen See-

spiegelschwankungen der Binnenseen durch dieselben allgemeinen kosmischen Kräfte der Mond- und Sonnenanziehung veranlasst würden, wie die Gezeiten der oceanischen Wasseransammlungen, kam man bald zurück. Auch das Heranziehen von Erdbeben, sei es lokaler, sei es entfernter, und in ihren Wirkungen sich weit verbreitender seismischer Störungen als Ursache der Seiches musste als aussichtslos fallen gelassen werden. Vielmehr hat man im Laufe der Zeit immer mehr die Ueberzeugung gewonnen, dass es meteorologische Faktoren sind, Windverhältnisse, ungleiche Luftdruckverteilung, welche die hier in Rede stehenden Pendelschwingungen anregen. Sind dieselben einmal geweckt, so vollziehen sie sich nach Gesetzen, welche durch die Grösse, Gestalt und das Tiefenrelief des betreffenden Seebeckens ein für alle Mal eindeutig bestimmt sind. Die limnimetrische Forschung hat daher für jeden See auch nach dieser Richtung hin eine individuelle Bedeutung und erst wenn viele in ihrer Ausgestaltung, Lage, geographischen Beziehung zur Umgebung möglichst verschiedene Binnenseen genau auf Seiches hin untersucht sind, lassen sich allgemeinere Gesichtspunkte erwarten. Darum unternahm es schon Ed. Sarasin selbst mit seinem transportablen Limnimeter die Seespiegelstellungen auch anderer Schweizer Seen genau zu registrieren. Züricher und Neuchateler See lieferten wenig klare Schwingungsbilder; unregelmässige Gestaltung des Untergrundes liess hier offenbar regelmässige Pendelschwingungen der Wassermasse von grösserer Dauer nicht zu Stande kommen. Dagegen zeigten sich in dem östlichen Teile des Vierwaldstätter Sees ausserordentlich regelmässig verlaufende Seiches, die in dem bei Fluelen stationirten Instrumente klare und regelmässige Aufzeichnungen ergaben. Auch der Bodensee zeigt das Phänomen. Ausserhalb des Schweizergebietes sind Seichesforschungen in Oesterreich, England und Amerika im Gange.[1])

[1]) Bezüglich der Litteratur verweise ich auf das umfassende Handbuch der Geophysik von S. Günther, 2. Aufl., II. Bd., 1899. Sechste Abteilung, Kapitel IV, § 7, p. 456 ff. Die Entwickelung der Seiches-

Auffallend zurück stand in dieser Beziehung seither noch Deutschland; ausser am Bodensee hat meines Wissens noch an keinem der deutschen Binnenseen die eigentliche Seichesforschung eingesetzt. Wenn auch der Wasserstand der Seen, — wie hier in Bayern durch das hydrotechnische Bureau als einer Abteilung der Obersten Baubehörde im kgl. Staatsministerium des Innern, — einer unausgesetzten Controle unterworfen, und von dieser Behörde in dankenswertester Weise schätzbarstes Material an regelmässigen Pegelablesungen, an einigen Orten sogar mit Hilfe selbstregistrierender Pegelapparate, geliefert wird, so haben diese Bestimmungen doch ihrer ganzen Natur nach einen anderen Zweck vor Augen; es soll in erster Linie der absolute Seespiegelstand unter Anschluss an genau mit dem Netze der Landesvermessung in Beziehung gesetzte Fixpunkte in der Umgebung für jeden Tag festgesetzt und die Wasserführung im Allgemeinen unter Controle gehalten werden. Die Seichesmessungen dagegen haben zunächst nur Relativbestimmungen des Spiegelstandes zum Ziele, sollen dagegen vor allem den schnellen, sich innerhalb weniger Minuten vollziehenden kleinen Seespiegelschwankungen möglichst bis in alle Einzelheiten hinein folgen. Angesichts des herrlichen Seenmateriales, welches die Natur gerade unserem Bayernlande zur Verfügung gestellt hat, musste es daher im höchsten Grade erwünscht erscheinen, diese Messungen auch hier in Angriff zu nehmen und zwar womöglich mit Hilfsmitteln, welche den bei den Schweizer Seen angewendeten in jeder Hinsicht entsprechend sind, damit die erhaltenen Resultate möglichst direkt mit denen der Schweizer Seenforschung vergleichbar werden. Es ist daher als überaus dankenswert zu begrüssen, dass das Hohe Präsidium der kgl. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München bereitwilligst

forschung findet man in Forels Monographie „Le lac Léman“. Bd. II, p. 39—213, Lausanne 1895. Ueber die auf schweizerischem Gebiete gemachten Fortschritte giebt der dem internationalen Congress für Paris 1890 von den Herren F. A. Forel und Ed. Sarasin erstattete Bericht eine treffliche Uebersicht.

die Mittel zur Anschaffung zweier Limnimètre enregistreur transportable, System Sarasin, zur Verfügung stellte, und ich möchte nicht verfehlen auch öffentlich meinen ergebensten Dank für diese Förderung auszusprechen.

Die Apparate wurden bei der Société génèvoise pour la construction d'instruments de physique bestellt. Herr Ed. Sarasin hatte sich in liebenswürdigster Weise bereit erklärt die Anfertigung und Justierung der Instrumente selbst zu überwachen und alle seine bei seiner langjährigen Thätigkeit auf diesem Gebiete gesammelten reichen Erfahrungen den neuen beiden Apparaten zu Gute kommen zu lassen. Auch ihm möchte ich für seine rastlosen Bemühungen und zahlreichen Ratschläge und Winke bei dieser Untersuchung meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Hervorzuheben ist noch der Umstand, dass zu gleicher Zeit ein gleicher Apparat auch von der italienischen Regierung bestellt wurde und von Italien aus mit diesem die Erforschung der südalpinen Seen in Angriff genommen werden wird; es ist klar, dass gleichzeitige Untersuchungen der süd- und nordalpinen Seen mit Instrumenten, die an Empfindlichkeit, Construction, Handhabung u. s. w. einander vollkommen gleichen und direkt vergleichbare Angaben liefern, interessante Aufschlüsse über den etwaigen Einfluss weitgreifender meteorologischer Faktoren, wie z. B. Föhnbewegungen u. dergl., auf die Seicheserregungen in Aussicht stellen. Ein Zusammengehen mit dem italienischen Forscher auf diesem Gebiete ist in Aussicht genommen.

Einer der Apparate traf im Juli dieses Jahres hier ein und wurde zunächst einer weitgehenden Prüfung unterworfen, die ihn nach einigen kleinen Abänderungen als ausserordentlich zuverlässiges Instrument erwies.

Eine ausführliche Beschreibung des Instrumentes unterlasse ich an dieser Stelle und verweise auf die kurzen Angaben, die Herr Sarasin über sein älteres Modell macht.[1]) Ich möchte

---

[1]) Ed. Sarasin, Arch. des scienc. phys. et nat. (3). 2. Nr. 12. Dec. 1879.

bezüglich unseres Apparates nur noch folgendes bemerken: Der aus Zinkblech gefertigte, als Schwimmer dienende Hohlkörper hat 26 cm Durchmesser und 14 cm Höhe, also 7,4 Liter Deplacement bei völligem Eintauchen, einem Auftriebe von 7,4 kg entsprechend. Beim Heben und Senken des Wasserspiegels wird er also mit grosser Sicherheit mitgenommen. Der Schwimmer ist unten an einer Stahlstange befestigt, welche oben durch eine Führung hindurchgeht. Seitlich an derselben ist ein nach oben gehendes Kupferband befestigt, welches über eine mit Rand versehene Messingscheibe geht und am anderen Ende durch ein Bleigewicht gespannt ist. Beim Auf- und Abgehen des Schwimmers wird dadurch die Messingscheibe mitgenommen und die Vertikalbewegung des Seespiegels in eine Drehbewegung umgesetzt. Diese wird durch eine mit zwei Universalgelenken versehene Stange in das Innere des eigentlichen Registrierapparates übertragen. Die Stange dreht eine mit Zähnen versehene Scheibe, in welche eine darüber liegende und durch eine zweite Messingscheibe horizontal getragene Zahnstange eingreift, die den in einer Hülse vertikal beweglichen Schreibstift führt. Wenn der Seespiegel auf und niederschwankt, wird der Stift um gleiche Beträge horizontal hin und her geführt. Dabei gleitet er quer über einen Papierstreifen ohne Ende von 25 cm Breite, der von einem Walzenpaare, das von einem sehr kräftigen Genfer Federuhrwerke betrieben wird, seiner Länge nach unter dem Stifte durchgezogen wird. Der Stift schreibt in dieser Weise Curven auf, deren Ordinaten die Seespiegelschwankungen selbst sind. Gleichzeitig zeichnet ein zweiter an einem ruhenden Arm in einer vertikalen Hülse leicht auf und ab beweglicher Schreibstift eine der Längskante des Papierstreifens parallel verlaufende gerade Linie, welche zur Markierung des mittleren Pegelstandes dient. Durch das Uhrwerk wird der Arm nach jeder Stunde ein wenig abgelenkt; auf der Geraden entsteht dadurch eine Zeitmarke. Diese Zeitmarkierungen gestatten den zu jedem Spiegelstand gehörigen Moment zu bestimmen; jedesmal beim Aufziehen des Werkes, was nur alle zwei Tage zu geschehen

braucht, wird ausserdem zur Contr
unter den Schreibstiften befindlichen
geschrieben.

Da die Streifenbreite nur 25 cm
im Laufe der Jahreszeiten im allgeme
Beträge sinkt oder steigt, so muss vo
strument wieder neu eingestellt werden.
durch, dass man die Verbindung der de
tragenden Stahlstange mit der Führung de
Stange weiter durch die Führung, an der d
festigt ist, nach unten durchschiebt oder nac
und dann Stange und Führung wieder mit
solchen gegenseitigen Stellung verschraubt, d
stift etwa in der Mitte des Papierstreifens spiel

Als erstes Objekt für die bayerischen Seich
ungen wurde der Starnberger See in's Auge
empfiehlt sich in erster Linie durch seine einfa
Als langgestreckte schmale Rinne von 19,6 km
4,7 km maximaler Breite, erstreckt er sich mit sei
achse ziemlich genau von Süden nach Norden
schwachen Krümmung, deren concave Seite nach Osten
ist. Seine Tiefenverhältnisse sind von Dr. Alois Geist
genauer festgestellt worden. Bei mittlerem Stande
Seespiegel 586 m über dem Meere; er bedeckt ein Are
55,9 Quadratkilometer. Seine Maximaltiefe wurde von Ge
beck zu 114 m bestimmt, die mittlere Tiefe des Gesamt
zu 52 m berechnet. Der See fasst 2 912 000 000 Cubik
Wasser und sein Tiefenrelief hat einen mittleren Bösch
winkel von 3,5 Grad, nach der von Herrn Professor Finst
walder eingeführten präcisen Bestimmung dieses für
Oroplastik so wichtigen Begriffes.[2]) Wenn die Geistbeck'sch

[1]) Alois Geistbeck, Die Seen der Deutschen Alpen. Heraus
geben von dem Verein für Erdkunde zu Leipzig. 1885.

[2]) S. Finsterwalder, Ueber den mittleren Böschungswinkel und
das wahre Areal einer topographischen Fläche. (Sitzungsber. Münchener
Akademie, Math.-phys. Cl. 20. 1. p. 35, 1890). Die Zahlen stammen aus
Penck, Morphologie der Erdoberfläche, Bd. 2. p. 323. Stuttgart 1894

ergebnisse nach den neuesten Forschungen des ver-
Limnologen Prof. W. Ule in Halle auch im Einzelnen
der Verbesserung bedürfen, so stellen sie doch das
ne Tiefenrelief des Sees für unsere Zwecke genau genug
dass wir uns an seine Zahlen halten können, bis die
en genaueren Werte in extenso publiciert sein werden.
besteht der Starnberger See aus einer schmaleren und
Nordrinne, in deren Mitte Tiefen bis zu 114 m gelotet
und einem breiteren und flacheren Südbecken. Dort,
h schon an der äusseren Umrandung des Seespiegels
m Westufer eine Art Abgrenzung bemerkbar wird, in
längerung des zwischen Unter-Zaismering und Bernried
. Karpfenwinkel hervortretenden Ufervorsprungs, läuft
ft ansteigende Bodenschnelle quer unter dem See nach
tlichen Ufer hinüber. Dieselbe trennt das Seebecken
Teile, deren Längen sich ungefähr wie 1 zu 2 ver-
so dass das längere nördliche Becken etwa $^2/_3$ von
amtlänge des ganzen Sees umfasst.

Längsachse des Sees liegt angenähert parallel der
ichtung der die nördliche Kalkalpenkette an dieser
urchbrechenden Querthäler, der Senke des Kesselberg-
zwischen Walchen- und Kochelsee einerseits, des von
irchen-Garmisch über Murnau herabkommenden Loisach-
ndererseits. Es konnte von vornherein keinem Zweifel
gen, dass, wenn der Starnberger See überhaupt das
hänomen zeigt, derselbe längs seiner nord-südlichen
chse zu Pendelschwingungen von einigermassen nach-
er Amplitude erregt werden würde.

rel weist auf eine Formel hin, die schon 1828 von
ian[1]) für die Periodendauer der stehenden Pendel-
ungen abgeleitet wurde, welche Wassermassen in flachen
n von bestimmten einfachen Profilen vollführen, wenn
s eines Schnittes durch diese Gefässe in Bewegung ge-

R. Merian, Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in
. Basel 1828.

setzt werden. Bedeutet l die Länge der Spiegellinie des Profiles, h seine mittlere Tiefe, so ist die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t = \frac{l}{\sqrt{g\,h}}$$

wo g die Beschleunigung durch die Erdschwere (9,81 m/sec²) bedeutet. Eine ganze aus Hin- und Hergang bestehende Schwingung, wie wir sie hier in Deutschland im Gegensatz zur französischen Zählung bei oscillatorischen Vorgängen zu zählen pflegen, wird also in der Zeit

$$T = \frac{2\,l}{\sqrt{g\,h}}$$

ausgeführt.

Geistbeck hat auf Tafel VII des zu seinem Werke gehörigen Atlas das Längenprofil des Starnberger Sees im Massstab 1 : 50 000 für die Horizontalerstreckungen, 1 : 10 000 für die Tiefen construiert. Hieraus liess sich die zu erwartende Periode für die Längsschwingung des Sees, die zugleich seine Haupt- und Grundschwingung sein musste, auf Grund der Merian'schen Formel berechnen, wenn man die mittlere Profiltiefe h nach dem Geistbeck'schen Diagramm ermittelte. Dazu wurde in folgender Weise verfahren:

Das Profil wurde auf einen starken Carton abgezeichnet, aber mit Verzehnfachung aller Tiefenwerte, und das so vergrösserte Längsprofil des Sees ausgeschnitten. Aus demselben Carton wurde ein Rechteck von 200 cm² Fläche geschnitten und darauf beide Flächenstücke gewogen. Als Gewichte ergaben sich 7,395 bezw. 4,925 gr, so dass die Profilfläche 300,2 cm² umfasste, was mit Rücksicht auf den Massstab der Zeichnung einen Mittelwert für die Profiltiefe von 75,7 m ergiebt.

Wie man bemerkt ist dieser Wert nicht unerheblich grösser, als die mittlere Seetiefe. Dies ist nicht zu verwundern: denn unser Wert giebt an, wie breit ein Flächenstreifen sein muss, welcher bei einer Länge gleich der Seelänge von

19,6 km dieselbe Fläche wie das Längenprofil des Sees hat; der oben angegebene Mittelwert von 52 m dagegen stellt die Tiefe dar, welche ein überall gleich tiefes Becken von der Grösse des Sees haben müsste, das dieselbe Wassermasse wie dieser selbst fasst; namentlich die breiten und flachen Partieen des Südendes verkleinern diesen Tiefenwert gegenüber dem von uns bestimmten mittleren Tiefenwert der Längsrinne.

In unsere Formel haben wir die Tiefe des Schnittes einzuführen, längs dessen die zu untersuchende Schwingung stattfindet. Aus dem gefundenen Wert für h ergiebt sich T zu rund 24 Minuten.

Wie wir später sehen werden, stimmt der so berechnete Wert so genau mit dem wirklich für diese Schwingung gefundenen Wert (25 Minuten) überein, als man nur erwarten kann. Denn einmal ist es ja von vorn herein gar nicht sicher, ob der von Geistbeck gezeichnete Schnitt wirklich genau mit der Fläche zusammenfällt, längs deren sich die Wasserteilchen bei der longitudinalen Grundschwingung bewegen; ferner aber hängt, wie nicht anders zu erwarten, die Periodendauer von der Gesamtwasserführung des Sees ab, so dass bei anderer Pegelstellung etwas andere Schwingungsdauern resultieren. Genaue Uebereinstimmung kann endlich bei der Angenähertheit des ganzen Verfahrens überhaupt nicht erwartet werden.

Daher liefern die erhaltenen Zahlen immerhin eine schöne Bestätigung der Forel'schen Theorie des Seichesphänomens, welche sich auf die Merian'sche Formel stützt.

Bei der Auswahl des Punktes, an welchem das Limnimeter zunächst aufgestellt werden sollte, war der Gesichtspunkt leitend, dass es sich ja vor der Hand in erster Linie darum handelte, den Nachweis zu führen, ob ein so kleines Seebecken, wie das in Rede stehende, überhaupt im Stande sei, Seiches von merklichem Betrage zu zeigen. Aus diesem Grunde musste dem Nordende für die Aufstellung der Vorzug gegeben werden. Denn wenn die Wassermassen im See von Norden nach Süden und umgekehrt hin- und herschwanken, so musste sich die

Flut in dem engeren, tiefem Starnberger Nordende höher zusammen stauen, als in dem breiteren und flacheren Seeshaupter Südende. In Starnberg selbst oder in der unmittelbaren Nachbarschaft den Apparat zu montieren, empfahl sich nicht, weil er hier erheblichen Störungen durch Badende, Rudernde und vor allem durch den starken Dampfschiffverkehr ausgesetzt gewesen wäre. Ihn am Nordende selbst, am Ausfluss der Würm oder bei Percha aufzustellen, schien gleichfalls nicht günstig, da der See hier in eine sehr seichte, von Schilf dicht bewachsene Untiefe ausläuft und es nicht unwahrscheinlich ist, dass die periodischen Bewegungen des Tiefenwassers sehr stark gedämpft werden, wenn sie auf solches Flachterrain auslaufen. Am geeignetsten erschien ein Platz am Nordostufer unterhalb des Dorfes Kempfenhausen, dort, wo das steilere Höhenufer wieder dicht an den See herantritt und schon in geringer Entfernung vom Ufer beträchtliche Tiefen sich finden.

Auch legen hier die Dampfer nicht an, sondern sie fahren weit vom Ufer entfernt direkt von Starnberg nach Berg hinüber, so dass die durch sie verursachten Wasserbewegungen, wie direkte Vorversuche zeigten, nur wenig merklich sind.

Hier steht ein neugebautes, sehr solid fundiertes Badehaus, dessen Eigentümer, Herr Lehrer Hartlmaier in Wangen bei Starnberg in freundlichster Weise gestattete, dass das Limnimeter an der Aussen-Gallerie seines Badehauses montiert werde. Ein 56 m langer Steg führt vom Ufer zu dieser Gallerie hinaus; am Orte, wo der Apparat befestigt wurde, fand sich im Juli über 2 m Wassertiefe. Noch war es nötig den Schwimmer vor den gewöhnlichen Wellen der Wasseroberfläche so zu schützen, dass er gleichwohl den Bewegungen der gesammten Wassermassen leicht und schnell folgen konnte. Wir haben zu dem Zwecke eine oben offene grosse Holzkiste zur unteren Hälfte im Wasser so unterhalb des Schwimmers befestigt, dass selbst hohe Wellen nicht von oben her in das Innere, das immer einen ruhigen Spiegel zeigte, hineinschlagen konnten; in den Boden der Kiste war eine Anzahl 2 cm weiter Löcher gebohrt, durch die das Innere mit dem See communicierte. Dadurch

war der in das Wasser tauchende Apparat zugleich gegen das Anfahren von Booten genügend geschützt.

Herr Ingenieur und Bezirkstechniker für das kgl. Bezirksamt München II, Franz H. Haertinger, hatte die Güte, den von mir gewählten Aufstellungspunkt einzunivellieren und an die Höhencoten der Landesvermessung anzuschliessen. Gleichzeitig wurde an dem Badehaus selbst ein Punkt genau markiert, der gegen einen, durch einen grossen, am Ufer eingegrabenen Stein versicherten Höhenpunkt einnivelliert wurde. Hierdurch war es möglich, jederzeit zu kontrollieren, ob nicht etwa eine Senkung des Aufstellungsterrains stattgefunden hatte und zweitens war ein direktes Beziehen der Limnimeterangaben zu den Würmseepegelablesungen dadurch ermöglicht, dass der genannte Punkt gegen den Nullpunkt dieses Pegels einnivelliert wurde.

Der Apparat bedurfte namentlich im Anfange einer regelmässigen Ueberwachung und da das Uhrwerk alle zwei Tage aufgezogen werden musste, so war ausser der natürlich öfter wiederholten, von München aus unternommenen Kontrole, die Inanspruchnahme anderweitiger freundlicher Unterstützung notwendig. Der genannten Mühewaltung haben sich Herr und Frau Kaufmann Hartlmaier aus München, sowie Herr stud. Seitz aus München unterzogen; ich möchte allen Genannten für ihre Mühe auch öffentlich hierdurch meinen besten Dank aussprechen, sowie vor allem Herrn Lehrer Hartlmaier auch dafür, dass er den Apparat noch über die ursprünglich in Aussicht genommene Zeit auf seinem Besitze beherbergt und uns die Fortsetzung der Messungen an dem genannten Orte, der sich als überaus günstig erwiesen hat, in zuvorkommendster Weise gestattet hat. Endlich gebührt auch dem kgl. Bezirksamte München II, sowie den Behörden, Bürgermeistereien wie Gendarmerien Dank, welche das Instrument unter ihren Schutz nahmen.

Der Apparat ist seit dem 7. Juli am genannten Orte in Thätigkeit, allerdings nicht ununterbrochen, da eine grössere Reparatur und einige kleine Abänderungen eine Pause zwischen

19. Juli und 1. August nötig machten. Vom 7.—19. Juli arbeitete er mit langsamem Streifengang ($1^h = 2$ cm), da vorerst festgestellt werden sollte, ob das Seichesphänomen überhaupt vorhanden ist.

Schon als der Apparat zu schreiben begann, zeichnete der Schreibstift unzweifelhafte Seicheskurven, reine Sinusschwingungen von ca. 25 Minuten Periodendauer und mehreren Centimetern Amplitude auf, d. h. am Nordende des Starnberger Sees hebt sich die gesammte Wassermasse während $12^1/_2$ Minuten um einige Centimeter über die mittlere Höhe, um in den darauffolgenden $12^1/_2$ Minuten um ebenso viel wieder zu sinken. Diese periodische Bewegung stellt sich ebenso gut in der Nacht wie am Tage und zu jeder Stunde ein, sie kann daher nicht etwa von den Dampferbewegungen, wechselndem Zu- oder Abfluss oder sonstigen Störungen herrühren. Selbstverständlich verbindet sich diese pendelnde Bewegung, die einer Atembewegung des Sees gleicht, mit dem Steigen des Wassers bei Regengüssen, ebenso wie mit dem Sinken bei anhaltender Trockenheit, dem sie sich überlagert.

Nachdem der Beweis erbracht war, dass auch im Starnberger See das Seichesphänomen heimisch ist und sich mit dem verwendeten Hilfsmittel trefflich studieren lässt, wurde vom 1. August an zu rascher Streifenbewegung übergegangen ($1^h = 6$ cm, 1 mm = 1 Minute), wodurch die Zacken, welche der Apparat schrieb, länger ausgezogen wurden, so dass zahlreiche interessante Einzelheiten im zeitlichen Verlaufe der Erscheinung zu Tage traten.

Im Folgenden soll nur das Beobachtungsmaterial diskutiert werden, welches in den ersten beiden Monaten (7. Juli bis 10. September) am Apparate erhalten wurde. So kurz diese Zeitspanne auch ist, so lassen sich doch schon die wesentlichsten Züge des Phänomens, wie es unserem See eigentümlich ist, unzweifelkaft erkennen. Späteren Arbeiten soll die Diskussion längerer Beobachtungsreihen überlassen bleiben, welche wichtige Ergänzungen und neue Einzelheiten in Aussicht stellen. —

Beim Durchsehen der erhaltenen Registrierkurven ergiebt

sich als erstes Resultat, dass der Zustand regelmässiger pendelnder Bewegung für die Gesamtwassermasse des Starnberger Sees die Regel bildet; der Zustand vollkommener Ruhe hat in der genannten Zeit nur während weniger Stunden angehalten, und auch hier kann man fragen, ob das Fehlen jeglicher Bewegung in der erhaltenen Kurve wirklich einem absoluten Fehlen der Seichesbewegung zuzuschreiben ist, oder nicht vielmehr einer gewissen vorübergehenden Trägheit des Schwimmers, die ihn verhinderte, den feinsten Bewegungen der Wassermasse nachzugehen. Die überaus zahlreichen periodischen Bewegungen, die bald nur eben angedeutet sind, bald Seespiegelschwankungen bis zu 8 cm Niveaudifferenz anzeigen, lassen nun unzweifelhaft erkennen:

I) eine Haupt- oder Grundschwingung der Wassermassen. Die Periode derselben stimmt genau genug mit der oben nach der Merian-Forel'schen Formel S. 445 zu 24 Minuten berechneten überein, dass es keinem Zweifel unterliegen kann, dass wir hier die longitudinale Hauptschwingung vor uns haben, an der die Gewässer des Sees als Ganzes Teil nehmen, und welche dem Längsschnitt des Beckens entlang von Norden nach Süden hin und umgekehrt erfolgt. Da es die uninodale Schwingung in dem Seite 437 angegebenen Sinne ist, so wird der Seespiegel durch dieselbe am Starnberger Ende gehoben in demselben Augenblicke, wo er sich am Seeshaupter Ende senkt; nach halber Schwingungsdauer findet das Umgekehrte statt; die Wassermassen fluten vom Nordende zurück und stauen sich nach Süden immer höher und höher an. Dazwischen liegt, etwa in der Mitte des Sees, vielleicht zwischen Tutzing und Ammerland eine Zone, wo sich der Seespiegel unter dem Einflusse dieser Schwingung weder hebt noch senkt, die „Knotenlinie" der Schwingung. Daraus dürfen wir freilich nicht schliessen, dass sich hier die Wassermassen selbst etwa in Ruhe befinden; im Gegenteil: der Transport so gewaltiger Wassermassen, wie sie einem Steigen des Sees an einem Ende um mehrere Centimeter entsprechen und die Umlagerung dieser Massen in der Zeit von wenigen Minuten,

muss sehr starke Strömungen, und da nach der Theorie die gesamte Wassermasse bis zum Boden hin in diese Pendelung hineingezogen wird, vor allem starke Unterströmungen in dem im Vergleich zu seiner Länge schmalen Seebecken hervorrufen. Höchst wahrscheinlich hängt hiermit die seit langem bekannte und gefürchtete Erscheinung des sog. „Rinnens" unseres Sees zusammen, das heftige Strömen der Wassermassen und das Auftreten grosser Verschiedenheiten in der Strömungsgeschwindigkeit der übereinander liegenden Schichten selbst bei ganz ruhigem Wetter, das so heftig werden kann, dass den Fischern die Netze fortgerissen werden. Aus Zu- und Abfluss am Seebecken lässt sich diese Erscheinung keineswegs erklären, sie dürfte durch das Studium der Seiches so vollkommen aufgeklärt werden können, dass man die Periode dieser Miniaturgezeiten des Sees für die einzelnen Monate wird voraus berechnen können.

Um die Periodendauer der Hauptschwingung möglichst genau zu bestimmen, wurde aus den häufig auf den Streifen notierten Zeitmarken (S. 442) zunächst der wahre Streifengang ermittelt. Er ergab sich bei der kleinen Uebersetzung zu

1 Millimeter = 3,042 Zeitminuten,

bei der grossen und dem rascheren Streifengange zu

1 Millimeter = 1,019 Zeitminuten.

Wurde dann die Gesamtlänge einer bestimmten Anzahl von Wellenbergen in dem Diagramm gemessen, so ergab sich durch Division durch die Anzahl der einzelnen Spiegelschwankungen ein Mittelwert für die Periodendauer. Aus den Aufzeichnungen wurden verschiedenen Zeiten entsprechend Gruppen einer grösseren oder kleineren Anzahl deutlich ausgeprägter aufeinander folgender Hauptschwingungen herausgegriffen und in dieser Weise zur Ableitung einer mittleren Schwingungsdauer für das benutzte Zeitintervall verwendet. In der folgenden Tabelle ist das so erhaltene Zahlenmaterial zusammengestellt. In derselben bedeuten die Zahlen der letzten Colonne die für die

genannten Zeiten geltenden Mittelwerte der Differenzen aus höchstem und tiefstem Spiegelstande. Sie geben also ein ungefähres Mass der Amplituden der Pendelschwingungen, wenn dieselben auch im allgemeinen für ein solches Zeitintervall, welches durch besonders gut ausgeprägte Schwingungen ausgezeichnet ist, durchaus nicht für jede Schwingung gleich gross sind. (Die mitgeteilten Werte stellen also das Doppelte von dem dar, was der Physiker als Amplitude in den mathematischen Ausdruck für die Schwingung einführen würde.) Die Horizontalstriche begrenzen die Beobachtungen einer, auf je einem Streifen enthaltenen Beobachtungsreihe.

Periodendauer der Hauptschwingung.

Tag	Dauer T in Minuten	Zahl der gemessenen Schwingungen	Mittlere Seespiegel-schwankung
7. Juli	24,79	10	18 mm
8.	25,00	9	10
9.	24,82	18	12
10.	24,79	15	10
10.	25,04	10	10
11.—12.	24,91	44	10
13.	24,61	6	7
14.	24,79	12	6
17.	24,94	37	11
19.	24,97	12	5
2. August	25,06	11	20
3.	24,84	10	14
5.	25,24	4	22
6.	24,96	8	—
8.—9.	25,37	10	—
9.—10.	25,00	50	—
10.—11.	25,38	8	—
13.	25,04	5	14
13.—14.	25,11	43	—
14.—16.	25,15	109	10
18.—19.	24,76	20	6
19.	24,96	14	10
20.—21.	25,04	37	22

Tag	Dauer T in Minuten	Zahl der gemessenen Schwingungen	Mittlere Seespiegel-schwankung
21.—23. Aug.	24,90	68	50—30 mm
24.—26.	25,09	100	40
26.	25,32	13	20
27.	25,19	10	50
27.—28.	25,19	57	23
2. September	25,22	20	16
4.—6.	25,04	98	30
6.	25,09	13	28
6.—7.	25,06	53	18
7.	24,88	12	16

Man erkennt, dass die Periodendauer T zwar sehr nahe bei dem Werte von 25 Minuten liegt, dass sich aber zu den verschiedenen Zeiten kleinere Abweichungen in dem einen oder anderen Sinne bemerklich machen. Eine Beziehung zur Amplitude tritt nicht hervor: es gehören die längeren Periodendauern durchaus nicht zu den grösseren Amplituden und umgekehrt. Wir constatieren daher Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude. In dieser Beziehung verhält sich also die schwingende Wassermasse wie ein mathematisches oder physisches Pendel, bei dem bei kleinen Excursionen die Dauer einer Schwingung ebenfalls unabhängig von der Grösse der Excursion aus der Gleichgewichtslage ist: Isochronismus der Pendelschwingungen.

Dagegen bemerkt man ganz deutlich einen Gang in den Zahlen für T in so fern, als die Schwingungsdauer in den späteren Beobachtungsreihen grösser wurde als sie aus den ersten sich ergeben hatte. Um dies noch deutlicher erkennen zu lassen, stelle ich hier die Mittelwerte von T aus den vier Reihen zugleich mit der Anzahl der abgezählten Einzelschwingungen, aus denen dieselben berechnet wurden, gesondert untereinander.

7.—11. Juli 1900	$T = 24{,}89$	(62)
11.—19. Juli	24,84	(111)
1.—21. August	25,07	(329)
21. August — 10. September	25,10	(444)

Vom Beginne der Beobachtungen bis zum Ende derselben hat sich also die Dauer der Grundschwingung um etwa 0,2 Minuten oder 12 Secunden verlängert, d. h. um ca. $a = 0{,}08$ der Periodendauer selbst, wenn wir als mittlere Schwingungsdauer 25 Minuten annehmen. In dieser Zeit hat aber auch ein fortdauerndes Sinken des Wasserspiegels stattgefunden. So war am 21. August der mittlere Spiegel schon um ca. 10 cm unter den anvisierten Punkt (S. 447) gesunken, Mitte September um etwa 30 cm. In qualitativer Beziehung entspricht die Verlängerung von T der Seichesformel S. 444; denn wenn der Seespiegel sinkt, so nimmt h ab und daher bei gleichbleibender Seelänge l die Schwingungsdauer T zu. Doch ist in quantitativer Beziehung diese Verlängerung von T durch die Verminderung von h allein nicht erklärlich,[1]) es müssen noch andere weiter aufzuklärende Faktoren in's Spiel treten.

Als Mittelwert aus allen 946 Einzelmessungen ergiebt sich für die Zeit vom 7. Juli bis 10. September 1900 für den Starnberger See eine Dauer der Hauptschwingung von

$$T = 24{,}98 \text{ Minuten oder 24 Minuten 59 Secunden.}$$

Bei der zur Beobachtungszeit herrschenden Wasserführung verhielt sich also die Wassermasse des Starnberger Sees wie ein grosses, sehr langsam schwingendes Pendel von 1499 Secunden Schwingungsdauer; dies entspricht einer reducierten Pendellänge von 559 km; d. h. ein einfaches Fadenpendel, dessen Länge die Seelänge um das 28 fache übertrifft, würde über dem Starnberger See aufgehängt ebenso langsam schwingen wie die in diesem enthaltene Wassermasse selbst. Da wir es mit einer stehenden

---

[1]) Da $a = \Delta T / T = -\Delta h / 2h$ ist, so würde, wenn die Aenderung von h allein massgebend wäre, einem $a = 0{,}08$ eine Abnahme der mittleren Tiefe um 12 m entsprechen, was augenscheinlich zu viel ist.

Pendelschwingung zu thun haben, wird die Seelänge gerade von einer halben Wellenlänge ausgefüllt. Die Länge der studierten Welle beträgt also ca. 39 km.

Diese Grundschwingung fehlt fast nie. Oft ist sie in ununterbrochenem Zuge mehrere Tage lang herrschend. So reihen sich die ihr entsprechenden Maxima und Minima der Spiegelhöhe vom 14. August Abends 7 Uhr an bis zum 16. August Nachmittags 4 Uhr, also während beinahe 48 Stunden ohne Unterbrechung aneinander, über 100 einzelne Perioden voll zum Ausdruck bringend! Selbst wenn der Seespiegel ganz ruhig liegt und die Limnimetercurve fast eine gerade Linie darstellt, ist die Hauptperiode durch kleine Zacken angedeutet. Wenn sie allein und ungestört ausgebildet ist (vergl. weiter unten), so ist der Curvenverlauf ein rein sinoidaler, d. h. es tritt nicht etwa ein langsames Ansteigen und dann schnelleres Fallen oder umgekehrt ein, sondern die Schwingung ist rein harmonisch, wie man sich in der Akustik ausdrücken würde, die entsprechende Seichescurve vollkommen symmetrisch nach beiden Seiten hin. —

Ausser dieser langsamen Grundschwingung tritt aber sehr häufig noch

II) eine Oberschwingung von kürzerer Periode auf, welche als eine Teil- oder Partialschwingung aufgefasst werden muss. Die Amplitude dieser Schwingung ist meist kleiner als die der Hauptschwingung. Oft ist sie ganz allein ausgebildet und dann beherrscht sie augenscheinlich das ganze Seebecken. Auch hier handelt es sich nicht um ein gelegentliches Auftreten einzelner Zacken; ist diese Schwingungsform einmal zur Herrschaft gelangt, so kann sie viele Stunden lang ununterbrochen andauern; so wurde sie am 23. August von früh 6 Uhr bis abends 10 Uhr, also während 16 Stunden ununterbrochen vom Schwimmerstift registriert. Die genauere Periodendauer ersieht man aus der beifolgenden Tabelle:

Periodendauer der Oberschwingung.

Tag	Dauer in Minuten	Zahl der gemessenen Schwingungen	Mittlere Seespiegelschwankung
12. Juli	15,73	30	3 mm
8. August	15,42	15	—
14.	15,87	60	—
20.	15,90	10	3
20.	15,97	6	3
21.	15,93	8	4
23. August	15,83	49	20
3. September	15,91	21	24
9.	15,60	20	8

Eine Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude ist auch bei dieser Schwingung nicht vorhanden. Eine Zunahme der Schwingungsdauer mit der Zeit ist nicht bemerklich. Als Mittelwert aus den 219 Einzelmessungen, welche zur Ableitung der Periodendauer verwendet wurden, ergiebt sich

$T_1 = 15{,}78$ Minuten oder 15 Minuten 47 Sekunden.

Die Dauer ist also wesentlich kürzer, die Schwingung selbst daher höher in der Sprache der Tonlehre als die Grundschwingung, und zwar verhalten sich die Schwingungszahlen wie 1,00 zu 1,58. Das musikalisch harmonische Verhältnis von Grundton zu Quinte (C : G) weist ein Schwingungszahlenverhältnis von 2 : 3 oder 1,00 : 1,50, das des Grundtones zur Sext (C : A) von 3 : 5 oder 1,00 : 1,67 auf. Unsere Oberschwingung liegt also zwischen den Intervallen der Quinte und Sext und würde etwa dem musikalischen schon weniger einfachen Intervall C : Gis oder C : As der übermässigen Quinte oder kleinen Sext entsprechen. Wir sehen, dass Grundschwingung und erste Oberschwingung des Starnberger Sees nicht in einem einfachen, musikalisch reinen Intervallenverhältnisse zu einander stehen,

die Oberschwingung ist etwas höher als die Quinte, etwas niedriger als die Sext.

Wir können nicht daran zweifeln, dass wir die binodale Schwingung S. 437 des Sees vor uns haben. Dementsprechend würde sich der Seespiegel gleichzeitig am Nord- und am Südende heben, in der Mitte senken und umgekehrt, wenn diese Oberschwingung den See beherrscht. Dazwischen würden wir zwei Knotenlinien haben. Der Schwingungsdauer von 947 Secunden entspricht eine reducierte Pendellänge von 223 km und eine Wellenlänge von 25 km; 12,4 km würde der Abstand der beiden Knotenlinien von einander betragen und wir können daher dieselben einerseits etwa zwischen Possenhofen und Leoni, andererseits zwischen der nach Osten vorspringenden Halbinsel südlich von Bernried und Schallenkamm auf der gegenüberliegenden Uferhöhe annehmen. Wir dürften nicht irren, wenn wir annehmen, dass die S. 443 erwähnte unter dem Seespiegel bei Unter-Zaismering querüber laufende Bodenschwelle, welche das Seebecken gewissermassen in zwei ungleich lange Rinnen unterteilt, die Ursache für die erwähnte Schwingungsunterteilung des ganzen Sees bilde. Der See wird dadurch wie eine schwingende Saite durch einen Steg unterteilt und wir hätten in der Oberschwingung von der Periode $T_1 = 15{,}8$, welches ungefähr gleich $^2/_3\, T$ [$T = 25{,}0$: $^2/_3\, T = 16{,}7$ Minuten], demnach die Eigenschwingung des durch den unterseeischen Rücken abgegrenzten nördlichen Beckens vor uns. —

Im Allgemeinen sind nun immer beide Schwingungen gleichzeitig ausgebildet und dadurch entsteht mitunter ein ziemlich verwickeltes Curvenbild. Dasselbe wird indessen leicht entziffert, wenn man die Perioden der beiden zusammentretenden Schwingungssysteme bereits kennt und auf sie die Gesetze der physikalischen Interferenz periodischer Bewegungen in Anwendung bringt. Dabei ergiebt sich zunächst Folgendes: Auch bei den überaus langsamen Schwingungen, denen Wellenlängen von vielen Kilometern entsprechen, gilt das in der Physik der Erklärung der Interferenzerscheinungen zu Grunde gelegte Princip der Coexistenz der Schwingungsbe-

wegungen: Bei dem Zusammentreten behalten die Einzelschwingungen ihre Perioden bei; die resultierende Seespiegelschwankung ist einfach gleich der Summe der von jeder einzelnen Schwingung herbeigeführten Spiegelverlegung. Gewöhnlich ist zunächst die Grundschwingung ausgebildet; das Hinzutreten der Oberschwingung stört dann die Dauer der Grundschwingung nicht. Aber freilich werden nun je nach der Phasendifferenz in der Ausbildung, mit der die beiden harmonischen Schwingungen zusammentreffen und je nach dem Amplitudenverhältnisse beider die mannichfachsten Abänderungen der Hauptcurve resultieren. Sind die Amplituden der Oberschwingung gegenüber denjenigen der Hauptschwingung klein, so bemerkt man das Auftreten der ersteren zunächst nur an beginnenden Asymmetrien der Hauptcurve; die Maxima folgen sich nicht mehr äquidistant, in regelmässiger Folge zeigen sie sich in ihrer Höhe vermindert und an anderen Stellen entsprechend überhöht. Wird die Oberschwingung kräftiger, so flacht sie die Maxima der Hauptcurve ab dort wo Maxima der ersten Curve mit Minimis der anderen zusammentreffen; dort wo Maxima auf Maxima treffen ist die resultierende Curvenhöhe die Summe beider Amplituden. Dazwischen erscheinen die Curvenzacken einseitig ausgebaucht, ähnlich wie im Profilbilde einer Bergkette, wenn einem Hauptgipfel ein Nebengipfel vorgelagert ist. Es sind dies die „dikroten" Schwingungen Forels vgl. S. 437. Aber immer vermag man in der grossen Mannigfaltigkeit von Curvenbildern mit Hilfe des Interferenzprincipes die beiden einfachen Schwingungen, deren Betrachtung wir vorangestellt haben, wieder zuerkennen. Man kann das Verhältnis ihrer Schwingungsdauern natürlich auch aus dem Interferenzbilde, also aus Aufzeichnungen, bei denen sie beide beteiligt sind, ableiten. Da dieses Verhältnis aber, wie wir sahen, kein einfaches harmonisches ist, so ist dies nicht so leicht. Die Aufgabe ist streng nur durchführbar durch eine sog. harmonische Analyse, welche den periodischen Vorgang dann durch eine Fourier'sche Reihe, die nach Sinus und Cosinus der ganzzahligen Vielfachen eines bestimmten

Bogens fortschreitet, darstellen lässt. Diese Entwickelung liefert auch die Phasenverschiebung und das Amplitudenverhältnis der mit einander interferierenden periodischen Bewegungen und lässt durch die höheren Glieder derselben auch erkennen, ob eventuell noch höhere Oberschwingungen bei dem Processe beteiligt sind. Das mathematische Seminar der kgl. technischen Hochschule besitzt einen sog. mechanischen Analysator neuester Construction, der die angedeutete nicht ganz unerhebliche rechnerische Arbeit durch einen rein mechanischen Integrations-Process zu ersetzen gestattet. Mit demselben sollen demnächst Analysen besonders charakteristischer Curvenstücke vorgenommen werden. —

Zum Schlusse noch einige Bemerkungen über meteorologische Einflüsse auf die Seicheserregungen: Um eventuelle Beziehungen zu plötzlichen Luftdruckänderungen genauer verfolgen zu können, wurde in dem Badehaus, auf dessen Aussengallerie das Limnimeter montiert war, ein selbstregistrierendes Aneroid-Barometer, das Herr Baron von und zu Aufses gütigst zur Verfügung stellte, in Betrieb gesetzt. Wenn dasselbe auch keine sehr grosse Empfindlichkeit hatte, so zeigte es doch z. B. die vor einem Gewitter eintretenden, so überaus charakteristischen, als sog. „Gewitternasen" bekannten Luftdruckänderungen deutlich an.

Dadurch liess sich nun konstatieren, dass, wenn der See fast vollkommen ruhig war, plötzlich eintretende Luftdruckänderungen das Eintreten kräftiger Seichesbewegungen sehr häufig im Gefolge hatten. Ein ganz besonders charakteristischer derartiger Fall ereignete sich am 21. August. Am 21. und 22. zeigen die Wetterkarten ein engbegrenztes, lokales Luftdruckmaximum über der Münchener Gegend. Der Tag war schwül und klar. Plötzlich, gegen Abend zeigt das Registrierbarometer ein allmähliches Herabgehen, dann ein schnelleres Ansteigen des Druckes an, das von einigen kleinen Zacken gefolgt wird, verzeichnet also eine typische Gewitternase. Die Limnimeterkurve war noch am Nachmittag des 21. August sehr ruhig: die Hauptschwingung war schwach angedeutet. Plötzlich 10 Uhr

abends fängt der Seespiegel an um 24 mm zu sinken, ausserordentliche Spiegelschwankungen um das mittlere Niveau setzen ein, welche schon um $10^1/_2$ Uhr Amplituden von über 80 mm erreichen. In der Nacht entlud sich ein heftiges Gewitter. Die Seiches dauerten noch den nächsten ganzen Tag an und klangen erst am 23. aus. Während anfangs nur die Hauptschwingung vorhanden war, trat am 22. früh 3^h die Oberschwingung hinzu. Es folgte eine lange Reihe deutlich markierter Interferenzen, bis am 23. früh 6 Uhr die Oberschwingung die Oberhand gewann, die dann allein noch bis zum Abend dieses Tages den See beherrschte. —

Die Oberschwingung klingt schneller ab als die Grundschwingung. Die Dämpfungen, welche die Schwingungen erfahren, müssen mit den Reibungskräften, die sich den Pendelbewegungen entgegen stellen, auf's innigste zusammenhängen. Diese wieder sind bedingt ausser durch die Zähigkeit des sich bewegenden Mediums von dem Untergrunde, der Gestalt des Seebeckens und seiner Gesamtfläche. Bei einer grossen Reihe von Schwingungen, welche augenscheinlich einem einmaligen Bewegungsimpulse ihr Entstehen verdanken, ist auf den erhaltenen Curvenstreifen eine deutliche und sehr regelmässige Abnahme der aufeinanderfolgenden Amplituden zu erkennen, so dass sich hier ein Dämpfungsverhältnis und damit ein logarithmisches Decrement wie bei einer gedämpft schwingenden Magnetnadel für die Seichesschwingungen bestimmen liesse.

Hierdurch würde eine neue, vielleicht nicht unwichtige charakteristische Constante für eine in einem Seebecken angesammelte Wassermasse gewonnen. Indessen erachte ich es noch für verfrüht auf die Art und die Ursachen der Erregungen, welche die Seichesbewegungen im vorliegenden Falle auslösen, sowie die Gesetze, nach denen dieselben wieder abklingen und auf die Faktoren, welche ihre allmähliche Dämpfung bedingen, schon jetzt näher einzugehen.

Dagegen möchte ich als bereits festgestellte Ergebnisse dieser Untersuchung die folgenden bezeichnen:

1) Das Seichesphänomen ist am Starnberger See in unzweifelhafter Weise und in durchaus typischer Form ausgeprägt.

2) Die Schwingungen, welche die gesamte Wassermasse fast ununterbrochen ausführt, sind reine d. h. einem Sinusgesetze folgende, harmonische Pendelschwingungen und zwar stehende Schwingungen im Sinne der Forel'schen Theorie.

3) Vorhanden ist zunächst eine Haupt- oder Grundschwingung von rund 25 Minuten voller Periodendauer (Hin- und Hergang). Es ist die Längsschwingung des ganzen Sees; sie ist einknotig, uninodal und erzeugt immer entgegengesetzte Schwingungsphasen an den beiden Seeenden. Die Knotenlinie dürfte etwa bei Tutzing quer über den See laufen.

4) Die aus dem Längsprofil mit Zugrundelegung der Merian'schen Formel berechnete Schwingungsdauer (24 Minuten) stimmt so genau mit der wirklich gefundenen überein, dass die Forel'sche Theorie durch die vorstehende Untersuchung eine neue Bestätigung erhält.

5) Das „Rinnen" des Starnberger Sees, welches sich besonders durch eine auffallend starke Unterströmung in beiden Richtungen geltend macht, scheint mit dem grossen Deplacement erheblicher Wassermassen bei der Seichesbewegung im engsten Zusammenhange zu stehen.

6) Ausser der Grundschwingung ist noch eine Oberschwingung von etwas weniger als 2/3 Schwingungsdauer der Grundschwingung vorhanden; die genaue Periodendauer beträgt 15³/₄ Minuten. Das Intervall beider Schwingungen ist demnach kein einfaches harmonisches, sondern liegt zwischen Quinte und Sext.

7) Bei beiden Schwingungen ist die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude; das Gesetz des Isochronismus der Pendelschwingungen gilt also auch hier.

8) Beide Schwingungssysteme machen sich meist gleichzeitig geltend, freilich mit sehr wechselnden Amplitudenverhältnissen und den mannigfachsten Phasenverschiebungen. Es

entstehen „dikrote Schwingungen" der verschiedensten Art. Sie sind aber immer in ihre beiden Componenten auflösbar und zeigen dann, dass das Princip der Coexistenz elementarer Schwingungsbewegungen auch noch bei der Interferenz dieser 39 bezw. 25 km grossen Wellenlängen gilt.

9) Von meteorologischen Einflüssen, welche unmittelbar kräftige Seichesschwingungen erregen können, sind bisher besonders plötzlich eintretende Luftdruckänderungen (z. B. Gewitternasen) hervorgetreten.

Es wird sowohl in geophysikalischer, wie rein physikalischer, geographischer, geologischer, meteorologischer und vielleicht auch technischer Hinsicht von Wichtigkeit sein, die Seichesforschung an den bayerischen Seen weiter zu führen. Zunächst bietet sich am Starnberger See selbst noch eine Fülle weiterer Fragen. Vor allem wird die genauere Fixierung der Knotenlinien und damit die gesamte Configuration des ganzen Schwingungssystems festzustellen sein, wozu gleichzeitig mit zwei an verschiedenen Punkten des Sees registrierenden Limnimetern gearbeitet werden muss.

Ferner sind die Beziehungen der absoluten Spiegelstände selbst, also der wirklichen Wasserführung zu den Seiches näher zu studieren. Weiter wird ein Studium darüber, wie sich verschiedene meteorologische Erscheinungen in der Erregung der Wassermasse zu Pendelschwingungen wiederspiegeln, sehr fruchtbar sein. Dass es in hygienischer Hinsicht für das organische Leben im und am See von grösster Wichtigkeit ist, dass die gesamte Wassermasse nicht stagniert, sondern bis zum Grunde hin in fortwährender lebendiger Bewegung erhalten wird, ist ein neuer Gesichtspunkt, welcher die Seichesforschung von ganz anderer Seite her empfiehlt. Beobachtungen über die im See auftretenden, oft sehr heftigen Strömungen und Unterströmungen werden, wenn sie mit den regelmässig erfolgenden Aufzeichnungen des Limnimeters verglichen werden, über die

Mecha ieser Bewegungen Neues und Interessantes lehren. Endlich ka n es kaum einem Zweifel unterliegen, dass sich die S wegungen bis zu einem gewissen Grade in den ndw ständen der umliegenden Ortschaften, namentlich en Enden des Sees, sowie in den Abflussmengen wiederspiegeln werden. Sollte dies der Fall sein, Aufzeichnungen des Apparates auch ein unmittel- -technisches Interesse beizumessen sein.

Ueber die Convergenz periodischer Kettenbrüche.

Von Alfred Pringsheim.

(Eingelaufen 1. Dezember.)

Allgemeine Kriterien zur Beurtheilung der Convergenz und Divergenz periodischer Kettenbrüche mit beliebigen complexen Gliedern sind zuerst von Herrn O. Stolz angegeben worden.[1]) Später hat Herr G. Landsberg[2]) den Fall, dass sämmtliche Theilzähler und Theilnenner reell und rational sind, mit Hülfe einer besonders einfachen und sinnreichen Methode behandelt, welche zugleich auch den Zusammenhang zwischen dem betreffenden Kettenbruche und einem anderen, durch geeignete Inversion der Periode daraus hervorgehenden unmittelbar erkennen lässt und auf diese Weise die Verallgemeinerung eines bekannten, von Galois[3]) zunächst nur für sog. regelmässige Kettenbrüche bewiesenen Satzes liefert. Da Herr Landsberg seinen Untersuchungen eine etwas andere und zwar, wie die Durchführung der Rechnung lehrt, weniger zweckmässige Kettenbruchform zu Grunde legt,[4]) als Herr Stolz, so erscheint die Vergleichung der beider-

---

[1]) Innsbrucker Ber. 17. Febr. 1886. Die Beweise der daselbst mitgetheilten Sätze findet man in den Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II (1886), p. 299 ff. Ein dort noch nicht angeführtes Divergenz-Kriterium giebt Stolz: Innsbr. Ber. 1887/88, p. 1. 2.

[2]) Journ. für Math. Bd. 109 (1892), p. 231—237. Vgl. auch: E. Netto, ebendas. Bd. 110 (1892), p. 349.

[3]) Gergonne Annales, T. 19 (1828—1829), p. 294.

[4]) S. weiter unten p. 465, Fussnote 2).

seitigen Endresultate einigermaassen erschwert. Ueberträgt man aber die Landsberg'sche Methode, die überdies in einigen Einzelheiten eine noch etwas elementarere und durchsichtigere Darstellung gestattet, auf Kettenbrüche mit beliebigen complexen Gliedern in der von Herrn Stolz benützten Form, so kann man in der That mit den denkbar einfachsten Hülfsmitteln zu einer äusserst einfachen und übersichtlichen Formulirung der Stolz'schen Convergenz- und Divergenz-Kriterien gelangen. Zugleich ergiebt sich dann auch die oben erwähnte Verallgemeinerung des Galois'schen Satzes für Kettenbrüche mit ganz beliebigen Theilzählern und Theilnennern.

Die Durchführung dieses Gedankens bildet den Inhalt der folgenden Mittheilung.

---

§ 1. Nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Convergenz eines rein periodischen Kettenbruches.

Ich bezeichne den Kettenbruch:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

durch eins der Symbole:

$$\left(b_0; \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{oder:} \quad \left[b_0; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n},$$

seinen auf Grund der bekannten Beziehungen:

$$(1) \begin{cases} A_0 = b_0 & B_0 = 1 \\ A_1 = b_1 b_0 + a_1 & B_1 = b_1 \\ A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} & B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \quad (\nu \geqq 2) \end{cases}$$

formal gebildeten ν^{ten} Näherungsbruch mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ oder K_ν und setze:

(2) $$\left(b_0; \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_\nu}{b_\nu}\right) = \frac{A_\nu}{B_\nu} \equiv K_\nu,$$

gleichgültig, ob der Kettenbruch als solcher einen bestimmten Sinn besitzt,[1]) sofern nur K_ν selbst eine bestimmte Zahl vorstellt, d. h. B_ν von Null verschieden ist.

Im Falle $b_0 = 0$ schreibe ich statt:

$$\left(0; \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) \text{ bezw. } \left[0; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n}$$

kürzer:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) \text{ bezw. } \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n}.$$

Bedeuten dann a_ν, b_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) irgendwelche complexe Zahlen (mit Einschluss der reellen und für die b_ν auch der Null, während durchweg: $|a_\nu| > 0$), welche den Bedingungen genügen:

(3) $$\begin{cases} a_{\lambda p+\mu} = a_\mu \\ b_{\lambda p+\mu} = b_\mu \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.} \\ \mu = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix},$$

so soll der unendliche Kettenbruch:

(4) $$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty}$$

als ein rein periodischer[2]) und zwar mit der p-gliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}\right)$$

---

[1]) Vgl. Stolz, Allg. Arithm. II, p. 269.

[2]) Darnach gilt der Kettenbruch:

$$\left[b_n; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty,$$

anders geschrieben:

$$b_n + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$$

schon als unrein periodisch. Es ist dies diejenige Form, welche Herr Landsberg zum Ausgangspunkte seiner Untersuchungen gewählt hat.

bezeichnet werden, wobei noch angenommen wird, dass p die kleinste Zahl bedeutet, für welche die beiden Beziehungen (3) erfüllt sind.

Wenn nun der Kettenbruch (4) überhaupt convergirt, so muss sein Werth x der Relation genügen:

$$(5) \qquad x = \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p + x}\right) = \frac{A_p + A_{p-1}\,x}{B_p + B_{p-1}\,x},$$

sodass also x eine bestimmte Wurzel der quadratischen Gleichung sein muss:

$$(\mathrm{I}) \qquad B_{p-1}\,x^2 + (B_p - A_{p-1})\,x - A_p = 0,$$

sofern nicht etwa gerade $B_{p-1} = 0$ ist. In diesem Specialfalle reducirt sich diese Gleichung auf eine lineare, und sie wird überdies gänzlich hinfällig, wenn auch noch $B_p - A_{p-1} = 0$ ist. Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall:

$$\mathrm{I.} \quad |B_{p-1}| > 0.$$

Die beiden Wurzeln x der Gleichung (I) werden dann durch den Ausdruck dargestellt:

$$(6) \qquad x = \frac{1}{2\,B_{p-1}}\,\{A_{p-1} - B_p \pm \sqrt{D}\},$$

wo D die Discriminante von (I) bedeutet, also:

$$(7\mathrm{a}) \qquad \begin{aligned} D &= (A_{p-1} - B_p)^2 + 4\,A_p\,B_{p-1} \\ &= (A_{p-1} + B_p)^2 + 4\,(A_p\,B_{p-1} - A_{p-1}\,B_p) \end{aligned}$$

oder auch:

$$(7\mathrm{b}) \qquad D = S^2 - 4\,P,$$

wenn man beachtet, dass:

$$(8) \qquad A_p\,B_{p-1} - A_{p-1}\,B_p = (-1)^{p-1} \cdot a_1\,a_2 \ldots a_p = -\prod_{\nu=1}^{p}(-a_\nu)$$

und sodann die Abkürzungen einführt:

$$(9) \qquad A_{p-1} + B_p \equiv S, \quad \prod_{\nu=1}^{p}(-a_\nu) \equiv P.$$

Um die Convergenz oder Divergenz von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, d. h. schliesslich die Beziehung von $\overline{\lim_{\nu=\infty}} K_\nu$ zu einer der beiden Zahlen x festzustellen, untersuchen wir allgemein einen Ausdruck von der Form $H - x$, wo:

$$(10) \qquad H \equiv \left(\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_p}{b_p + h}\right) = \frac{A_p + A_{p-1} h}{B_p + B_{p-1} h},$$

also zunächst:

$$H - x = \frac{A_p - B_p x + (A_{p-1} - B_{p-1} x) \cdot h}{B_p + B_{p-1} h}.$$

Da aber aus Gl. (I) folgt:

$$(11) \qquad A_p - B_p x = -(A_{p-1} - B_{p-1} x) \cdot x,$$

so hat man:

$$(12) \qquad H - x = \frac{A_{p-1} - B_{p-1} x}{B_p + B_{p-1} h} \cdot (h - x).$$

Für die weitere Untersuchung ist nun zu unterscheiden, ob Gl. (I) zwei verschiedene Wurzeln besitzt oder nicht, d. h. ob $|D| > 0$ oder $D = 0$.

I^a. $|D| > 0$.

Werden alsdann die beiden verschiedenen Wurzeln von Gl. (I) mit x_1, x_2 bezeichnet, so kann man dieselben nach Gl. (6) definiren durch die Beziehungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} 2 B_{p-1} x_1 = A_{p-1} - B_p + \varepsilon \cdot \sqrt{D} \\ 2 B_{p-1} x_2 = A_{p-1} - B_p - \varepsilon \cdot \sqrt{D} \end{cases},$$

wo $\sqrt{D}$ den Hauptwerth der betreffenden Quadratwurzel bedeutet und $\varepsilon = +1$ oder -1 in der Weise fixirt werden soll, dass der Kettenbruch, falls er überhaupt convergirt, gerade den Grenzwerth x_1 besitzt. Setzt man dann in Gl. (12) $x = x_1$ bezw. $x = x_2$, so folgt durch Division der resultirenden Gleichungen:

$$(14)\qquad \frac{H - x_1}{H - x_2} = M \cdot \frac{h - x_1}{h - x_2}$$

wo:

$$(15)\qquad M = \frac{A_{p-1} - B_{p-1}\, x_1}{A_{p-1} - B_{p-1}\, x_2} = \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}\ ^{1)}.$$

Man hat nun für $\nu > p$ in Folge der Periodicität der a_ν, b_ν:

$$(16)\qquad K_\nu = \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p + K_{\nu - p}}\right),$$

d. h. es wird: $H = K_\nu$ für: $h = K_{\nu - p}$ und daher nach Gl. (14):

$$(17)\qquad \frac{K_\nu - x_1}{K_\nu - x_2} = M \cdot \frac{K_{\nu-p} - x_1}{K_{\nu-p} - x_2}.$$

Substituirt man hier der Reihe nach $\nu = p + \mu,\ 2p + \mu, \ldots \lambda p + \mu$ (wo μ eine beliebige Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots p$), so folgt durch Multiplication der resultirenden Beziehungen:

$$(18)\qquad \frac{K_{\lambda p + \mu} - x_1}{K_{\lambda p + \mu} - x_2} = M^\lambda \cdot \frac{K_\mu - x_1}{K_\mu - x_2} = M^\lambda \cdot \frac{A_\mu - B_\mu\, x_1}{A_\mu - B_\mu\, x_2}$$

d. h.

$$(19)\qquad K_{\lambda p + \mu} = \frac{x_1 (A_\mu - B_\mu\, x_2) - M^\lambda \cdot x_2 (A_\mu - B_\mu\, x_1)}{(A_\mu - B_\mu\, x_2) - M^\lambda \cdot (A_\mu - B_\mu\, x_1)}$$

$$= x_1 + M^\lambda \cdot (x_1 - x_2) \cdot \frac{A_\mu - B_\mu\, x_1}{(A_\mu - B_\mu x_2) - M^\lambda \cdot (A_\mu - B_\mu x_1)}.$$

Damit also $\lim\limits_{\lambda = \infty} K_{\lambda p + \mu} = x_1$ werde (für: $\mu = 1, 2, \ldots p$) ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(20)\qquad \lim_{\lambda = \infty} M^\lambda \cdot (x_1 - x_2) \cdot \frac{A_\mu - B_\mu\, x_1}{(A_\mu - B_\mu\, x_2) - M^\lambda (A_\mu - B_\mu\, x_1)} = 0.$$

Da aber $(x_1 - x_2)$ von Null verschieden und auch $(A_\mu - B_\mu\, x_1)$ zum mindesten nicht für jedes $\mu = 1, 2, \ldots p$

---

[1]) Wegen:

$$B_{p-1}(x_1 + x_2) = A_{p-1} + B_p$$

kann man M auch in die Form setzen:

$$M = \frac{B_p + B_{p-1}\, x_2}{B_p + B_{p-1}\, x_1}.$$

verschwinden kann[1]), so findet die Beziehung allemal dann und nur dann statt, wenn:

(a) $$\lim_{\lambda=\infty} M^\lambda = 0 \quad \text{d. h.} \quad |M| < 1,$$

und ausserdem der Nenner des Ausdruckes (20) für $\lambda = \infty$ nicht verschwindet, d. h. wenn:

(b) $$|A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots p.$$

Die Bedingung (a) verlangt aber genau folgendes: es muss $\varepsilon = \pm 1$ so fixirt werden, dass (s. Gl. (15)):

(21) $$\left| \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}} \right| < 1,$$

und dies kann offenbar allemal und zwar bei vollkommen eindeutiger Bestimmbarkeit von ε erzielt werden, sofern nicht gerade:

(22) $$|M| \equiv \left| \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}} \right| = 1,$$

in welchem Falle dann ε willkürlich $= \pm 1$ angenommen werden kann. Setzt man nun etwa:

(23) $$\frac{S}{\sqrt{D}} = \alpha + \beta i,$$

so geht die Bedingung (22) in die folgende über:

$$\left| \frac{\alpha - \varepsilon + \beta i}{\alpha + \varepsilon - \beta i} \right| = 1,$$

d. h. $$(\alpha - \varepsilon)^2 + \beta^2 = (\alpha + \varepsilon)^2 + \beta^2,$$

also schliesslich:

$$\alpha = 0$$

oder, wenn man allgemein den reellen Theil einer complexen Zahl z mit $\Re(z)$ bezeichnet:

(24) $$\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) = 0.$$

[1]) Dies gilt offenbar auch im Falle $p = 1$.

Hiernach ist also die Bedingung (a) bei geeigneter Normirung von ε stets erfüllbar, wenn:

(A) $$\left| \Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) \right| > 0.$$

Dass im entgegengesetzten Falle, also für $|M| = 1$ wirklich Divergenz stattfindet, erkennt man unmittelbar aus Gl. (19), wenn man berücksichtigt, dass für $|M| = 1$ — da die Möglichkeit $M = 1$ hier definitiv ausgeschlossen erscheint[1]) — stets $M = -1$ oder M eine nicht-reelle Zahl mit dem absoluten Betrage 1 sein muss, und dass daher M^λ für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ eine unbegrenzte Folge periodisch wiederkehrender oder durchweg von einander verschiedener Werthe annimmt (letzteres, wenn M keine Einheitswurzel).

Im übrigen lässt sich die Divergenz-Bedingung (21) noch in folgender Weise umformen. Da dieselbe genau soviel

---

[1]) Denn aus $M = 1$ würde folgen $D = 0$, was unter den weiterhin zu behandelnden Fall I[b] gehört.

Ist $M = -1$, d. h. $S = 0$, so folgt aus Gl. (19) für gerade λ:

$$\lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p + \mu} = K_{\lambda p + \mu} = K_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots p),$$

dagegen für ungerade λ:

$$\lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p + \mu} = K_{\lambda p + \mu} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot K_\mu - 2\, x_1 x_2}{2\, K_\mu - (x_1 + x_2)} \text{ d. h. } = K_{p+\mu}.$$

Da nämlich allgemein:

$$x_1 x_2 = -\frac{A_p}{B_{p-1}}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

und, wegen $S = 0$, d. h. $A_{p-1} = -B_p$, speciell sich ergiebt:

$$x_1 + x_2 = \frac{2\, A_{p-1}}{B_{p-1}} = -\frac{2\, B_p}{B_{p-1}}$$

so findet man in der That:

$$\frac{(x_1 + x_2) \cdot K_\mu - 2\, x_1 x_2}{2\, K_\mu - (x_1 + x_2)} = \frac{A_{p-1}\, K_\mu + A_p}{B_{p-1}\, K_\mu + B_p} = K_{p+\mu}.$$

besagt, dass $\frac{S}{\sqrt{D}}$ rein imaginär oder Null, also $\frac{S^2}{D}$ wesentlich negativ oder Null, so kann man sie zunächst durch die folgende ersetzen:

$$\frac{S^2}{D} = -\varrho \quad (0 < \varrho < +\infty)$$

oder, wegen: $D = S^2 - 4P$, auch:

$$S^2 = \frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot 4P.$$

Da hier $\frac{\varrho}{1+\varrho} = \vartheta$ für $0 \leqq \varrho < \infty$ jeden Werth des Intervalles $0 < \vartheta < 1$ annimmt, vice versa — so gewinnt man schliesslich statt der Bedingung (24) die folgende:

(24ᵃ) $$S^2 = 4\vartheta \cdot P \quad (0 \leqq \vartheta < 1),$$

anders geschrieben:

$$D \equiv S^2 - 4P = -4(1-\vartheta) \cdot P$$

und, wenn man noch $1 - \vartheta = \eta$ setzt:

(24ᵇ) $$D = -4\eta \cdot P \quad (0 < \eta \leqq 1).$$

In Bezug auf die Convergenz-Bedingung (b) ist noch zu bemerken, dass dieselbe für $\mu = p - 1$ und $\mu = p$ allemal eo ipso erfüllt ist. Da nämlich (nach Gl. (11) für $x = x_2$):

(25) $$A_p - B_p x_2 = -(A_{p-1} - B_{p-1} x_2) \cdot x_2,$$

so würde zunächst aus:

$$A_{p-1} - B_{p-1} x_2 = 0$$

jedesmal folgen, dass auch:

$$A_p - B_p x_2 = 0$$

und — sofern nur $|x_2| > 0$ angenommen wird — auch umgekehrt. Alsdann hätte man aber:

$$\frac{A_{p-1}}{B_{p-1}} = \frac{A_p}{B_p} \text{ (nämlich } = x_2),$$

was in Folge der Voraussetzung $|a_\nu| > 0$ unmöglich
Schliesst man also den Fall $x_2 = 0$ vorläufig au
genügt die Existenz der Bedingung (b) schon in dem folge
Umfange:

(B) $$|A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots (p-2),$$

sodass dieselbe hiernach überhaupt erst für $p \geqq 3$ in Be
kommt.

Angenommen nun, man habe (falls $p \geqq 3$) für ein
mehrere specielle $\mu = m$:

(26) $$A_m - B_m x_2 = 0 \quad \text{d. h. } K_m = x_2,$$

so folgt aus Gl. (19), dass allgemein:

(27) $$K_{\lambda p + m} = x_2, \quad \text{also auch: } \lim_{\lambda = \infty} K_{\lambda p + m} = x_2,$$

während für alle von m verschiedenen μ die Beziehung verb

(28) $$\lim_{\mu = \infty} K_{\lambda p + \mu} = x_1.$$

Hat also irgend einer der ersten $(p-2)$ Näherungsb
den Wert x_2, so gilt das gleiche von allen denjenige
deren Index um ein Multiplum von p grösser ist, währen
Folge der übrigen nach x_1 convergirt.

Was den oben zunächst ausgeschlossenen Fall $x_2 =$
trifft, so bemerke man, dass derselbe nach Gl. (25) nur
eintreten kann, wenn:

(29) $$A_p = 0.$$

Nun nimmt aber für $A_p = 0$ die Gleichung (I) di
gende Form an:

(30) $$B_{p-1} x^2 + (B_p - A_{p-1}) x = 0,$$

und zwar hat man (wegen: $A_{p-1} B_p - A_p B_{p-1} = -4$
hierbei stets:

$$|A_{p-1}| > 0, \quad |B_p| > 0$$

und auch:

$$|B_p - A_{p-1}| > 0$$

da die Annahme: $B_p - A_{p-1} = 0$ auf den Fall einer Doppelwurzel $x = 0$ führt, also unter I[b] gehört). Sodann wird:

$$\text{(31)} \qquad \text{entweder: } x = 0, \quad \text{oder: } x = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

und daher

$$\text{(32)} \qquad \begin{aligned} \text{entweder: } A_{p-1} - B_{p-1}\,x &= A_{p-1}, \\ \text{oder: } A_{p-1} - B_{p-1}\,x &= B_p. \end{aligned}$$

Um jetzt die Convergenz-Bedingung (a), nämlich:

$$|M| = \left|\frac{A_{p-1} - B_{p-1}\,x_1}{A_{p-1} - B_{p-1}\,x_2}\right| < 1$$

(deren Herleitung in keiner Weise auf der Voraussetzung $|A_p| > 0$ beruhte, also auch für $A_p = 0$ giltig bleibt) zu erfüllen hat man also zu setzen:

$$\text{(33)} \quad x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad \text{wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1,$$

dagegen:

$$\text{(34)} \quad x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad x_2 = 0, \qquad \text{wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| > 1.$$

Im ersten Falle convergirt also der Kettenbruch nach $x_1 = 0$, wenn noch die Bedingung (B) in dem dort bezeichneten Umfange besteht (da ja hier die Nebenbedingung $|x_2| > 0$ erfüllt ist). Im zweiten Falle ist der Kettenbruch niemals convergent, da ja, wegen $A_p = 0$, $x_2 = 0$, stets:

$$\text{(35)} \qquad A_p - B_p\,x_2 = 0, \text{ d. h. } K_p = x_2 = 0$$

wird, sodass also der durch Gl. (27), (28) charakterisirte Divergenz-Fall eintritt; d. h. man hat:

$$\text{(36)} \quad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p} = x_2 = 0, \text{ im übrigen: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

(sofern nicht gerade μ eine solche Zahl m bedeutet, für die ebenfalls noch $A_m - B_m\,x_2 = 0$ wird).

Hiernach ergiebt sich also das folgende Gesammtresultat:

**I[a]. Ist: $|B_{p-1}| > 0, \quad |D| > 0, \quad |A_p| > 0,$
so sind die Bedingungen (A) und (B) *nothwendig* und *hinreichend* für die *Convergenz* des rein periodischen Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty}$, und zwar hat man:**

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{A_{p-1} - B_p + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2 B_{p-1}},$$

wo $\sqrt{D}$ den Hauptwerth bedeutet und $\varepsilon = \pm 1$ vermöge der Ungleichung (21) eindeutig bestimmt ist.

Im Falle $A_p = 0$ hat man[1]):

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = 0, \text{ wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1,$$

während der Kettenbruch *divergirt*,

$$\text{wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| > 1.$$

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass die Convergenz des Kettenbruches nicht alterirt wird, wenn unter den Näherungsbrüchen K_μ ($\mu = 1, 2, \ldots p$) einer oder mehrere durch das Verschwinden des Nenners B_μ sinnlos werden. Angenommen nämlich, es sei für irgend ein bestimmtes $\mu = n$: $B_n = 0$ (in welchem Falle dann allemal: $|A_n| > 0$), so folgt aus Gl. (19):

$$K_{\lambda p + n} = \frac{x_1 - M^\lambda \cdot x_2}{1 - M^\lambda}, \tag{37}$$

---

1) Beispiel: Für den unendlichen Kettenbruch mit der dreigliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, -\frac{b_2}{1}\right)$$

hat man:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 & B_1 &= b_1 \\ A_2 &= a_1 b_2 & B_2 &= a_2 + b_1 b_2 \\ A_3 &= 0 & B_3 &= a_2. \end{aligned}$$

Der Kettenbruch convergirt also nach Null, wenn $\left|\frac{A_2}{B_3}\right| < 1$, d. h. $|a_2| - |a_1 b_2| > 0$.

sodass alle $K_{\lambda p+n}$ für $\lambda \geq 1$ endlich und bestimmt ausfallen und $\lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+n} = x_1$ wird.

I^b. $D = 0$.

Ist $D = 0$, so hat man:

(38) $(A_{p-1} - B_p)^2 = -4 A_p B_{p-1}$ anders geschrieben: $S^2 = 4P$

(also sicher: $|S| > 0$). Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) fallen dann in die eine zusammen:

$$(39) \qquad x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}} = -\frac{2 A_p}{A_{p-1} - B_p},$$

und es wird daher:

$$(40) \quad \left.\begin{array}{l} A_{p-1} - B_{p-1}\, x = A_{p-1} - \frac{1}{2}(A_{p-1} - B_p) \\ B_{p-1}\, x + B_p \quad = \frac{1}{2}(A_{p-1} - B_p) + B_p \end{array}\right\} = \frac{1}{2} S,$$

sodass Gl. (12) sich zunächst in die Form setzen lässt:

$$(41) \qquad H - x = \frac{B_p + B_{p-1}\, x}{B_p + B_{p-1}\, h} \cdot (h - x).$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten $(h - x)$, so wird:

$$H - h = \frac{B_{p-1}(x - h)}{B_p + B_{p-1}\, h} \cdot (h - x)$$

$$= -\frac{B_{p-1}}{B_p + B_{p-1}\, x} \cdot (H - x) \cdot (h - x) \text{ (nach Gl. (41))}$$

$$(42) \quad = -\frac{2 B_{p-1}}{S} \cdot (H - x) \cdot (h - x) \text{ (nach Gl. (40))}.$$

Hieraus findet man wieder für: $h = K_{\nu-p}$, also: $H = K_\nu$, die Recursionsformel:

$$(43) \qquad K_\nu - K_{\nu-p} = -\frac{2 B_{p-1}}{S}(K_\nu - x)(K_{\nu-p} - x),$$

aus welcher zunächst hervorgeht, dass für: $K_{\nu-p} - x = 0$ auch: $K_\nu - x = 0$ (nämlich: $K_\nu = K_{\nu-p}$) wird und umgekehrt.

Ist also $K_{\nu-p} - x$ von Null verschieden, so gilt das gleiche von $K_\nu - x$, und man kann also in diesem Falle

Gl. (43) durch Division mit $(K_\nu - x)\cdot(K_{\nu-p} - x)$ in die Form setzen:

$$(44) \quad \frac{1}{K_\nu - x} = \frac{1}{K_{\nu-p} - x} + N, \quad \text{wo: } N = \frac{2 B_{p-1}}{S},$$

sodass sich durch Substitution von $\nu = p + \mu, 2p + \mu, \ldots \lambda p + \mu$ und Addition der betreffenden Gleichungen ergiebt:

$$(45) \quad \frac{1}{K_{\lambda p+\mu} - x} = \frac{1}{K_\mu - x} + \lambda N,$$

also schliesslich:

$$(46) \quad K_{\lambda p+\mu} = x + \frac{K_\mu - x}{1 + \lambda N(K_\mu - x)} = x + \frac{A_\mu - B_\mu x}{B_\mu + \lambda N(A_\mu - B_\mu x)}$$

und:

$$(47) \quad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x.$$

Ist andererseits für irgend ein $\mu = m$: $K_m = x$, so folgt auf Grund der oben gemachten Bemerkung, dass auch: $K_{p+m} = x$, sodann: $K_{2p+m} = x$ u. s. f., d. h. man hat in diesem Falle:

$$(48) \quad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+m} = K_{\lambda p+m} = x.$$

Wird ferner für irgend ein $\mu = n$: K_n sinnlos, also $B_n = 0$ (wobei dann sicher $|A_n| > 0$), so folgt aus Gl. (46):

$$(49) \quad K_{\lambda p+n} = x + \frac{1}{\lambda N}, \quad \text{also ebenfalls: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+n} = x.$$

Betrachtet man schliesslich noch den speciellen Fall: $A_p = 0$ (wobei dann: $|A_{p-1}| > 0$, $|B_p| > 0$), so wird hier nach Gl. (38) auch: $A_{p-1} - B_p = 0$ (also: $S = 2 B_p$), d. h. die quadratische Gleichung (I) reducirt sich auf die folgende:

$$(50) \quad B_{p-1} x^2 = 0$$

mit der Doppelwurzel $x = 0$. Die zuvor angestellten Betrachtungen behalten dann durchweg ihre Gültigkeit, man hat lediglich in Gl. (42) — (49) $x = 0$ zu setzen und findet in jedem der betreffenden Fälle:

$$(51) \quad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = 0.$$

Hiernach ergiebt sich also der Satz:

I[b]. Ist: $|B_{p-1}| > 0, \quad D = 0$

so *convergirt* $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty}$ in jedem Falle gegen den Werth:

$$x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}} = - \frac{2 A_p}{A_{p-1} - B_p}$$

und man hat speciell:

$$x = 0, \text{ falls: } A_p = 0.$$

Es bleibt jetzt noch der Fall zu betrachten:

$$\text{II.} \quad B_{p-1} = 0.$$

Aus: $A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = -P$, wo: $|P| > 0$, folgt dann, dass allemal:

$$(52) \qquad |A_{p-1}| > 0, \quad |B_p| > 0.$$

Der Werth x des Kettenbruches, falls derselbe überhaupt convergirt, hätte hier der Relation zu genügen:

$$(53) \qquad x = \frac{A_p + A_{p-1} x}{B_p}$$

sodass an die Stelle der quadratischen Gleichung (I) die folgende lineare tritt:

$$(\text{II}) \qquad (B_p - A_{p-1}) x - A_p = 0.$$

Für die weitere Untersuchung sind nun folgende Unterfälle zu unterscheiden:

$$\text{II}^{\text{a}}. \quad |A_p| > 0, \quad |B_p - A_{p-1}| > 0.$$

Man hat also:

$$(54) \quad x = \frac{A_p}{B_p - A_{p-1}}$$ d. h. endlich und von Null verschieden.

Da sodann, wegen $B_{p-1} = 0$, die Beziehung besteht:

$$(55) \qquad H \equiv \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p + h}\right) = \frac{A_p + A_{p-1} h}{B_p},$$

so folgt:

$$H - x = \frac{A_{p-1}}{B_p} \cdot h + \frac{A_p}{B_p} - \frac{A_p}{B_p - A_{p-1}} = \frac{A_{p-1}}{B_p} \cdot h - \frac{A_{p-1} A_p}{B_p (B_p - A_{p-1})},$$

d. h.

$$H - x = M \cdot (h - x), \quad \text{wo:} \quad M = \frac{A_{p-1}}{B_p} \tag{56}$$

und hieraus, analog wie im Falle I^a^:

$$K_{\lambda p + \mu} - x = M^{\lambda} \cdot (K_{\mu} - x) \quad (\mu = 1, 2, \ldots p). \tag{57}$$

Hieraus erkennt man, dass der Kettenbruch sicher divergirt, wenn $|M| \geq 1$ (wobei der Fall $M = 1$, d. h. $B_p - A_{p-1} = 0$ auf Grund der Voraussetzung vorläufig noch ausgeschlossen erscheint). Aber auch im Falle $|M| < 1$ findet Divergenz statt. Hier wird zwar:

$$\lim_{\lambda = \infty} K_{\lambda p + \mu} = x, \tag{58}$$

sobald μ einen solchen Index bedeutet, für welchen K_{μ} eine bestimmte Zahl vorstellt. Dagegen wird $K_{\lambda p + \mu}$ für jedes λ gleichzeitig mit K_{μ} sinnlos, und da dies, wegen $B_{p-1} = 0$, für $\mu = p - 1$ sicher (eventuell auch noch für andere Werthe von μ) der Fall ist, so enthält die Folge der Näherungsbrüche $K_{\lambda p + \mu}$ allemal unbegrenzt viele sinnlose[1]), sodass also der unendliche Kettenbruch als divergent bezeichnet werden muss[2]).

---

[1]) Dies wurde von Herrn Landsberg (a. a. O. p. 287) übersehen, sodass er in dem betreffenden Falle Convergenz deducirt.

[2]) Beispiel: Der Kettenbruch mit der 3 gliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \; -\frac{b_1}{1}, \; \frac{a_2}{b_2}\right).$$

Man hat: $B_2 = 0$

und allgemein:

$$B_{3\lambda+2} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

II[b]. $|A_p| > 0, \quad |B_p - A_{p-1}| = 0.$

Da hier $A_{p-1} = B_p$, so lässt sich Gl. (54) in die Form setzen:

$$H = \frac{A_p + B_p h}{B_p} = h + \frac{A_p}{B_p} \tag{59}$$

sodass sich ergiebt:

$$K_{\lambda p + \mu} = K_\mu + \lambda \cdot \frac{A_p}{B_p}, \tag{60}$$

d. h. der Kettenbruch divergirt nach ∞ (mit dem Vorzeichen von $\frac{A_p}{B_p}$).

II[c]. $A_p = 0.$

Man hat hier aus Gl. (54):

$$H = \frac{A_{p-1}}{B_p} \cdot h \tag{61}$$

und daher:

$$K_{\lambda p + \mu} = \left(\frac{A_{p-1}}{B_p}\right)^\lambda \cdot K_\mu. \tag{62}$$

Der Kettenbruch ist also, wie auch $\left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right|$ beschaffen sein möge, schon aus dem Grunde divergent, weil die Reihe der Näherungsbrüche unendlich viele sinnlose (nämlich für $\mu = p - 1$) enthält.

Da hiernach der Kettenbruch im Falle $B_{p-1} = 0$ allemal divergirt, so kann man schliesslich die gefundenen Ergebnisse in folgender Weise zusammenfassen:

Für die *Convergenz* des rein periodischen Kettenbruches mit der p-gliedrigen Periode $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix}$ ist *nothwendig*, dass:

[1] $$|B_{p-1}| > 0.$$ [1]

Diese Bedingung ist auch *hinreichend*, wenn: $D \equiv (A_{p-1} - B_p)^2 + 4 A_p B_{p-1} = 0$ und man hat:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}}.$$

Ist dagegen $D > 0$, so ist weiter *nothwendig*, dass:

[2] $$\left|\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right)\right| > 0 \quad (\text{wo: } S = A_{p-1} + B_p).$$ [2]

Ist diese Bedingung erfüllt, so lässt sich $\varepsilon \cdot \sqrt{D}$ (wo $\varepsilon = \pm 1$ und $\sqrt{D}$ den Hauptwerth der Quadratwurzel bedeutet) eindeutig so fixiren, dass:

$$|S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}| < |S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}|,$$

sodass also:

$$x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2 B_{p-1}}, \quad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2 B_{p-1}}$$

eindeutig bestimmte **Zahlen vorstellen. Im Falle** $A_p > 0$ convergirt alsdann der Kettenbruch gegen den Werth x_1, sofern $p \leq 2$, während für $p \geq 3$ noch die folgende Bedingung als ***nothwendig*** *und hinreichend* hinzutreten muss:

[3] $$|A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots (p-2)).$$

---

[1] Ist $p = 1$, so hat man nach üblicher Weise zu setzen:

$$B_{p-1} \equiv B_0 = 1,$$

sodass also die fragliche Bedingung hier stets eo ipso erfüllt ist. Im übrigen hat man in diesem Falle:

$$A_{p-1} = 0, \; A_p = a_1, \; B_p = b_1, \; S = b_1, \; D = b_1^2 + 4 a_1.$$

[2] Die Bedingung [2] lässt sich mit Rücksicht auf Gl. (24a), (24b) auch folgendermaassen formuliren:

Es darf *keine* Relation bestehen von der Form:

$$S^2 = 4 \vartheta P \quad (0 \leq \vartheta < 1)$$

oder anders geschrieben:

$$D = -4 \eta P \quad (0 < \eta \leq 1).$$

In dem besonderen Falle $A_p = 0$ lässt sich die Bedingung [2] durch die folgende ersetzen:

$$[2^a] \qquad \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1$$

und man hat alsdann $x_1 = 0$ als Grenzwerth des Kettenbruches.

Sind S und D reell, was offenbar insbesondere stets der Fall ist, wenn die a_ν, b_ν durchweg reell sind, so besteht offenbar die Divergenz-Bedingung (24): $\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) = 0$ im Falle $D > 0$ ausschliesslich dann, wenn $S = 0$; dagegen im Falle $D < 0$ für jedes S.

Da andererseits im Falle $D > 0$, $|S| > 0$ von den beiden Werthen des Ausdruckes

$$S + \varepsilon \cdot \sqrt{D} \quad (\text{wo jetzt: } \sqrt{D} > 0)$$

derjenige der numerisch grössere ist, bei welchem ε gleiches Vorzeichen mit S besitzt, also: $\varepsilon = \frac{S}{|S|}$ gesetzt werden kann, so gewinnt man hier die folgende einfachere Formulirung:

Sind S, D *reell* (eventuell auch *Null*), so ist für die *Convergenz* des fraglichen Kettenbruches *nothwendig:*

$$|B_{p-1}| > 0 \quad |S| > 0 \quad D \geqq 0.$$

Diese Bedingungen sind auch *hinreichend* im Falle $D = 0$ [1]) und für $p \leqq 2$ auch im Falle $D > 0$, und man hat:

$$\left[\begin{matrix} a_\nu \\ b_\nu \end{matrix}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{1}{2 B_{p-1}} \left\{ A_{p-1} - B_p + \frac{S}{|S|} \cdot \sqrt{D} \right\}.$$

[1]) Die Bedingung $|S| > 0$ ist in diesem Falle stets eo ipso erfüllt: s. Gl. (38), p. 475.

Im Falle $p \geq 3$ ist jedoch no
dass:

$$|A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad (\mu = 1, \ldots$$

wo:

$$x_2 = \frac{1}{2B_{p-1}} \left\{ A_{p-1} - B_p - \frac{S}{|S|} \right.$$

§ 2. Der einem rein periodischen Ket conjugirte Kettenbruch.

Bedeutet K einen unendlichen rein periodi
bruch mit der p-gliedrigen Periode $\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}\right)$,
K conjugirt derjenige unrein periodische K
bezeichnet werden, welcher besteht aus dem Anf
und einem rein periodischen Kettenbruche mit
$\left(\frac{a_p}{b_{p-1}}, \frac{a_{p-1}}{b_{p-2}}, \ldots \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_p}\right)$, also:

(63) $$K' \equiv \left(b_p ; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_p}, \ldots\right).$$

Für den Fall $p = 1$, in welchem diese Definiti
Sinn besitzt, hat man zu setzen:

(64) $$K' \equiv \left(b_1 ; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_1}, \ldots\right) \text{ d. h. } \equiv b_1 + K.$$

Wenn nun in dem zuletzt bezeichneten Falle der
bruch K überhaupt convergirt, so hat man [1]):

(65) $$\begin{cases} K = x_1 \equiv \frac{1}{2}(b_1 + \varepsilon \cdot \sqrt{b_1^2 + 4a_1}), \text{ wenn: } |b_1^2 + 4a \\ \text{bezw. } K = x \equiv \frac{1}{2} b_1, \qquad \text{wenn: } b_1^2 + 4a_1 \end{cases}$$

und daher:

(66) $$\begin{cases} K' = -\frac{1}{2}(b_1 - \varepsilon \cdot \sqrt{b_1^2 + 4a_1}) \text{ d. h. } = -x_2 \\ \text{bezw. } K' = -\frac{1}{2} b_1 \qquad \text{d. h. } = -x. \end{cases}$$

[1]) Vgl. p. 480, Fussnote 1).

Um nachzuweisen, dass ein ganz analoger Zusammenhang zwischen K und K' auch für $p \geqq 2$ stattfindet, schicken wir zunächst die folgende Hülfsbetrachtung voraus. Setzt man:

$$(67^a) \qquad H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{R_2}\right) = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{R_2}},$$

so folgt:

$$(67^b) \qquad -R_2 = \frac{a_2}{b_1 - \frac{a_1}{H}} = \left(\frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right),$$

und umgekehrt.

Substituirt man:

$$R_2 = b_2 + \frac{a_3}{R_3},$$

so wird:

$$(68^a) \qquad H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{R_3}\right),$$

und zunächst:

$$-\frac{a_3}{R_3} = b_2 + \frac{a_2}{b_1 - \frac{a_1}{H}},$$

also:

$$(68^b) \qquad -R_3 = \left(\frac{a_3}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right) \text{ — vice versa.}$$

Angenommen, es bestehen für irgend ein bestimmtes n allemal gleichzeitig die beiden Relationen:

$$(69) \qquad \begin{cases} H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_n}{R_n}\right) \\ -R_n = \left(\frac{a_n}{b_{n-1}}, \dots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right), \end{cases}$$

so folgt durch die Substitution:

$$R_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{R_{n+1}}$$

zunächst:

$$H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_n}{b_n}, \frac{a_{n+1}}{R_{n+1}}\right)$$

und:

$$-\frac{a_{n+1}}{R_{n+1}} = b_n + \left(\frac{a_n}{b_{n-1}}, \dots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right)$$

also schliesslich:

$$-R_{n+1} = \left(\frac{a_{n+1}}{b_n}, \frac{a_n}{b_{n-1}}, \dots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right).$$

Damit ist aber die Allgemeingültigkeit der Beziehungen (69) erwiesen, da deren Richtigkeit für $n = 2, 3$ bereits erkannt wurde.

Setzt man jetzt in Gl. (69)

$$(70) \qquad n = p > 2, \quad H = -H', \quad R_p = b_p - h',$$

so ergeben sich als allemal gleichzeitig bestehend die Beziehungen:

$$(71) \qquad \begin{cases} H' = \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_{p-1}}{b_{p-1}}, \frac{a_p}{b_p - h'}\right) \\ h' = \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \dots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{H'}\right). \end{cases}$$

Zugleich besteht dann aber, falls $D > 0$, zwischen h' und H' die folgende, aus Gl. (10) und (14) für $H = -H'$, $h = -h'$ hervorgehende Relation:

$$(72) \qquad \frac{h' + x_2}{h' + x_1} = M \cdot \frac{H' + x_2}{H' + x_1} \quad \left(\text{wo: } M = \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}\right).$$

Bezeichnet man jetzt die Näherungsbrüche des oben mit K' bezeichneten unrein periodischen Kettenbruches mit

$$K'_\nu = \frac{A'_\nu}{B'_\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

sodass also insbesondere:

$$(73) \qquad \begin{cases} K'_0 = b_p \\ K'_1 = \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}\right) \\ \dots\dots\dots \\ K'_p = \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \dots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_p}\right), \end{cases}$$

so hat man für $\nu \geqq p$:

$$(74) \qquad K'_\nu = \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \ldots \frac{a_2}{b_1},\ \frac{a_1}{K'_{\nu-p}}\right),$$

also, wie die Vergleichung mit (71) zeigt, $h' = K'_\nu$ für: $H' = K'_{\nu-p}$. In Folge dessen ergiebt sich aber aus Gl. (72):

$$(75) \qquad \frac{K'_\nu + x_2}{K'_\nu + x_1} = M \cdot \frac{K'_{\nu-p} + x_2}{K'_{\nu-p} + x_1}$$

und hieraus, analog wie in § 1:

$$(76) \qquad \frac{K'_{\lambda p+\mu} + x_2}{K'_{\lambda p+\mu} + x_1} = M^\lambda \cdot \frac{K'_\mu + x_2}{K'_\mu + x_1} \quad (\mu = 0, 1, \ldots (p-1)),$$

also:

$$(77) \qquad K'_{\lambda p+\mu} = -x_2 + M^\lambda \cdot (x_1 - x_2) \cdot \frac{A'_\mu + B'_\mu x_2}{(A'_\mu + B'_\mu x_1) - M^\lambda (A'_\mu + B'_\mu x_2)}$$

und daher, falls $|M| < 1$:

$$(78) \qquad \lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+\mu} = -x_2,$$

sofern noch die Bedingung erfüllt ist:

$$(79) \qquad |A'_\mu + B'_\mu x_1| > 0, \text{ zunächst für: } \mu = 0, 1, \ldots (p-1).$$

Es lässt sich aber auch hier wiederum zeigen, dass diese Bedingung für die beiden letzten Werthe $\mu = p-2,\ p-1$ nicht in Betracht gezogen zu werden braucht.

Um dies nachzuweisen, hat man nur A'_μ, B'_μ für $\mu = p-2$, $p-1$ durch entsprechende A_μ, B_μ auszudrücken, was auf folgende Weise geschehen kann. Setzt man:

$$(80) \qquad \frac{q}{r} = \left(\frac{a_1}{b_1},\ \ldots \frac{a_{p-1}}{b_{p-1}},\ \frac{a_p}{b_p - h'}\right)$$

$$= \frac{-A_{p-1} h' + A_p}{-B_{p-1} h' + B_p},$$

so folgt aus Gl. (71):

$$h' = \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \ldots \frac{a_2}{b_1},\ \frac{a_1 r}{-q}\right)$$

(81) $$= \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \ldots \frac{a_3}{b_2},\ \frac{a_2 q}{b_1 q - a_1 r}\right).$$

Andererseits ergiebt sich aus Gl. (80):

(82) $$h' = \frac{A_p r - B_p q}{A_{p-1} r - B_{p-1} q}$$

und daher, durch Combination von Gl. (81), (82), für $r = 0$ bezw. $q = 0$:

(83) $$\begin{cases} \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \ldots \frac{a_3}{b_2}\right) = \frac{A_p}{A_{p-1}} \\ \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \ldots \frac{a_3}{b_2},\ \frac{a_2}{b_1}\right) = \frac{B_p}{B_{p-1}} \end{cases}$$

Da aber aus den Beziehungen:

$$\begin{matrix} A_1 = a_1 & A_2 = a_1 b_2 & A_{\nu+1} = a_{\nu+1} A_{\nu-1} + b_{\nu+1} A_\nu \\ B_1 = b_1 & B_2 = a_2 + b_1 b_2 & B_{\nu+1} = a_{\nu+1} B_{\nu-1} + b_{\nu+1} B_\nu \end{matrix} \quad (\nu \geqq 2)$$

resultirt, dass A_p, A_{p-1} formal (d. h. für ganz beliebige a_ν, b_ν) den grössten gemeinsamen Theiler a_1, dagegen B_p und B_{p-1} überhaupt keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so folgt aus Gl. (83):

(84) $$\frac{A'_{p-2}}{B'_{p-2}} \equiv \frac{a^{-1} \cdot A_p}{a^{-1} \cdot A_{p-1}}, \quad \frac{A'_{p-1}}{B'_{p-1}} \equiv \frac{B_p}{B_{p-1}}.$$

Da ferner x_1 eine Wurzel der quadratischen Gleichung (I) (p. 466), so hat man:

(85) $$(B_p + B_{p-1} x_1) \cdot x_1 = A_p + A_{p-1} x_1,$$

also mit Berücksichtigung von Gl. (84):

(86) $$(A'_{p-1} + B'_{p-1} x_1) \cdot x_1 = (A'_{p-2} + B'_{p-2} x_1) \cdot a_1.$$

Daraus erkennt man aber, dass die Beziehung:

$$A'_{p-1} + B'_{p-1} x_1 = 0$$

allemal die folgende:

$$A'_{p-2} + B'_{p-2}\,x_1 = 0$$

nach sich ziehen würde und, sofern nur $|x_1| > 0$, auch umgekehrt: man hätte dann also: $\frac{A'_{p-1}}{B'_{p-1}} = \frac{A'_{p-2}}{B'_{p-2}}$, was wiederum unmöglich ist. Da andererseits im Falle $x_1 = 0$ nach Gl. (85) auch $A_p = 0$ sein muss, so ergiebt sich, wenn man den Fall $A_p = 0$ vorläufig ausschliesst, dass die Bedingung (79) in der That nur für $\mu = 0, 1, \ldots (p-3)$ gefordert zu werden braucht, sodass sie also überhaupt nur für $p \geqq 3$ in Betracht kommt.

Was sodann den vorläufig ausgeschlossenen Fall $A_p = 0$ betrifft, so hat man nach Gl. (33) zu setzen:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}, \quad \text{wenn:} \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1,$$

und somit:

$$(87) \qquad A_p + A_{p-1}\,x_1 = 0, \quad \text{d. h.} \quad A'_{p-2} + B'_{p-2}\,x_1 = 0,$$

sodass also in diesem Falle die Bedingung (79) für $\mu = p - 2$ nicht erfüllt ist und der Kettenbruch K' daher divergirt.

Dagegen hat man nach Gl. (34):

$$x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}, \quad x_2 = 0, \quad \text{wenn:} \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| > 1,$$

also $x_1 > 0$: der Kettenbruch K' convergirt also in diesem Falle nach $-x_2 = 0$, sofern nur die Bedingung (79) für $\mu = 0, 1, \ldots (p-3)$ erfüllt ist. —

Ist jetzt $D = 0$, so tritt an die Stelle von Gl. (72), die folgende, aus Gl. (42) durch Substitution von $H = -H'$, $h = -h'$ hervorgehende:

$$(88) \quad h' - H' = -\frac{2\,B_{p-1}}{S}(h' + x)\cdot(H' + x) \quad \left(\text{wo: } x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2\,B_{p-1}}\right),$$

sodass für: $H' = K'_{\nu-p}$, also: $h' = K'_\nu$ (s. Gl. (71)), sich ergiebt:

$$(89) \quad K'_\nu - K'_{\nu-p} = -N(K'_\nu + x)\cdot(K'_{\nu-p} + x) \quad \left(\text{wo: } N = \frac{2\,B_{p-1}}{S}\right)$$

und, falls $K'_{\nu-p} + x > 0$ und somit auch $K'_\nu + x > 0$:

$$(90) \qquad \frac{1}{K'_\nu + x} = \frac{1}{K'_{\nu-p} + x} + N.$$

Daraus folgt dann, genau wie in § 1. I[b]:

$$(91) \qquad \frac{1}{K'_{\lambda p+\mu} + x} = \frac{1}{K'_\mu + x} + \lambda N$$

und:

$$(92) \qquad \lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+\mu} = -x.$$

Ist aber für irgend ein $\mu = m$: $K'_m + x = 0$, so folgt aus Gl. (89), dass $K'_{p+m} = K'_m = -x$, und allgemein: $K'_{\lambda p+m} = -x$, also auch:

$$(93) \qquad \lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+m} = -x.$$

Dieses Resultat gilt auch wiederum noch in dem besonderen Falle $A_p = 0$, d. h. $x = 0$. Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich also in folgender Weise zusammenfassen:

Ist $|D| > 0$ und convergirt der Kettenbruch K nach x_1, so convergirt $-K'$ nach x_2, sofern für $p > 3$ noch die Bedingung erfüllt ist:

$$A'_\mu + B'_\mu x_1 > 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots (p-3)).$$

Nur im Falle: $A_p = 0$, $A_{p-1} < B_p$, in welchem $K = 0$ wird, ist K' *divergent*; während für: $A_p = 0$, $A_{p-1} > B_p$ zwar K *divergirt*, dagegen K' nach 0 *convergirt*.

Ist $D = 0$ und $B_{p-1} > 0$, so hat man:

$$K = -K' = x \text{ d. h. } = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}}.$$

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 14. November 1900.

Der Präsident der Akademie, Herr K. A. v. Zittel, eröffnet die Festsitzung mit einer Rede: „Ziele und Aufgaben der Akademien im 20. Jahrhundert", welche in den Schriften der Akademie erscheinen wird.

Sodann verkündigten die Classensekretäre die Wahlen und zwar der Sekretär der II. Classe, Herr C. v. Voit, die der mathematisch-physikalischen Classe.

Von der mathematisch-physikalischen Classe wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätiget:

I. zum ordentlichen Mitgliede:

Das bisherige ausserordentliche Mitglied Dr. Wilhelm Conrad Röntgen, k. Geheimer Rath und Professor der Physik an der Universität zu München;

II. zum ausserordentlichen Mitgliede:

Dr. Siegmund Günther, Professor der Erdkunde an der technischen Hochschule zu München;

III. zu correspondirenden Mitgliedern:

1. Dr. Otto Bütschli, Professor der Zoologie an der Universität zu Heidelberg;
2. Dr. Wilhelm His, k. Geheimer Rath und Professor der Anatomie an der Universität zu Leipzig;
3. Henri Poincaré, Professor der mathematischen Physik an der Faculté des sciences zu Paris;
4. Dr. Otto Stolz, Professor der Mathematik an der Universität zu Innsbruck;
5. Dr. Hugo de Vries, Professor der Botanik an der Universität zu Amsterdam.

Hierauf hielt das ausserordentliche Mitglied der historischen Classe, Professor Dr. Hans Riggauer, die Festrede: „Ueber die Entwicklung der Numismatik und der numismatischen Sammlungen im 19. Jahrhundert", welche ebenfalls in den Schriften der Akademie veröffentlicht wird.



Sitzung vom 1. Dezember 1900.

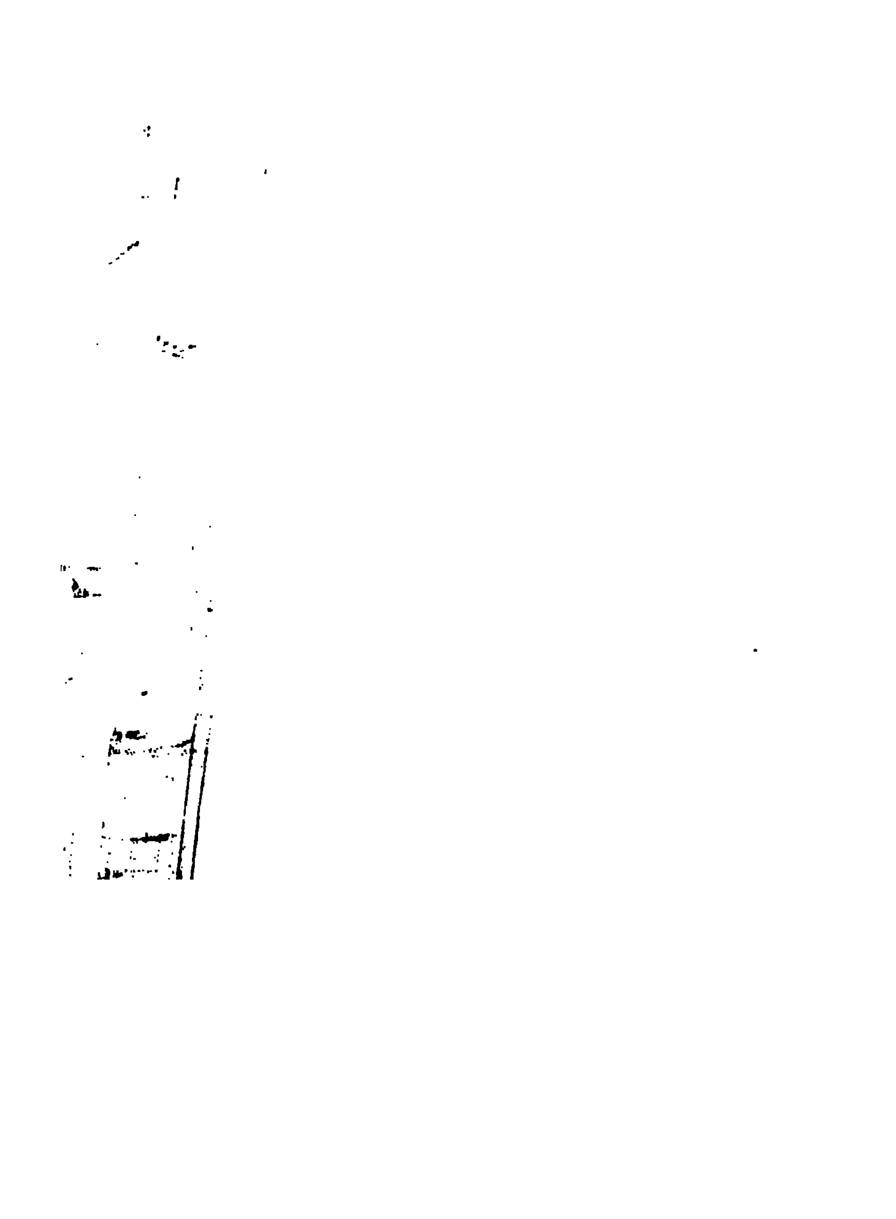
1. Herr F. LINDEMANN macht eine Mittheilung: „Zur Theorie der automorphen Funktionen II."

2. Herr H. EBERT hält einen Vortrag: „Ueber die Ergebnisse zweier zum Zweck der Untersuchung des elektrischen Zerstreuungsvermögens in den oberen Schichten der Atmosphäre angestellten Luftballonfahrten."

3. Herr SEB. FINSTERWALDER berichtet über eine Untersuchung: „Ueber die innere Struktur der Mittel-Moränen."

4. Herr A. PRINGSHEIM berichtet: „Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der doppelperiodischen Funktionen."

5. Herr R. HERTWIG legt eine Abhandlung des Privatdozenten an der hiesigen Universität Dr. OTTO MAAS vor: „Ueber Entstehung und Wachsthum der Kieselgebilde bei Spongien."



Zur Theorie der automorphen Functionen II.

Von F. Lindemann.

(*Eingelaufen 4. Januar.*)

Bei Abfassung meines Aufsatzes über automorphe Functionen (diese Sitzungsberichte, 1899, Bd. 39, Heft III) war mir eine Stelle in einem Aufsatze von Ritter über automorphe Functionen vom Geschlechte Null (Math. Annalen Bd. 41, p. 56 ff.) entgangen, auf die ich inzwischen in dankenswerther Weise aufmerksam gemacht bin. Hier weist Ritter nach, dass die Summe der Polygonseiten (d. i. die Summe der Umfänge aller Fundamentalbereiche) nicht convergiren kann, wenn die Grenzpunkte sich längs irgend welcher Curven (wie z. B. am Hauptkreise bei Gruppen mit Hauptkreis) häufen; dazu bemerkt er, dass für diese Fälle die Reihen $\sum f_i'(z)$ nicht convergiren können. Herr College Fricke war so gütig, mir einen Beweis für diese Bemerkung mitzutheilen, der mit Hülfe der von Poincaré bei seinem Beweise benutzten Ungleichungen leicht zu führen ist (vgl. unten den Schluss der vorliegenden Arbeit).

Der an der Spitze meiner Untersuchungen stehende Beweis bezieht sich nun nicht auf die Reihe $\sum f_i'(z)$, sondern zunächst auf die Reihe $\sum f_i''(z)$; aus ihr hatte ich die Convergenz der Reihe $\sum (f_i'(z) - f_i'(z_0))$ durch Integration erschlossen, dabei dann allerdings das ergänzende Glied $f_i'(z_0)$ in Folge eines Irrthums weiterhin fortgelassen, indem ich den Werth $\frac{d_i}{c_i}$ mit $\frac{c_i}{d_i}$ verwechselte. Dieses Fortlassen lässt sich aber auf andere Weise rechtfertigen.

[illegible] Bemerkung [illegible]

[illegible] Substitution [illegible]

$$[illegible] = \frac{[illegible]\,z - [illegible]}{[illegible]\,z - [illegible]}$$

[illegible] Index [illegible] $H(z)$ eine rationale Funktion von z, dann [illegible] die Funktion $G(z)$ [illegible] die Gleichung

(2) $$G(z) = \sum_k H([illegible])\,[illegible]$$

definiert [illegible] Reihe für [illegible] konvergiert, wenn ausgenommen die [illegible] der Funktion $H(z)$ und die Pole der Funktionen

(3) $$f(z) = \frac{1}{[illegible]}$$

[illegible]

(4) $$[illegible] = G(z)\,[illegible]\,(c_k z - d_k)^{2m}$$

Unsere Hauptaufgabe [illegible] die Reihe

(5) $$\sum_i f_i'(z) = 2\sum_k \frac{c_k}{(c_k z - d_k)^3}$$

zu untersuchen. Aus (4) erhalten wir durch logarithmisches Differenzieren:

$$f_i''(z) = \frac{1}{m}\left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(f_i)} f_i'^2 - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i'\right]$$

(6) $$= \frac{1}{m}\left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(z)} f_i'^{m+2} - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i'\right].$$

Die Untersuchung der Reihe (5) können wir daher auf die Untersuchung der beiden einzelnen Reihen

$$(7)\qquad \begin{aligned} U &= \sum_i \frac{1}{m} \frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(z)} f_i'^{m+2}, \\ V &= \sum_i \frac{1}{m} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i' \end{aligned}$$

zurückführen und haben dann den Vortheil, dass wir sowohl über die Zahl m, als über die in $\Theta(z)$ vorkommende rationale (oder transscendente) Function $H(z)$ noch in besonders günstiger Weise verfügen dürfen. Von der Zahl m hängt auch die Function Θ ab: lassen wir also m vom Summationsindex i abhängen, so können auf den rechten Seiten der Gleichungen (7) keine gemeinsamen Factoren vor das Summenzeichen gesetzt werden. Wir können eine solche Abhängigkeit zwischen den Zahlen m und i unbedenklich einführen, weil die Gleichung (6) eine Identität ist.

Nach Poincaré ist die Reihe

$$(8)\qquad \sum f_i'(\zeta)^2$$

stets convergent, also sicher $\lim\limits_{i=\infty} f_i'(\zeta) = 0$. Man kann demnach eine Zahl j so bestimmen, dass für alle Werthe von k, welche grösser als j oder gleich j sind, die Ungleichheit

$$(9)\qquad \text{abs}\, f_k'(\zeta) < 1$$

erfüllt ist. Da die Reihe (8) gleichmässig convergirt, ist die so definirte Zahl von ζ nicht abhängig; sie kann so gewählt werden, dass für alle Punkte ζ eines endlichen Bereiches dieselbe Zahl j genügt. Der Einfachheit wegen können wir uns hierbei die Substitutionen so geordnet denken, dass dem grösseren absoluten Betrage von $f_i'(z)$ ein kleinerer Index entspricht, ausserdem aber immer $f_0(z) = z$ gesetzt wird. Es ist nur zu beachten, dass es vielleicht unendlich viele Substitutionen geben wird, denen derselbe absolute Betrag von $f_i'(z)$ zukommt. Jede Substitution f_i nemlich hängt von vier Constanten a_i, b_i, c_i, d_i ab, die durch die Bedingung $a_i d_i - b_i c_i = 1$ an einander ge-

knüpft sind, und die ausserdem durch die Bedingungen der Gruppe beschränkt werden; in f'_i kommen aber nur zwei Constanten (c_i und d_i) vor. Dem entsprechend können wir jede Substitution f_i auch durch zwei Indices λ, μ charakterisiren, von denen sich λ auf die Grösse des absoluten Betrages bezieht, μ aber eine irgendwie festgelegte Ordnung bei gleichem absoluten Betrage andeutet. Es wird also

$$(10) \qquad \sum_i [f'_i(z)]^m = \sum_\lambda \sum_\mu [f'_{\lambda\mu}(z)]^m,$$

und hier ist

$$(11) \qquad \sum_\mu [f'_{\lambda\mu}(z)]^m = N_\varkappa [f'_\varkappa(z)]^m,$$

wo $\varkappa$ einen bestimmten Index i bezeichnet und $N_\varkappa$ die Anzahl derjenigen Substitutionen angibt, denen dieselben Werthe der Constanten c_i und d_i zukommen. Da die Reihe (8) convergirt, so hat die rechte Seite von (11) für jeden Index $\varkappa$ einen endlichen Werth; es ist also auch $N_\varkappa$ endlich für jeden endlichen Werth von $\varkappa$, und es wird

$$\lim_{\varkappa=\infty} N_\varkappa [f'_\varkappa(z)]^2 = 0.$$

Die von uns verlangte Anordnung der Glieder der Reihe wäre hiernach so herzustellen, dass man zunächst die Doppelreihe der rechten Seite von (10) bildet und dann diese in eine einfache Reihe verwandelt, indem man die auf einander folgenden Substitutionen mit einem einzigen, stets wachsenden Index i numerirt.

Jedenfalls kann man hiernach den Index j so bestimmen, dass

$$(12) \qquad \text{abs}\, f'_{k+1}(\zeta) < \text{abs}\, f'_k(\zeta) < 1 \quad \text{für } k > j$$

und

$$(12^a) \qquad \text{abs}\, f'_{j+1}(\zeta) < \text{abs}\, f'_j(\zeta).$$

Die zur Construction der in (2) gegebenen Θ-Function benöthigte Function $H(z)$ bestimmen wir durch die Gleichung:

$$(13) \quad H(z) = (z - f_1(\zeta))^2 (z - f_2(\zeta))^2 \ldots (z - f_j(\zeta))^2 (z - a),$$

wo j den soeben durch (12) definirten Index bedeutet, und

mit a eine von ζ abhängige Grösse bezeichnet wird, die der Bedingung $H'(\zeta) = 0$ entspricht. Sei also

$$g(z) = (z - f_1(\zeta))(z - f_2(\zeta)) \dots (z - f_j(\zeta)),$$

so machen wir:

$$2g'(\zeta) \cdot (\zeta - a) + g(\zeta) = 0. \tag{14}$$

Hierbei muss angenommen werden, dass $g'(\zeta)$ von Null verschieden sei. Wäre aber $g'(\zeta) = 0$, so hätten wir

$$H(z) = [g(z)]^2 \cdot (z - a)(z - \beta)$$

zu setzen, und dann der Bedingung

$$[2g'(\zeta) \cdot (\zeta - \beta) + g(\zeta)](\zeta - a) + (\zeta - \beta) g(\zeta) = 0 \tag{15}$$

zu genügen. Bestimmen wir die Grösse β auf irgend eine Weise so, dass die eckige Klammer der linken Seite von Null verschieden ist, so kann auch a aus dieser Gleichung berechnet werden. Ist gleichzeitig $g(\zeta) = 0$ und $g'(\zeta) = 0$, so kann in analoger Weise Abhülfe geschaffen werden. Durch Differentiation der Gleichung (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Theta'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} m H(f_k(z)) [f'_k(z)]^{m-1} f''_k(z) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} H'(f_k(z)) [f'_k(z)]^{m+1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Setzen wir nun $z = \zeta$, so ist sowohl $H(f_k(\zeta))$ als auch $H'(f_k(\zeta))$ gleich Null für $k \leq j$, ausgenommen den Werth $k = 0$. Es wird also

$$\Theta(\zeta) = H(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H(f_k(\zeta)) [f'_k(\zeta)]^m$$

$$\begin{aligned} \Theta'(\zeta) &= \sum_{k=j+1}^{\infty} m H(f_k(\zeta)) [f'_k(\zeta)]^{m-1} f''_k(\zeta) \\ &+ \sum_{k=j+1}^{\infty} H'(f_k(\zeta)) [f'_k(\zeta)]^{m+1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Wie gesagt, denken wir uns die Zahl m von der Zahl i abhängig, und zwar so, dass m mit i in's Unendliche wächst. Wir wählen $m = i$, und setzen dem entsprechend den Index i an das Zeichen Θ; es ist also:

$$(18) \qquad \Theta_i(\zeta) = H(\zeta) + \sum_{k=j-i}^{\infty} H(f_k(\zeta))\{f_k'(\zeta)\}^{[illegible]}.$$

Diese Function $\Theta(\zeta)$ ist keine Poincaré'sche Θ-Function, denn das Argument ζ kommt in dem Factor $H(f_k(\zeta))$ des allgemeinen Gliedes nicht nur im Argumente $f_k(\zeta)$, sondern nach (15) auch ausserdem explicite vor. Die Function $\Theta_i(z)$ wird nach Poincaré für eine gewisse endliche Anzahl von Punkten (die mit i wächst) in jedem Bereiche gleich Null; unter diesen Punkten ist aber ζ nicht enthalten, denn wäre ζ für alle Werthe von i ein Nullpunkt von $\Theta(z)$, so müsste $\Theta_i(\zeta)$ auch für $i = \infty$ gleich Null sein; es ist aber nach (9) und (18)

$$(19) \qquad \lim_{i=\infty} \Theta_i(\zeta) = H(\zeta),$$

und $H(\zeta)$ ist im Allgemeinen von Null verschieden. Der Fall $H(\zeta) = 0$ soll weiterhin besprochen werden.

Vielleicht könnte es für ganz specielle Lagen von ζ vorkommen, dass $\Theta_i(z)$ für $z = \zeta$ verschwindet; aber jedenfalls kann die Zahl solcher Stellen in jedem Bereiche nur eine [illegible] Werthe unendlich gross, [illegible] $= \infty$ [illegible] gross bleiben, was [illegible] Diese Darlegung hatte [illegible] in sehr knapper Form ange[illegible] der Correctur [illegible] thatsächlich [illegible] hineingekommen, dass [illegible] mit wachsendem [illegible]

[illegible] bleibt hiermach [illegible] endlichen Grenze M:

$$[illegible] < M$$

[illegible] definirten Reihe [illegible]

$$(\text{abs } V)_{z=\zeta} < M \sum_i \frac{1}{i} \text{ abs} (\Theta_i' (\zeta) \cdot f_i' (\zeta)).$$

Setzen wir noch

$$P_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H \, (f_k (\zeta)) \left[\frac{f_k' (\zeta)}{f_j' (\zeta)}\right]^{i-1} f_k'' (\zeta),$$

$$Q_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H' \, (f_k (\zeta)) \left[\frac{f_k' (\zeta)}{f_j' (\zeta)}\right]^{i+1},$$

so sind die Reihen P_i und Q_i, welche in die Gleichungen (17) einzuführen sind, nach den Poincaré'schen Sätzen für alle Werthe von i convergent; da ferner nach der oben getroffenen Festsetzung über die Anordnung der Functionen $f_i (z)$ stets

$$\text{abs } f_k' (\zeta) < \text{abs } f_j' (\zeta) \text{ für } k > j$$

ist, so haben die beiden Zahlenreihen

$$P_i, \quad P_{i+1}, \quad P_{i+2}, \ldots \ldots$$
$$Q_i, \quad Q_{i+1}, \quad Q_{i+2}, \ldots \ldots$$

die Eigenschaft, dass ihre absoluten Beträge mit wachsendem i stets abnehmen, sich also für $i = \infty$ endlichen Grenzen nähern. Sei

$$P_i' = \text{abs } P_i, \quad Q_i' = \text{abs } Q_i,$$

so wird

$$(21) \quad (\text{abs } V)_{z=\zeta} < M \sum_i \left[P_i' \text{ abs} (f_j' (\zeta))^{i-1} + \frac{1}{i} Q_i' \text{ abs} (f_j' (\zeta))^{i+1} \right] \text{abs } f_i' (\zeta).$$

Da die Reihe $\sum_i (f_j' (\zeta))^{i+1}$ in Folge der Forderung (9) sicher convergirt, so folgt, dass auch die Reihe V für $z = \zeta$ sicher convergent, und zwar absolut convergent ist. Ausgenommen sind die Punkte $\zeta = -\frac{d_i}{c_i}$, für welche die Functionen $f_i' (\zeta)$ unendlich gross werden, welche indessen für Functionen mit Hauptkreis (weil ausserhalb desselben liegend) nicht in Betracht kommen. Ausgenommen sind auch zunächst noch die Nullpunkte der Function $H (\zeta)$.

Etwas umständlicher gestalten sich die entsprechenden Ueberlegungen für die Reihe U, welche durch die erste Gleichung (7) definirt war. Damit die Gleichung (6) erfüllt, d. h.

$$\sum_i f_i''(\zeta) = V(\zeta) - U(\zeta)$$

sei, muss die Function Θ in U ebenso, wie in V definirt sein; es muss also auch jetzt $m = i$ gesetzt werden. Wir haben für $z = \zeta$

$$U(\zeta) = \sum_i \frac{1}{i} \frac{\Theta_i'(f_i(\zeta))}{\Theta_i(\zeta)} f_i'(\zeta)^{i+2}. \tag{22}$$

Die in $\Theta_i(z)$ eingehende Function $H(z)$ müsste wieder gemäss Gleichung (13) und der Index j durch die Ungleichung (9) bestimmt werden. Diese Forderung bereitet hier einige Schwierigkeiten, denn in $\Theta_i'(f_i(\zeta))$ treten die Grössen $f_k'(f_i(\zeta))$ an Stelle der Grössen $f_k'(\zeta)$ auf. Es müsste also j so gewählt werden, dass für $k \geqq j$, die Ungleichung

$$\text{abs}\, f_k'(f_i(\zeta)) < 1 \tag{23}$$

erfüllt ist, und dadurch wird j vom Index i abhängig. Es besteht nemlich die Gleichung

$$f_k'(f_i(\zeta)) = \frac{f_{ki}'(\zeta)}{f_i'(\zeta)}, \tag{24}$$

wenn $f_{ki}(\zeta) = f_k(f_i(\zeta))$ gesetzt wird. Um die Ungleichung (23) zu befriedigen, muss also j so gross gewählt werden, dass für $k > j$

$$\text{abs}\, f_{ki}'(\zeta) < \text{abs}\, f_i'(\zeta) \text{ und abs}\, f_{j+1,i}(\zeta) < \text{abs}\, f_{j,i}(\zeta) \tag{25}$$

wird. Für endliche Werthe von i wird man dieser Forderung durch einen endlichen Werth von j stets genügen können: mit unendlich wachsendem i wird aber auch der zugehörige Werth von j unbegrenzt zunehmen. In Folge dessen wächst mit j auch die Anzahl der Factoren von $H(z)$ in's Unendliche; und $H(z)$ wird für $j = \infty$ durch ein unendliches Product dargestellt, das nicht nothwendig convergent ist. Nach den bekannten Sätzen von Weierstrass und Mittag-

Leffler über eindeutige analytische Functionen können wir indessen dies Product durch Hinzufügen von Exponentialfunctionen zu den einzelnen Factoren stets convergent machen. Wir ersetzen daher die Gleichung (13) durch die folgende

$$H_i(z) = [G_i(z)]^2 \cdot (z - a_i), \tag{26}$$

wo durch Beisetzen des Index i daran erinnert werden soll, dass für jede Function $\Theta_i(z)$ eine andere Function $H_i(z)$ zu benutzen ist. Hierbei sei

$$G_i(z) = \left(1 - \frac{z}{f_1(\zeta)}\right) e^{g_1(z)} \cdot \left(1 - \frac{z}{f_2(\zeta)}\right) e^{g_2(z)} \cdots \cdot \left(1 - \frac{z}{f_j(\zeta)}\right) e^{g_j(z)}, \tag{27}$$

wo die ganzen Functionen $g_k(z)$ in bekannter Weise zu bilden sind; und zur Bestimmung von a diene die Gleichung:

$$2\, G_i'(\zeta) \cdot (\zeta - a_i) + G_i(\zeta) = 0. \tag{28}$$

Ist zufällig $G_i'(\zeta) = 0$, so sind entsprechende Ueberlegungen anzustellen, wie oben im Anschlusse an die Gleichung (15). Nach diesen Festsetzungen behält $H_i(\zeta)$ auch für $i = \infty$ einen endlichen Werth.

Von den beiden Zahlen j, welche einerseits durch die Forderung (9), andererseits durch die Forderung (23) bestimmt werden, ist jedesmal die grössere auszuwählen, welche dann beiden Ungleichungen genügt. Es ist sodann auch in V die frühere Function $H(z)$ durch die jetzige $H_i(z)$ zu ersetzen; im übrigen sind die obigen Ueberlegungen zu wiederholen, wodurch wieder die Convergenz der Reihe (21) erwiesen wird; denn die Grössen P_i und Q_i bleiben auch jetzt stets endlich, wie wir sogleich noch sehen werden.

Dieselben Ueberlegungen genügen jetzt aber auch für die Function $U(\zeta)$. Wir definiren eine Zahl j (die von i abhängt und mit i in's Unendliche wächst) durch die Ungleichung (23) bezw. (25), (12) und (12ª), dann die Function $H_i(z)$ durch (26), (27) und (28); ferner setzen wir

$$\Theta_i(z) = \sum_k H_i(f_k(z))\, [f_k'(z)]^i,$$

und diese Gleichung soll jetzt sowohl für die Reihe U, als für die Reihe V gelten. Lassen wir z mit ζ zusammenfallen, so wird

$$(29) \qquad \Theta_i(\zeta) = H_i(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H_i(f_k(\zeta))\,[f'_k(\zeta)]^i$$

und in Folge von (28)

$$(30) \quad \Theta'_i(\zeta) = \sum_{k=j+1}^{\infty} i H_i(f_k(\zeta))[f'_k(\zeta)]^{i-1} f''_k(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H'_i(f_k(\zeta))\,[f'_k(\zeta)]^{i+1}.$$

Die Function $\Theta_i(\zeta)$ ist im Allgemeinen von Null verschieden, und die Anzahl der Nullpunkte ist eine endliche, so lange i endlich bleibt; sie wächst vielleicht in's Unendliche mit wachsendem i, bleibt aber discret; denn wir haben hier

$$\lim_{i=\infty} \Theta_i(\zeta) = H_\infty(\zeta),$$

wo nun rechts nach (27) ein convergentes unendliches Product steht. Es lassen sich hieran dieselben Ueberlegungen anknüpfen, wie oben an Gleichung (19). Es gilt somit auch hier die Ungleichung (20), wenn auch für M jetzt vielleicht ein anderer Werth gewählt werden muss. Ferner ist

$$(31) \qquad \operatorname{abs} U(\zeta) < M \sum_i \frac{1}{i} \operatorname{abs}\left[\Theta'_i(f_i(\zeta))\, f'_i(\zeta)^{i+2}\right].$$

Setzen wir

$$R_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H_i\big(f_k(f_i(\zeta))\big)\left[\frac{f'_k(f_i(\zeta))}{f'_j(f_i(\zeta))}\right]^{i-1} f''_k(f_i(\zeta)),$$

$$S_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H'_i\big(f_k(f_i(\zeta))\big)\left[\frac{f'_k(f_i(\zeta))}{f'_j(f_i(\zeta))}\right]^{i+1}$$

so sind die Reihen R_i und S_i für alle Werthe von i convergent. Da nemlich die Functionen $H_i(f_k(f_i(\zeta)))$ und $H'_i(f_k(f_i(\zeta)))$ gewisse endliche Werthe nicht überschreiten, so genügt es, die Reihe

$$A_i = \sum_{k=j+1} \left[\frac{f'_k(f_i(\zeta))}{f'_j(f_i(\zeta))}\right]^{i-1}$$

zu untersuchen. Wir betrachten zunächst die Reihe

$$L_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} \left[\frac{f'_k(\zeta)}{f'_j(\zeta)}\right]^{i-1},$$

welche zu obiger Function P_i in derselben Beziehung steht, wie Λ_i zu R_i.

Da $i > 2$ ist, so steht rechts eine stets absolut convergente Reihe. Ersetzen wir i durch $i+1$, so ist es möglich, dass j denselben Werth behält; und dann wäre, wenn ε_j den absoluten Betrag von $f'_j(\zeta)$ bezeichnet:

$$\text{(32)} \qquad \text{abs}\, L_i \leq \Sigma \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j}\right)^{i-1}, \quad \text{abs}\, L_{i+1} \leq \Sigma \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j}\right)^{i}$$

also auch, da $\varepsilon_k < \varepsilon_j$ ist:

$$\text{(33)} \qquad \lambda_{i+1} < \lambda_i,$$

wenn die rechte Seite der ersten Ungleichung (32) kurz mit λ_i bezeichnet wird.

Wächst aber j gleichzeitig mit i (wie es im Allgemeinen zu erwarten ist), so müssen wir einen andern Weg einschlagen.

Es ist

$$\text{abs}\, L_i < \sum_{k=1}^{\infty} \text{abs} \left(\frac{f'_k(\zeta)}{f'_j(\zeta)}\right)^{i-1},$$

und die rechte Seite ist gleich

$$\frac{1}{\text{abs}\, f'_j(\zeta)^{i-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \text{abs}\, (f'_k(\zeta))^{i-1} = \frac{1}{\text{abs}\, f'_j(\zeta)^{i-1}} \sum_{l=0}^{\infty} \text{abs}\, f'_{lj}(\zeta)^{i-1},$$

denn die links stehende Reihe ist absolut und unbedingt convergent, also unabhängig von der Anordnung der Glieder, und die jetzt rechts stehende Reihe unterscheidet sich von ihr nur durch eine Umstellung der einzelnen Glieder. Nach Gleichung (24) ist aber diese rechte Seite auch

$$\text{(34)} \qquad = \sum_{l=0}^{\infty} [\text{abs}\, f'_l(f_j(\zeta))]^{i-1}.$$

Da nun die Reihe

$$\sum_l f'_l(z)^m$$

für $m > 1$ stets convergirt, wenn z einen Punkt im Innern des Hauptkreises bedeutet, so ist auch die Reihe (34) für jeden endlichen Werth von j convergent, und somit bleiben die Grössen L_i endlich bei wachsendem i, so lange j endlich bleibt.

Wird aber j mit i unendlich gross, so rückt der Punkt $f_j(\zeta)$ dem Rande des Hauptkreises bei wachsendem i beliebig nahe. Demselben Rande nähern sich von aussen die Punkte $-\frac{d_i}{c_i}$ bei wachsendem Index i. In der Reihe (34) kommen daher Terme vor, die über alle Grenzen hinaus wachsen; und dadurch wird die Convergenz der Reihe (34) für Punkte des Randes gestört (vgl. Poincaré a. a. O. 198). Nun ist aber nach der Definition

$$L_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{f_k'(\zeta)}{f_j'(\zeta)}\right)^{i-1} = \sum_l [f_l'(f_i(\zeta))]^{i-1}$$

eine Summe, in der alle Terme wegen der Bedingung (23) kleiner als Eins sind; die Summe enthält in Folge der über j getroffenen Festsetzungen von selbst diejenigen Terme der Reihe (34) nicht, welche die Convergenz der letztern stören. Folglich behält auch in diesem Falle die Reihe L_i einen endlichen Werth auch bei unbegrenzt wachsendem Index i; und dasselbe gilt für die in (21) vorkommende Function P_i; auch letztere bleibt für alle Werthe von i stets endlich.

Was nun die Grössen Λ_i anbetrifft, so ist nach Analogie zu (34)

$$(35) \qquad \Lambda_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} [f_l'(f_j(f_i(\zeta)))]^{i-1},$$

wenn der Index l bei der Summation so gewählt wird, dass die Gesammtheit der vorkommenden Functionen $f_l(f_j(\zeta))$ identisch ist mit der Gesammtheit der Functionen $f_k(\zeta)$, die ursprünglich in Λ_i auftreten. Die Grösse Λ_i entsteht also aus L_i, indem man ζ durch $f_i(\zeta)$ ersetzt; auf Λ_i lassen sich daher dieselben Ueberlegungen anwenden, wie sie soeben für L_i durchgeführt wurden, denn nach (23) ist der Index j so bestimmt, dass auch hier die absoluten Beträge aller Glieder auf der

rechten Seite von (35) kleiner als Eins sind, so dass die Convergenz nicht gestört wird, wenn der Punkt $f_j(f_i(\zeta))$ mit wachsendem i der Peripherie des Hauptkreises beliebig nahe kommt. Auch die Zahlen A_i, und damit die absoluten Beträge R_i' und S_i' der Grössen R_i und S_i bleiben daher stets unterhalb endlicher Grenzen.

Somit folgt aus (30) und (31):

$$\text{abs } U(\zeta) \leq M \sum_i \Big[R_i' \text{ abs } \{f_j'(f_i(\zeta))\}^{i-1} + \frac{1}{i} S_i' \text{ abs } \{f_j'(f_i(\zeta))\}^{i+1} \Big] \text{ abs } f_i'(\zeta)^{i+2}.$$

Da $\lim f_i(\zeta) = 0$ ist für $i = \infty$, und da wegen der Ungleichung (23)

$$\text{abs } f_j'(f_i(\zeta)) < 1$$

ist, so steht auf der rechten Seite eine convergente Reihe, denn wenn φ den grössten Werth bezeichnet, der unter allen Werthen $f_j'(f_i(\zeta))$ vorkommt, so ist auch $\varphi < 1$ und die Reihen

$$(36) \qquad \sum_i \varphi^{i-1} \text{ und } \sum \varphi^{i+1}$$

sind einzeln convergent.

Um diese Schlüsse in ihrer Reihenfolge genauer klar zu legen, verfahre man in folgender Weise:

Man wähle eine positive Grösse φ aus, welche kleiner als 1 ist, und wähle ν so gross, dass die Reihe

$$(37) \qquad \sum_{i=\nu}^{\infty} \varphi^{i-1}$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als ε werde. Man bestimme ferner eine Zahl μ so gross, dass

$$(38) \qquad \text{abs } f_i'(\zeta) < \varphi$$

wird für $i > \mu$. Die grösste dieser beiden Zahlen ν und μ werde mit n bezeichnet. Sodann werde ein Index j (der von i abhängt) so bestimmt, dass nach (23) und (25)

$$\text{abs}\, f_k(f_j(\zeta)) < 1 \quad \text{für} \quad k > j.$$

und gleichzeitig $\quad \text{abs}\, f_k(\zeta) < \varrho \quad , \quad k \geq j.$

Mit Hülfe dieses Werthes von j werde die Function $H_i(\zeta)$ und darauf $\Theta_i(\zeta)$ definirt. Es ist dann zunächst:

$$\text{abs} \sum_{m}^{n} [\{f_\nu(f_i(\zeta))\}^{\nu-1} + \{f_\nu(f_i(\zeta))\}^{\nu+1}] f_i(\zeta)^{\nu+1}$$

$$< 2 \sum_{m}^{n} \varrho^{\nu-1} < 2 \cdot \varepsilon.$$

Die Factoren R_i und $S_i \frac{1}{i}$ bleiben nach Obigem stets endlich, sagen wir kleiner als S''; es ist also:

$$\text{abs}\, U(\zeta) < 2\, S''\, M \cdot \varepsilon,$$

und ebenso:

$$\text{abs}\, V(\zeta) < M \cdot P'' \cdot \sum_{m}^{n} \varrho^{\nu-1}$$

$$< M P'' \cdot \varepsilon,$$

wenn P'' den grössten Werth bezeichnet, den die Ausdrücke

$$\text{abs}\, (P_i + \nu^{-1} \varrho \cdot Q_i)$$

annehmen können. Es ist demnach

$$\text{abs}\, (V_n(\zeta) - U_n(\zeta)) < M \varepsilon (P'' - 2 S''),$$

also kleiner, als eine mit ε unendlich klein werdende Grösse, wobei $U_n(\zeta)$ und $V_n(\zeta)$ die Reste der Reihen $U(\zeta)$ und $V(\zeta)$ bedeuten.

Da nun $f_i(\zeta) = V(\zeta) - U(\zeta)$ ist, so convergirt auch die Reihe $\sum f_i(\zeta)$ absolut.

Bei dem eingeschlagenen Beweisgange mussten allerdings gewisse Punkte ζ vorläufig noch ausgenommen werden, nemlich die Nullpunkte der Functionen $\Theta_i(\zeta)$. Diese Nullpunkte können in zwei Klassen getheilt werden: solche, die allen Functionen $\Theta_i(\zeta)$ gemeinsam sind, und solche, für die nur

einzelne dieser Functionen verschwinden. Die ersteren müssen auch als Nullpunkte der Function $\Theta_\infty(\zeta) = H_x(\zeta)$ auftreten.

Letztere kann man durch Aenderung der Definition der Function $H_i(\zeta)$ an andere Stellen bringen; in der That ist diese Definition noch in hohem Grade willkürlich: man kann auf der rechten Seite von (26) noch eine beliebige rationale Function von z als Factor hinzufügen, ohne etwas wesentliches an der ganzen Betrachtung zu ändern. Es entspricht dies Verfahren ganz demjenigen, welches oben im Anschlusse an die Gleichungen (16), (17) und (18) zur Anwendung kam. Die Nullpunkte einzelner Functionen $\Theta_i(\zeta)$ sind daher für die Convergenz der Reihe $\sum f_i''(\zeta)$ nicht von wesentlicher Bedeutung.

Was nun die Nullpunkte und Unendlichkeitspunkte der Function $H_\infty(\zeta)$ betrifft, d. h. die Nullpunkte der Function $\zeta - f_k(\zeta)$ oder $f_k(\zeta)$, so können sie ebenfalls nicht ein wesentliches Hinderniss der Convergenz bilden. Wäre nemlich ζ z. B. zufällig ein Nullpunkt der Gleichung

$$\zeta - f_\nu(\zeta) = 0 \text{ oder } f_\nu(\zeta) = 0,$$

so lassen wir bei der Definition $\mathrm{H}_i(z)$ den Factor $\left(1 - \frac{z}{f_\nu(\zeta)}\right)$ fort. Es sind dann für das Glied $f_\nu''(\zeta)$ der Reihe $\sum f_i''(\zeta)$ die obigen Werthe für $\Theta_i(\zeta)$ und $\Theta_i'(\zeta)$ nicht anwendbar; es sind vielmehr auf den rechten Seiten der Gleichungen (17), (29) und (30) für $i = \nu$ die Summen von $k = 1$ (nicht $j + 1$) bis $k = \infty$ zu erstrecken. Für dies eine Glied $f_\nu''(\zeta)$ sind also die benutzten Umformungen nicht anwendbar, sie bleiben es aber für alle anderen Glieder der Reihe. Diese anderen Glieder bilden auch jetzt eine convergente Reihe, und folglich convergirt auch hier die Reihe $\sum f_i''(\zeta)$.

Diese Ausnahmepunkte stören die Definition der Hülfs-Function $H_i(z)$ und der Zahl j, sie stören aber nicht die Bestimmung der Zahl n gemäss den im Anschlusse an die Ungleichungen (37) und (38) getroffenen Bestimmungen.

Die Reihe $\sum f_i''(\zeta)$ ist daher gleichmässig convergent.

Sie kann demnach gliedweise integrirt werden; [...] ist auch die Reihe

$$(38) \qquad \Phi(\zeta, \zeta_0) = \sum_i [f_i'(\zeta) - f_i'(\zeta_0)]$$

absolut convergent. Ersetzen wir hier ζ durch $f_\nu(\zeta)$, ζ_0 [...] $f_\nu(\zeta_0)$, so folgt:

$$\Phi(f_\nu(\zeta), f_\nu(\zeta_0)) = \sum_i \left(\frac{f_{i\nu}'(\zeta)}{f_\nu'(\zeta)} - \frac{f_{i\nu}'(\zeta_0)}{f_\nu'(\zeta_0)}\right),$$

andererseits aus (38):

$$\frac{1}{f_\nu'(\zeta_0)} \Phi(\zeta, \zeta_0) = \sum_k \left(\frac{f_k'(\zeta)}{f_\nu'(\zeta_0)} - \frac{f_k'(\zeta_0)}{f_\nu'(\zeta_0)}\right)$$

oder nach Umordnung der Glieder auf der rechten Seite:

$$(39) \qquad = \sum_i \left(\frac{f_{i\nu}'(\zeta)}{f_\nu'(\zeta_0)} - \frac{f_{i\nu}'(\zeta_0)}{f_\nu'(\zeta_0)}\right),$$

also auch

$$\Phi(f_\nu(\zeta), f_\nu(\zeta_0)) - \frac{1}{f_\nu'(\zeta_0)} \Phi(\zeta, \zeta_0) = \left(\frac{1}{f_\nu'(\zeta)} - \frac{1}{f_\nu'(\zeta_0)}\right) \sum_i f_{i\nu}'(\zeta)$$

Hieraus folgt, dass auch die Reihe

$$\sum_i f_{i\nu}'(\zeta) = \sum_k f_k'(\zeta)$$

absolut convergirt. Und damit ist dasjenige Resultat gewonnen, welches meiner früheren Arbeit zu Grunde lag.

Andererseits hat Ritter gezeigt, dass die Reihe

$$\sum U_i$$

divergirt, wenn man mit U_i den Umfang desjenigen Polygons bezeichnet, das aus dem Fundamental-Polygon mit dem Umfange U_0 durch die Substitution $f_i(z)$ hervorgeht. Nun ist für $z_i = f_i(z)$

$$\sum_i U_i = \sum_i \int \mathrm{abs}(dz_i) < U_0 \sum_i M_i,$$

wenn M_i den grössten Werth von $\mathrm{abs}\, f_i'(z)$ auf dem Umfang U_i bedeutet, ferner nach Poincaré

$$M_i < K m_i,$$

wenn K eine bestimmte, von i unabhängige Zahl, m_i den kleinsten Werth von abs $f_i'(z)$ bezeichnet, also

$$\sum U_i < U_0 \cdot K \cdot \sum m_i < U_0 \cdot K \sum \text{abs} f_i'(z).$$

Auch die Reihe $\sum m_i$ divergirt daher, und um so mehr die Summe $\sum$ abs $f_i'(z)$, was mit obigem Resultate in Widerspruch zu stehen scheint.

Indessen ist zu beachten, dass Ritters Beweis für die Divergenz der Reihe $\sum U_i$ auf der Annahme einer bestimmten Anordnung der Polygone (concentrisch um das erste Polygon) beruht, und ebenso unser Beweis auf der Annahme einer bestimmten anderen Anordnung (nach den Grössen der absoluten Beträge von $f_i'(\zeta)$), die mit der Ritter'schen Anordnung nicht nothwendig übereinstimmt.

In beiden Fällen haben wir es mit einer einfach unendlichen Reihe zu thun; bei der Anordnung nach concentrischen Ringen erscheinen immer gewisse Gruppen von Gliedern mit einander verbunden, so dass die Reihe der absoluten Beträge in der Form

$$\begin{array}{l} v_{11} + v_{12} + \dots + v_{1a} \\ + v_{21} + v_{22} + \dots + v_{2b} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + v_{\mu 1} + v_{\mu 2} + \dots + v_{\mu m} + \dots \end{array}$$

erscheint. Bei der von uns gewählten Anordnung seien die Glieder mit u_ν bezeichnet. Bei dem Beweise für die Gleichwerthigkeit der beiden Reihen $\sum u_\nu$ und $\sum v_{\mu n}$ wird vorausgesetzt, dass sich für jeden endlichen Index $\nu = n$, auch ein endlicher Werth $v_{\mu m}$ so angeben lasse, dass in der Summe $v_{11} + v_{12} + \dots + v_{\mu m}$ alle Glieder $u_0, u_1, \dots u_n$ vorkommen. Wenn nun die eine Reihe divergiren, die andere convergiren soll, so kann diese Bedingung nicht erfüllt sein. Unsere Reihe $\sum u_\nu$ ist nach der Grösse der Glieder geordnet; es müsste also nicht möglich sein, durch eine endliche Anzahl concentrischer Polygonringe, welche das erste Polygon successive umgeben, alle Polygone zu umfassen, in denen der absolute

Werth u_n des Differentialquotienten $f'_n(z)$ erreicht wird. Diese Unmöglichkeit würde z. B. eintreten, wenn es in beliebiger Nähe des umschliessenden Hauptkreises Punkte gibt, in denen der Werth von $f'_n(z)$ oberhalb einer angebbaren Grösse bleibt; dann aber würde auch die Reihe (5) nicht convergiren können.

Dieselbe Unmöglichkeit bietet sich aber auch, wenn in N Punkten z_m, die dem Rande beliebig nahe liegen, die Functionen $f'_n(z_m)$ sich mit wachsendem n verhalten wie N^{-1}, wo N eine mit n in's Unendliche wachsende Zahl bezeichnet; dann behält nemlich die Summe dieser Glieder einen endlichen Werth, und wenn diese Glieder in dem Reste der Reihe $\sum r_n$ auftreten, so ist natürlich die Convergenz gestört, während die Convergenz der Reihe $\sum r^2_{nm}$ darunter nicht leidet.

Etwas derartiges scheint bei unseren Reihen in der That vorzukommen. Sei nemlich wieder $f_{n\nu}(z) = f_n(f_\nu(z))$, so ist

$$f'_{n\nu}(z) = f'_n(f_\nu(z)) \cdot f'_\nu(z) = \frac{1}{(z-\delta_\nu)^2 (f_\nu(z) - \delta_n)^2 c_\nu^2 c_n^2},$$

wo mit δ_ν der Punkt $-\frac{c_\nu}{d_\nu}$ bezeichnet ist. Es kann ν so gewählt werden, dass der Punkt δ_ν von aussen dem Hauptkreise beliebig nahe rückt; dann kann ν so bestimmt werden, dass sich der Punkt $f_\nu(z)$ derselben Stelle des Hauptkreises [illegible] beliebig nähert. In $f'_{n\nu}(z)$ wird so mit passend [illegible] und ν, der zweite Factor des Nenners beliebig klein, während der erste endlich bleibt und die Factoren c_ν^2 und [illegible] Grenzen wachsen. Der Nenner wird also von der [illegible] und bleibt jedenfalls sehr gross im Verhältniss zu den W[illegible] von $f'_n(z)$ an anderen dem Hauptkreise benachbarten [illegible]. Hierdurch dürfte sich der scheinbar vorhandene W[illegible] lösen.

Messungen der elektrischen Zerstreuung im Freiballon.

Von **Hermann Ebert.**

(*Eingelaufen 14. Januar.*)

Die Herren Elster und Geitel haben eine Reihe interessanter Beobachtungen über die Elektricitätsverluste wohl isolierter, elektrisch geladener Körper in der Luft angestellt,[1]) die sich nicht einfacher und vollkommener erklären lassen als durch die Annahme, dass in der freien Atmosphäre immer, aber namentlich an klaren, sonnigen Tagen, eine gewisse Menge frei beweglicher, elektrisch geladener kleinster Teilchen vorhanden ist, welche den Kräften elektrisierter Körper folgend deren Ladungen durch ihre Eigenladung in einer bestimmten Zeit zu neutralisieren vermögen. Wenn für diese Teilchen die Bezeichnung „Jonen" eingeführt wird, so bleibt vorläufig die nähere Beschaffenheit derselben noch völlig unentschieden; dahingestellt vor allem bleibt, ob sie identisch mit den Jonen der gewöhnlichen Elektrolyse sind, ob sie also als Teilproducte irgend eines der Bestandteile der Atmosphäre aufzufassen sind,

---

[1]) J. Elster und H. Geitel: Ueber einen Apparat zur Messung der Elektricitätszerstreuung in der Luft; Physikal. Zeitschrift 1, S. 11, 1899. Ueber die Existenz elektrischer Jonen in der Atmosphäre. Terrestrial Magnetism and atmospheric electricity 4, S. 213, 1899. Ueber Elektricitätszerstreuung in der Luft. Ann. der Physik 2, S. 425, 1900. J. Elster: Messungen der elektrischen Zerstreuung in der freien atmosphärischen Luft an geographisch weit von einander entfernt liegenden Orten, Physikal. Zeitsckrift 2, S. 113, 1900. H. Geitel: Ueber die Elektricitätszerstreuung in abgeschlossenen Luftmengen, Physikal. Zeitschrift 2, S. 116, 1900.

oder nicht vielmehr jenen kleinen elektrisch geladenen Teilchen, den sog. „Corpuskeln" oder „Elektronen" verwandt sind, welche in röntgenisierten Gasen, oder bei der Bequerelstrahlung aufzutreten scheinen. Auch über ihren Ursprung in der Atmosphäre und die Art ihrer Regeneration wissen wir vorläufig nichts näheres. Zwar wird man geneigt sein, an einen Zusammenhang mit der von Lenard[1]) entdeckten Erscheinung zu denken, wonach Durchstrahlung mit ultraviolettem Lichte in Luft einen Zustand der Jonisierung herbeiführt; es bleibt freilich auch hier vorerst noch zu ermitteln, ob die bei dem „Lenardeffect" auftretenden Jonen identisch mit jenen Partikelchen sind, welche die von Elster und Geitel gefundenen Erscheinungen in der freien Atmosphäre bedingen.

Um weiteren Aufschluss in diesen für das ganze Problem der atmosphärischen Elektricität so wichtigen Fragen zu erhalten, war es vor allem nötig einen Ueberblick über die räumliche Verteilung der Jonen in dem Luftocean im allgemeinen zu gewinnen. Elster und Geitel fanden schon das bedeutsame Resultat, dass die Zerstreuungsgeschwindigkeit mit der Erhebung in der Atmosphäre zunimmt. Die Beobachtungen auf Bergen werden aber durch die negative Eigenladung des Erdkörpers erheblich gestört. Die Erhebungen wirken wie Spitzen und sammeln um sich einen Ueberschuss an positiv geladenen Jonen an, so dass eine unipolare Leitfähigkeit der angrenzenden Luftmassen eintritt; die Ladung eines negativ elektrisierten, isolierten Conductors wird schneller neutralisiert, als eine gleich grosse entgegengesetzten Vorzeichens. Es musste daher von Interesse sein, die Verhältnisse im freien Luftmeere kennen zu lernen und hier bietet sich der Luftballon als vortreffliches Hilfsmittel dar.

Ich habe von München aus zwei Fahrten mit dem Freiballon für Zerstreuungsmessungen in höheren Schichten unter-

[1]) Ph. Lenard, Ueber Wirkungen des ultravioletten Lichtes auf gasförmige Körper; Ann. d. Phys. 1, S. 486, und: Ueber die Elektricitätszerstreuung in ultraviolett durchstrahlter Luft; Ann. d. Phys. 3, S. 298, 1900.

nommen, eine Sommerfahrt und eine Winterfahrt, also bei möglichst verschiedener allgemeiner Wetterlage und voraussichtlich auch verschiedenem elektrischen Zustande der Atmosphäre. Bei beiden Fahrten übernahm Herr Dr. Robert Emden die Ballonführung; die Fahrten fanden mit dem von der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften dem Münchener Verein für Luftschiffahrt geschenkten Kugelballon „Akademie“ von 1300 cbm Inhalt von dem Platze der k. Militär-Luftschifferabteilung aus statt; sowohl bei den Vorarbeiten wie bei den Auffahrten selbst hatte ich mich des regsten Interesses und des Beistandes der Herren Offiziere der genannten Abteilung zu erfreuen, insbesondere von Seiten des Kommandeurs der Abteilung, des Herrn Hauptmann Weber, sowie der Herren Oberleutnants Casella und Dietel. Allen den genannten Herren spreche ich auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus.

Erste Fahrt am 30. Juni 1900.

Diese Fahrt war mehr eine allgemeine Orientierungsfahrt, bei der ausser dem luftelektrischen Apparate auch magnetische Instrumente mitgenommen wurden. Der Zerstreuungsapparat war nach Art des von Elster und Geitel beschriebenen zusammengesetzt. Es wurde besonderes Augenmerk darauf gerichtet, wie sich mit diesem Apparate im Ballon arbeiten lasse, welches die beste Art seiner Aufstellung sei, ob sich eine Eigenladung des Ballons bemerkbar mache, ob ferner die gleiche Genauigkeit wie bei festem Standorte erreicht werden könne, und ob sich endlich die Konstanten des Apparates bei der Fahrt merklich änderten.

Vor der Fahrt wurden Messungen am Aufstiegplatze in der Nähe des Ballons angestellt.

Der Aufstieg erfolgte bei klarem sonnigen Wetter um $8^h\ 55^m$ früh mit mässig starkem Auftrieb. Erst als $2^1/_2$ Sack Ballast ausgegeben wurden, stiegen wir auf 1000 m Meereshöhe, d. i. ca. 500 m über dem Boden, in welcher Höhe der Ballon ca. eine Stunde lang, fast ruhig über der nächsten Umgebung

Münchens stehend, erhalten werden konnte. Zunächst wurden ausschliesslich magnetische Messungen angestellt, über welche bei anderer Gelegenheit berichtet werden soll.

Gegen 10^h erreichten wir 1500 m, fielen aber stark, da wir in den Schatten einer Cumuluswolke geriethen. Nach Bremsung des Falles erhoben wir uns schnell auf 2000 m, gegen 11^h war 2600 erreicht und dann erhielt der Führer den Ballon längere Zeit in Höhen zwischen 2600 und 2900 m, was für die Anstellung der Beobachtungen sehr günstig war.

Die luftelektrischen Zerstreuungsmessungen konnten erst von 12^h an in Angriff genommen werden, als der Ballon auf der grössten bei dieser Fahrt erreichten Höhe von 2920 m angelangt war; er trieb dabei langsam über Erding nach Wartenberg zu, am Ostrande des Erdinger Mooses im Osten der Isar zwischen München und Landshut dahin. Intensive, brennende Sommersonne lag auf dem Ballon.

Die Zerstreuungsversuche wurden daher mit Schutzdach ausgeführt, unter mehrmaligem Zeichenwechsel. Die Montierung des Instrumentes war nach Vorversuchen in der Weise bewerkstelligt worden, dass an dem Füllansatz des Ballons eine Schnur befestigt war, an der unten ein runder Holzdeckel in der Mitte befestigt wurde. Von den Rändern desselben gingen drei Schnüre herunter zu einem Fussbrett, auf welches das Instrument gesetzt wurde. Es hing auf diese Weise innerhalb der Gondel, etwa in Augenhöhe. Das Aufhängen an den drei Schnüren gab dem Ganzen noch nicht die gewünschte Stabilität; bei der zweiten Fahrt wurden daher mit grösserem Vorteil feste Verbindungen durch dünne Messingstangen zwischen den beiden Holzscheiben angewendet und das Instrument auf dem unteren Brette festgeschraubt. Die Aufhängung am Füllansatze hat sich im Ganzen bewährt. Nur wenn der Ballon viel an Gas verloren hat und bei starkem Fallen sich seine untere Hälfte einbauscht, ist diese Aufhängung keine ruhige mehr. Lästig ist freilich, dass man namentlich im Anfange oft die Schnur verlängern muss, da der Ballon sich immer mehr aufbläht und der Füllansatz dadurch in die Höhe steigt. Es soll

daher bei einer dritten, bereits geplanten Fahrt der Versuch gemacht werden, aussen am Korbrande ein Tischchen zu befestigen, auf dem der Apparat dann aufgestellt werden soll. Durch die Aufstellung ausserhalb der Gondel hoffe ich eine noch stabilere Montierung zu erzielen. Ausserdem stört dann der Apparat das freie Hantieren in der Gondel nicht mehr.

Schon als die Messungen begannen, hatten sich an den verschiedensten Punkten gewaltige Cumuluswolken von der Hochebene aus erhoben, die mit ihren Köpfen bis in unsere Höhe heraufreichten. Es ist klar, dass in diesen direkt vom Boden aufsteigenden Luftmassen nicht wesentlich andere Jonenmengen erwartet werden konnten, wie am Boden selbst. Ausserdem hatte aber durch die Vertikalströmungen eine sehr intensive Mischung der verschiedenen Luftarten stattgefunden. Es kann daher nicht Wunder nehmen, dass bei diesem labilen Zustande der Atmosphäre die Leitfähigkeit der Luft in der Höhe nicht mehr unipolar, sondern innerhalb der Fehlergrenzen für beide Vorzeichen gleich gross war.

Dieses Beispiel lehrt recht augenfällig, dass es unmöglich ist, ein für alle Witterungslagen passendes Gesetz über die Verteilung der Luftelektricität mit der Höhe auffinden zu wollen. Die Atmosphäre ist kein ruhendes und kein einheitliches Gebilde. Luftschichten der verschiedensten Herkunft und Beschaffenheit lagern sich übereinander; auf- und absteigende Luftströme ändern die Eigenschaften der in derselben Höhe nebeneinander liegenden Luftmassen. Dementsprechend muss der jeweilige elektrische Zustand, den wir in der Höhe antreffen, ein sehr verschiedener sein.

Bei unserer Fahrt drangen wir auch verschiedene Male in die Köpfe von Cumulussäulen selbst ein; daselbst befand sich der Wasserdampf der Luft am Kondensationspunkt, wie auch das Assmann'sche Aspirationspsychrometer bestätigte. In diesem Falle war das Zerstreuungsvermögen nur noch $^1/_3$ bis $^1/_4$ von dem normalen, ganz in Uebereinstimmung mit dem von Elster und Geitel angestellten Versuche, dem zu Folge die Jonen

in ihrer Beweglichkeit lahm gelegt werden, sowie sie sich als Kondensationskerne mit grösseren Massen von kondensiertem Wasser beladen. Die Neutralisation einer bestimmten Ladung auf dem Zerstreuungskörper muss eben um so schneller erfolgen, einmal je mehr Jonen von entgegengesetztem Zeichen überhaupt pro Cubikmeter Luft vorhanden sind, und zweitens, je leichter sie beweglich sind.

Um 1^h 20^m mussten wir uns zur Landung fertig machen, da der Ballon rapid sank und kein weiterer Ballast mehr geopfert werden durfte. Die Landung erfolgte 1^h 43^m bei Ruhmannsdorf, ca. 12 km ostnordöstlich von Landshut. Unmittelbar nach derselben wurden am Landungsplatze noch mehrere Messungen angestellt; es zeigte sich, dass die Konstanten des Apparates und vor Allem der Isolationszustand des Instrumentes keinerlei Veränderungen erfahren hatten. Ziemlich grosse Beträge der Zerstreuung wurden beobachtet, die mittägliche Junisonne hatte die Atmosphäre kräftig durchstrahlt. Das erhaltene Zahlenmaterial lässt das Grösser- oder Kleinerwerden oder das Konstantbleiben der Zerstreuung sehr deutlich erkennen; aber die Zahlen selbst sind mit den später gewonnenen nicht direkt vergleichbar, weil das bei der ersten Fahrt benutzte Elektroskop nicht genügend isolierte, so dass das Korrektionsglied einen grösseren Betrag erhielt, als dass man noch das vollkommene Zutreffen der bei seiner Ableitung gemachten Voraussetzungen für gewährleistet halten konnte. Das Elektroskop war leider nicht von Herrn O. Günther in Braunschweig, den die Herren Elster und Geitel empfehlen, und dessen Elektroskope wundervoll isolieren, sondern von einer anderen Firma bezogen worden, deren Fabrikat nicht angenähert mit den Originalapparaten von Herrn Günther konkurrieren kann. Aus diesem Grunde verzichte ich auf eine detaillierte Mitteilung des bei dieser ersten Fahrt erhaltenen Zahlenmateriales.

Zweite Fahrt am 10. November 1900.

Nachdem die erste Fahrt gezeigt hatte, dass man mit der neuen Methode sehr wohl luftelektrische Messungen im Freiballon anstellen kann, dass die Instrumente sich durch die Fahrt selbst nicht ändern, und nachdem eine Reihe von Erfahrungen gesammelt und die Vorversuche als abgeschlossen anzusehen waren, wurde die zweite Fahrt zu dem ganz speziellen Zwecke der Messung der Zerstreuungskoefficienten in verschiedenen Höhen unternommen. Ausser den zur Bestimmung der meteorologischen Daten nöthigen Instrumenten (Fahr-Aneroid, Bohner'sches Aneroid, Assmann-sches Aspirationspsychrometer, welche Herr Dr. Emden regelmässig ablas) wurde nur noch ein Glasapparat zur Entnahme einer Luftprobe in der Höhe und der mit neuem Elektroskop von O. Günther ausgerüstete Zerstreuungsapparat mitgenommen.

Um von vornherein auf eine ruhig geschichtete Atmosphäre ohne wesentliche Vertikalstörungen rechnen zu können, wurde eine Winterfahrt für diesen Zweck in Aussicht genommen.

Die allgemeine Witterungslage vor und an dem Fahrttage war, der k. bayerischen meteorologischen Zentralstation zu Folge, etwa die nachstehende: Am 8. November hatte sich ein tiefes Depressionszentrum, welches am vorhergehenden Tage über den britischen Inseln gelegen hatte, nach Norden verschoben, während über Zentral-Europa von Osten her hoher Druck an Raum gewann. Das Maximum mit mehr als 770 mm Druck lag an der unteren Donau und über Südwest-Russland. Auf der bayerischen Hochebene lag am Morgen Nebel, der sich aber gegen 10 Uhr Vormittags über München lichtete und hellem, sonnigem Wetter Platz machte; von den Höhenstationen, namentlich von der Zugspitze her, war klarer Himmel signalisiert worden. Am 9. November hatte sich das nördliche Minimum weiter nordöstlich verschoben, das barometrische Maximum hatte sich über dem Südosten des Erdteiles erhalten; von ihm aus erstreckte sich eine Zone relativ hohen Druckes

westwärts durch den Kontinent bis zum Biscayasee. [illegible] stieg das Barometer fortwährend, das Wetter war [illegible] [illegible] Die meteorologischen Bedingungen schienen [illegible] [illegible] Fahrt günstig zu liegen; ein weiteres Aufschieben [illegible] [illegible] nicht ratsam, weil das Heranziehen eines [illegible] [illegible] vom Ocean her signalisiert war, und ein [illegible] [illegible] sich mittlerweile über dem [illegible] [illegible] begann. Daher wurde die Fahrt für den [illegible] [illegible] November, festgesetzt. Die an die [illegible] [illegible] geknüpften Erwartungen haben sich [illegible] [illegible] bestätigt. Die Fahrt fand innerhalb eines [illegible] [illegible] Luftdruckes statt, zwischen der nördlichen [illegible] [illegible] sich am Tage der Fahrt in Folge [illegible] [illegible] erheblich vertiefte, und dem [illegible] [illegible] entwickelnden Minimum.

[illegible] Tagen vor der Auffahrt waren [illegible] [illegible] genauer verfolgt worden: es [illegible] [illegible] von ca. 0,3—0,6 % für die [illegible] [illegible] 0,9 % für die negativen [illegible] [illegible] ergeben, freilich mit nicht [illegible] [illegible] Tageszeit und der Luftklarheit [illegible] [illegible] folgenden Werte von Herrn [illegible]

[illegible] November 1900.

[illegible]	1 71	$a_+ = 0.52\,\%$	[illegible]
[illegible]	[illegible]	$a_- = 0.72\,\%$	
[illegible]	[illegible]	$a_+ = 0.87\,\%$	[illegible]
[illegible]	[illegible]	$a_- = 0.44\,\%$	
[illegible]	[illegible]	$a_+ = 1.34\,\%$	[illegible]
[illegible]	[illegible]	$a_- = 0.49\,\%$	

[illegible] Elster und Geitel. [illegible] [illegible] Zeiteinheit (15 Minuten) [illegible] [illegible] des Coulomb'schen [illegible] [illegible] bezogen, dass der [illegible] [illegible] von 1 Volt erhalten [illegible] [illegible] der Isolation [illegible]

in Abrechnung gebracht). Aus diesen E werden die Grössen a durch Division durch $15 \cdot 0{,}4343 \cdot (1 - n)$ erhalten, wo n das Verhältnis der Capacität des Elektroskopes allein zu der Capacität des aus diesem und dem Zerstreuungskörper bestehenden System ist; bei dem benutzten Instrumente war $n = 0{,}5$, und der genannte Divisor $= 3{,}26$.

Diese Zahlen a geben die in der Minute am Zerstreuungskörper neutralisierte Elektricitätsmenge, ausgedrückt in Prozenten der ursprünglichen Ladung, unabhängig von der Grösse dieses Körpers und gleichgiltig, bis zu welchen Spannungen er geladen wurde, letzteres freilich genau nur so lange, als das Coulomb'sche Zerstreuungsgesetz gilt, vergl. weiter unten. Diese Zahlen sind also direkt mit den an anderen Apparaten erhaltenen vergleichbar.

Endlich ist $q = a_- / a_+$.

Man sieht, dass am Morgen bei leichtem Nebel und schwachem Wind aus NO. sehr geringe Zerstreuungen und ein Ueberwiegen der — Zerstreuung, wie es der normale Fall bei exponirten Punkten an der negativ geladenen Erdoberfläche ist, stattfand. Gegen Mittag wurde bei fortschreitendem Klarwerden der Luft die + Zerstreuung grösser, die Entladungsgeschwindigkeit für die — Ladung ging zurück, so dass $q < 1$ wurde.

Es herrschte fast vollkommene Windstille. Am Nachmittag erhob sich wieder schwacher NO.-Wind, die + Zerstreuung war noch grösser im Vergleich zur negativen.

Am Fahrttage selbst war früh um 6^h der Himmel noch völlig klar; gegen 7^h bildete sich aber plötzlich ein dichter Nebel, von dem freilich zu vermuthen war, dass er nur eine wenig mächtige, dem Boden unmittelbar anliegende Schicht bilde.

Es wurde zunächst auf dem Exerzierplatze der Luftschiffer-Abteilung trotz des eingetretenen dichten Nebels eine Zerstreuungsmessung für + Ladung angestellt. Sie ergab sich zwischen $7^h\ 47^m$ und $8^h\ 4^m$ zu nur $E_+ = 0{,}93$ ($a_+ = 0{,}29\,\%$) ganz entsprechend der schon früher festgestellten Thatsache, dass im Nebel die Zerstreuung stark herabgesetzt wird. Bei

dieser Messung bedeckte sich das Elektroskop sowie der Zerstreuungskörper schliesslich mit einem dichten Thauüberzuge; doch hat sich die Konstruktion des Elektroskopes trefflich bewährt, indem die Isolation selbst unter so ungünstigen Bedingungen nicht litt.

Ich hielt es für wünschenswert, wenigstens einen orientierenden Versuch bei dieser Gelegenheit darüber anzustellen, wie der herangeführte Ballon auf den Zerstreuungskörper wirkt. Ich stellte daher den Zerstreuungsapparat auf einen Wagen ca. 1 m über dem Boden an einer Stelle auf, an der der Ballon auf seinem Wege vom Ballonhaus bis zur Gondel dicht vorüber geleitet werden konnte. Natürlich war es dazu nötig, das Schutzdach abzunehmen. Als aber der Zerstreuungskörper + geladen wurde, sank der Blättchenausschlag trotz des allerdings schwachen Windes und der fortschreitenden Betauung nicht, sondern nahm im Gegenteil zu, in vier Minuten einem Ansteigen des Potentiales von 220 auf 228 entsprechend. Also wurde entweder freie positive Ladung aus dem Nebel auf den Zerstreuungskörper übertragen, oder aber das Instrument war starken Influenzwirkungen von oben her ausgesetzt. Das Elektroskop wurde also negativ bis zu — 222 Volt geladen. Ein Ueberschieben des Daches verminderte den Ausschlag, weil die Kapazität des Systems dadurch vermehrt wurde, ebenso das Annähern von grösseren mit dem Boden verbundenen leitenden Massen. Als der Ballon vorübergeführt wurde, spreizten die geladenen Blättchen weiter auseinander und schlugen in dem Momente, als die Ballonkugel dem Zerstreuungskörper am nächsten gekommen war, gegen die Schutzplatten, so dass das Elektroskop sich vollständig entlud. Hiernach würde sich der Ballon wie ein negativ geladener Körper verhalten. Die Beobachtung bedarf indessen der Bestätigung bei günstigeren atmosphärischen Bedingungen. Bekannt ist ja, dass andere Beobachter, z. B. Tuma[1]), der mit drei Tropfen-

[1]) J. Tuma, Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität III. Luftelektricitätsmessungen im Luftballon. Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. math.-phys. Cl., Abteil. IIa, p. 227, 1899.

collectoren in verschiedener Höhe und zwei Elektroskopen, einem Vorschlage Börnsteins[1]) folgend, arbeitete, keine Ballonladung nachweisen konnte. Sollte der Ballon im vorliegenden Falle wirklich negativ geladen gewesen sein, so müssen wir annehmen, dass sich seine Ladung sehr bald zerstreut haben wird, namentlich unter Bedingungen wie bei unserer Fahrt, bei der der Ballon in wenigen Minuten in die intensivste Bestrahlung durch die Sonne geriet. Immerhin erschien es sicherer, auch im Ballon mit dem Schutzdach zu arbeiten, wodurch zugleich die Anordnung vollkommen derjenigen analog wurde, welche bei den Beobachtungen auf der Erde Verwendung fand. Freilich erhält man dann bei der relativen Ruhe der unmittelbar umgebenden Luftmassen gegen den Ballon und Alles, was dieser mit sich führt, kleinere Werthe für die Zerstreuung, vergl. weiter unten.

Um 8^h 19^m erfolgte der Aufstieg mit starkem Auftrieb; in kürzester Zeit hatten wir die Nebelschicht durchstossen und befanden uns schon in 700 m Meereshöhe (200 m über dem Boden) in glänzendstem Sonnenlichte unter tiefblauem Himmel, an dem nur einige zarte Cirruswolken standen. Die ganze Hochebene war mit einem dichten, wogenden, silberglänzenden Nebelmeere überdeckt, aus dem sich auf der einen Seite die gewaltige, schneebedeckte Kette der Alpen in ihrer ganzen Erstreckung in überraschender Deutlichkeit heraushob; auf der anderen Seite brandete das Nebelmeer gegen die schwarzen Rücken des bayerischen Waldes und Böhmerwaldes.

Wir haben uns bei der Fahrt am 10. November im Ganzen innerhalb dreier verschiedener Luftschichten bewegt, welche sich sowohl durch ihren Wasserdampfgehalt, als auch durch ihre Strömungsrichtung und Strömungsgeschwindigkeit deutlich von einander unterschieden. Die in derselben angestellten Messungen werden daher zweckmässig auch gesondert von einander behandelt.

---

[1]) R. Börnstein, Elektrische Beobachtungen bei Luftfahrten unter Einfluss der Ballonladung. Wied. Ann. 62, p. 680, 1897.

1. Luftschicht: vom Boden bis ca. 1200—1300 m.

Die Luftschicht, in die wir nach dem Passieren der Nebelschicht eindrangen, war der Bodenschicht noch am ähnlichsten beschaffen.

Leider wurde an diesem Tage die Nebelschicht am Boden nicht durch die einfallende, in unserer Höhe brennende Sonnenstrahlung aufgelöst. Daher sind die zur gleichen Zeit am Boden angestellten Beobachtungen nicht mit den Ballonbeobachtungen direkt vergleichbar. Herr Direktor Dr. Erk hatte die Liebenswürdigkeit, an der meteorologischen Zentralstation stündliche Bestimmungen des Barometerstandes, der Temperatur, der relativen Feuchtigkeit, des Dunstdruckes, der Niederschlagsmenge, der Windrichtung und -stärke, sowie der Bewölkung von früh 7^h bis abends 8^h am Fahrttage anstellen zu lassen. Herr Ingenieur C. Lutz hat für diesen Tag gleichzeitig den Zerstreuungskoefficienten auf der Attika des Mittelbaues der technischen Hochschule abwechselnd für beide Vorzeichen mit einem mit dem im Ballon benutzten genau verglichenen Instumente angestellt. Ich glaube indessen auf die Mitteilung dieses an sich wertvollen Beobachtungsmateriales an dieser Stelle verzichten zu sollen, da die Bedingungen unterhalb und oberhalb der Nebelschicht viel zu ungleich waren, um irgend welche Schlüsse zu gestatten. Es sei nur bemerkt, dass der Barometerstand während der Dauer unserer Fahrt in München fortwährend im Sinken begriffen war und der Feuchtigkeitsgehalt der Luft nahe am Sättigungspunkte sich erhielt; der Zug der Nebelmassen wurde um 11^h als aus Osten kommend notiert.

Diese erste Schicht passierten wir rasch, da uns hauptsächlich an der Durchforschung der höheren Schichten lag; Zerstreuungsmessungen wurden in ihr nicht angestellt, da der Apparat zunächst montiert, die Orientierung im Terrain vorgenommen und die Fahrtrichtung festgestellt werden mussten.

2. Luftschicht: von 1240—3000 m.

Wir stiegen rasch an und kamen um 8^h 30^m schon in einer Höhe von 1240 m offenbar in eine anders geartete

Luftschicht, wie die Angaben der Temperatur, der relativen Feuchtigkeit, und namentlich das aus ihnen nachher berechnete Mischungsverhältnis zwischen trockener Luft und Wasserdampf deutlich zu erkennen geben. Herr Dr. Emden, der das aus ca. 60 zusammengehörigen Ablesungen der beiden Thermometer, des Psychrometers und des Aneroides bestehende, reiche metereologische Beobachtungsmaterial einer eingehenden Diskussion unterworfen hat, wird das Gesagte an einer anderen Stelle demnächst noch näher begründen.

Unter dem Mischungsverhältnis ist hier das Gewicht des Wasserdampfes in Kilogrammen, welches auf 1 kg der denselben enthaltenden trockenen Luft kommt, verstanden. Diese Zahl gibt eine den Feuchtigkeitsgehalt der Luft besser als die relative Feuchtigkeit oder der Dunstdruck charakterisierende Grösse an, da sie sich bei allen Zustandsänderungen nicht wie jene Zahlen mit ändert, solange keine Kondensation eintritt. In dieser neuen Luftschicht, welche durch angenähert adiabatische Temperaturabnahme mit der Höhe und ein konstantes Mischungsverhältnis von 0,0024 kg Wasserdampf pro Kilogramm trockener Luft ausgezeichnet war, erhielten wir uns bis 11^h, langsam bis zu 3000 m ansteigend. Aus Geräuschen (z. B. Pfeifen von Lokomotiven) sowie durch Einvisieren gegen das Gebirge hin konnten wir trotz des dichten Bodennebels mit Sicherheit konstatieren, dass wir uns in einer fast ruhenden Luftschicht befanden, die uns nur ganz langsam nach Osten weiter führte.

Um zunächst festzustellen, welchen Einfluss das Schutzdach auf die Entladungsgeschwindigkeit hat, wurde $8^h\,47^m$ bis $8^h\,52^m$ in ca. 1800 m Höhe zunächst ohne Schutzdach gemessen und $E_+ = 9{,}95$ gefunden. Unmittelbar darauf von $8^h\,56^m$ bis $9^h\,11^m$ wurde in nur wenig grösserer Höhe von ca. 1950 m mit Schutzdach $E_+ = 3{,}79$ beobachtet, wobei natürlich alles auf die Zeiteinheit von 15^m umgerechnet ist.

Man sieht also, dass das Schutzdach, welches den freien Luftzutritt beeinträchtigt, freilich die Zerstreuungsgeschwindigkeit stark herabsetzt. Immerhin werden selbst im Ballon Werte

erhalten, welche sehr gut messbar sind. Absolut ruhig ist die Luft ja auch am Ballon nicht, da bei jeder Vertikalbewegung mehr oder weniger starker Vertikalwind sich entwickelt, welcher die mit den Jonen beladene Luft mit hinreichender Relativgeschwindigkeit an dem Zerstreuungskörper vorüberführt. Da mit Schutzdach genügend grosse Zerstreuungswerte auch im Ballon erhalten werden, möchte ich nicht raten, sich darauf zu verlassen, dass das den innerhalb der Gondel hängenden Apparat umgebende Tau- und Strickwerk denselben genügend vor elektrostatischen Einwirkungen schützt.

Das Arbeiten mit Schutzdach bewahrt zugleich vor lichtelektrischen Einflüssen bei der in der Höhe viel intensiveren Sonnenstrahlung.

Zeit	Höhe	Temperatur	Relative Feuchtigkeit	Mischungsverhältnis
$8^h\ 56^m$ — $9^h\ 11^m$	1975 m	+ 4,2° C.	38 %	0,0024
$9^h\ 15^m$ — $9^h\ 26^m$	2160 „	+ 2,7° „	38 %	0,0024
$9^h\ 28^m$ — $9^h\ 43^m$	2275 „	+ 1,7° „	44 %	0,0024
$9^h\ 45^m$ — $10^h\ 00^m$	2420 „	+ 0,5° „	47 %	0,0024
$10^h\ 18^m$ — $10^h\ 33^m$	2890 „	— 3,8° „	55 %	0,0022
$10^h\ 38^m$ — $10^h\ 53^m$	2965 „	— 4,7° „	56 %	0,0022

Dagegen möchte ich bei der nächsten Fahrt den Versuch machen, die Zerstreuungsgeschwindigkeit durch einen weitmaschigen gleichnamig geladenen Fangkäfig aus Draht zu steigern, entsprechend dem bekannten Versuche von Elster und Geitel. Dieser Käfig würde den namentlich bei Hochfahrten, bei denen man die Luftschichten schnell wechselt, nicht zu unterschätzenden Vorteil gewähren, dass man in kurzer Zeit viele Einzelmessungen anstellen kann.

Um $8^h\ 56^m$, also 37 Minuten nach dem Verlassen des Erdbodens, begannen die eigentlichen Messungen der Elektricitätszerstreuung in der Luft; wir konnten annehmen, dass in dieser Zeit sich eventuell vorhanden gewesene Ladungen

am Ballon und dem Korbe genügend zerstreut hatten, und das aus den folgenden Zahlen ersichtliche Ueberwiegen der negativen Zerstreuungsgeschwindigkeit auch für das freie Luftmeer in unserer Höhe gelte. Da während der Fahrt das Netzwerk keine Verschiebungen gegen die Ballonhülle erleidet, ist auch das Auftreten von reibungselektrischen Spannungen nicht wahrscheinlich.

Die folgenden Zahlen wurden in der bis ca. 3000 m reichenden Luftschicht mit dem nahezu constanten Mischungsverhältnis 0,0024 erhalten:

In dieser Tabelle ist die angegebene Höhe der Mittelwert aus den Einzelhöhenwerten, welche zu den Zeiten gehören, innerhalb derer die Ladungszerstreuung stattfand. Diesen Mittel-

Spannungen	Spannungsabnahme pro 15 Minuten			
214—196	18 Volt	$E_+ = 3{,}79$	$a_+ = 1{,}16\,\%$	$q = 1{,}81$
192—171	29 „	$E_- = 6{,}84$	$a_- = 2{,}10\,\%$	
222—187	35 „	$E_- = 7{,}44$	$a_- = 2{,}29\,\%$	$q = 1{,}28$
221—193	28 „	$E_+ = 5{,}86$	$a_+ = 1{,}79\,\%$	
225—206	19 „	$E_+ = 3{,}81$	$a_+ = 1{,}17\,\%$	$q = 1{,}40$
224—198	26 „	$E_- = 5{,}33$	$a_- = 1{,}63\,\%$	

höhen entsprechend sind Temperatur, prozentuale Feuchtigkeit und Mischungsverhältnis aus Kurven entnommen, welche die betreffende Grösse als Funktion der Höhe darstellen. Die angegebenen Spannungen sind die am Anfange und am Ende der Beobachtungszeit aus der Aichkurve entnommenen Voltzahlen; die Spannungsabnahme ist der Differenz dieser Zahlen gleich, wenn die Beobachtungszeit 15 Minuten betrug; sonst ist sie auf diese Zeit reduziert unter der allerdings nicht ganz zutreffenden Annahme, dass die Spannung mit der Zeit proportional abnimmt.

Entsprechend der gleichförmigen Beschaffenheit der Luftschicht liegen die a-Werte ziemlich nahe bei einander. Neben

die Vormittagswerte, die an klaren Tagen am Boden vor und nach der Fahrt erhalten wurden (vgl. z. B. die S. 518 angeführten Zahlen), gehalten, zeigen sie Folgendes: Die Zerstreuungsgeschwindigkeit ist in der Höhe von 1800 bis 3000 m unzweifelhaft grösser als am Boden. Dabei ergibt sich etwa dasselbe Verhältnis für die Entladungsgeschwindigkeiten der beiden Elektricitätsarten wie unten, eine negative Ladung wird etwa 1,5 mal schneller entladen wie eine positive. Bis zu diesen Höhen hinauf muss also am genannten Tage ein Ueberwiegen der Anzahl der freien + Jonen angenommen werden. Da diese sich langsamer bewegen als die — Jonen, so muss thatsächlich das Verhältnis der Anzahl der + Jonen gegenüber der Zahl der — Jonen im Cubikmeter noch grösser als 1,5 gewesen sein.

Wir haben also die auch schon auf Grund anderer Erscheinungen vermutete[1]), positiv geladene Schicht, der ein abnehmendes negatives Potentialgefälle entsprechen würde, in einer Erstreckung bis zu 3000 m Höhe durch Einfangen der Jonen selbst nachgewiesen.

Da uns das für diese Höhenschicht erlangte Zahlenmaterial zunächst ausreichend erschien, fassten wir um $10^h\ 53^m$ den Entschluss, höher hinauf zu gehen. Der Führer gab eine grössere Menge von Ballast aus, mit der er bis dahin sehr sorgsam Haus gehalten hatte. Da wir darauf gefasst sein mussten, bei der erfolgenden schnellen Erhebung Luftschichten von rasch wechselndem Verhalten zu durchqueren, also Messwerte zu erhalten, welchen keine genau vergleichbare Bedeutung zuzuschreiben war, benutzte ich die Zeit, um nochmals ohne Schutzdach zu messen. Ich erhielt für negative Ladung die enorme Zerstreuung $E = 19{,}24$. Ob sich trotz der Schwärzung des messingenen Zerstreuungskörpers unter dem Einflusse der intensiven Sonnenstrahlung hier doch vielleicht noch lichtelektrische Einflüsse mit geltend gemacht haben, wage ich nicht zu entscheiden.

---

[1]) Vergl. z. B. Sv. Arrhenius, Ueber die Ursache der Nordlichter, Physikal. Zeitschrift 1, S. 102, 1900.

3. Luftschicht: über 3000 m.

Um 11^h^ machte Herr Dr. Emden auf Grund seiner Ablesungen die Bemerkung, wir seien in andere meteorologische Bedingungen eingetreten. Diese Vermutung haben die reduzierten Beobachtungen bestätigt; wir traten um diese Zeit oberhalb 3000 m in eine viel stärker bewegte Luftschicht ein, die uns nach Norden abtrieb. Aus den unten folgenden Zahlen ist ersichtlich, dass sie sich vor Allem durch grössere Trockenheit auszeichnete. Denn das Mischungsverhältnis sank beim Eintreten in die neue Schicht plötzlich von 0,0022 auf 0,0014 kg, welchen Wert es in dieser dritten Schicht constant beibehielt. Damit steht im Einklange, dass auch das Zerstreuungsvermögen erheblich gesteigert war, und zwar für beide Vorzeichen.

Die nachstehenden Zahlen lehren Folgendes:

In der über 3000 m angetroffenen, der Durchstrahlung stärker ausgesetzten trockeneren, höheren Schicht war das Leitvermögen der Luft erheblich gesteigert und erreichte Werte, welche die zur gleichen Jahreszeit an klaren Tagen erreichten Maximalentladungsgeschwindigkeiten am Boden um das Drei- bis Vierfache übertrafen. Dabei war das Verhältnis der Zerstreuungskoeffizienten für beide Jonenarten nahezu das gleiche (q Mittel = 1,02) geworden.

In dieser Schicht wurden die Messungen nicht mehr durch das unipolare Verhalten des Erdkörpers beeinflusst. Die Jonenzahl ist nach diesen Ergebnissen in dieser grösseren Höhe also unverkennbar erheblich grösser als unten. Die grössere Entladungsgeschwindigkeit kann freilich auch durch eine grössere Beweglichkeit der Jonen in der dünneren Luft zum Teil wenigstens mitbedingt sein.

Zwischen $12^h\ 30^m$ und $12^h\ 50^m$ erreichten wir die Maximalhöhe von 3870 m. Um 1^h waren wir wieder auf 3000 m gefallen, traten in die mittlere Luftschicht ein und senkten uns schnell gegen das Thal des Regen hinab.

Zeit	Höhe	Temperatur	Relati Feuchtig
11h 7m — 11h 22m	3400 m	— 8,0° C.	40 %
11h 28m — 11h 43m	3705 „	— 8,0° „	40 %
12h 10m — 12h 25m	3710 „	— 8,0° „	40 %
12h 35m — 12h 50m	3770 „	— 8,5° „	42 %

Während wir rasch fielen, wurde von 12h 58 noch die Entladungsgeschwindigkeit für + Ladung den Höhen 3200 und 1000 m gemessen und trotz de Vertikalbewegung nur $E_+ = 3,99$ erhalten, in Ueber mung mit den geringeren Zerstreuungswerten, welche an Aufstiege in den unteren Luftschichten erhalten wurde

Die Landung erfolgte um 1h 25m bei der Nösslinger nahe dem Dorfe Nössling bei Viechtach in Niederbayern einer bewaldeten Höhe von ca. 700 m Meereshöhe, ange des Böhmer Wald-Gebirges.

Unmittelbar nach der Landung wurden wiederum sungen auf einer Waldwiese am Landungsorte angestellt. Gründen, welche ich noch nicht recht aufzuklären vermag ergaben sich auffallend grosse Entladungsgeschwindigkeit Eine von 10h 4m—10h 15m im Ballon angestellte Isolation probe mit Schutzdach, aber ohne Zerstreuungskörper hat bereits gezeigt, dass das Instrument nicht etwa durch die Be tauung am Morgen gelitten hatte.

Um zu prüfen, ob sich auch bei der weiteren Fahrt, bei der Landung, und dem sich daran anschliessenden sehr mühe vollen Transport durch das unwegsame Waldgebirge das In strument unverändert erhalten habe, wurde noch in der auf die Fahrt unmittelbar folgenden Nacht eine Isolationsbestim mung vorgenommen und der Apparat zu diesem Zweck Abends 10h 15m positiv geladen. Der Ausschlag war 9,50 Skalenteile einer Spannung von 225 Volt entsprechend. Am andern

…nungen	Spannungs-abnahme pro 15 Minuten			
—6—179	47 Volt	$E_+ = 8,14$	$a_+ = 2,50\,\%$	$q = 1,10$
—4—174	40 „	$E_- = 8,97$	$a_- = 2,75\,\%$	
—8—169	39 „	$E_- = 9,00$	$a_- = 2,76\,\%$	$q = 0,93$
—11—169	42 „	$E_+ = 9,62$	$a_+ = 2,96\,\%$	

…rgen früh um 4^h 7^m war der Ausschlag der Blättchen nur … einen Skalenteil zurückgegangen, was einem Verluste von …r 7 Volt Spannung (von 225 anf 218) in der zwischen-…genden Zeit von fast 6 Stunden entspricht; der Elektroskop-…ckel war dabei geschlossen.

Jene grossen Werte am Landungsplatze konnten also nicht …solationsfehlern zugeschrieben werden, sondern hatten offenbar …n rein lokalen Ursachen ihren Grund.

Nach der Rückkehr nach München wurde zur Prüfung der Konstanten geschritten, deren Endergebnis war, dass durch die Fahrt an dem benutzten Instrumente keinerlei, die Messungen merklich beeinflussende Aenderung eingetreten war.

Eines bemerkenswerten Umstandes soll hier noch gedacht werden, der sich bei allen Messungen, sowohl den am Boden, wie den im Ballon angestellten, zeigte:

Um bei den Beobachtungen selbst eine Kontrolle zu haben, wurden die Elektroskopausschläge ausser am Anfange und am Ende der Zerstreuungszeit noch in einem dazwischen liegenden Momente, meist genau in der Mitte beider Zeiten, also $7^1/_2$ Minuten nach Beginn der Beobachtung notiert. Dabei hat sich in der überwiegenden Zahl von Fällen das Resultat ergeben, dass, wenn man die Zerstreuungskoeffizienten aus der Spannungsabnahme während der ersten $7^1/_2$ Minuten und während der zweiten gleich langen Zeit berechnet, man nicht dieselben Zahlen erhält. Die zweiten Zahlen sind bis auf wenige Ausnahmen stets grösser als die ersten, d. h. der Elektricitätsverlust,

in Prozenten der jedesmaligen Anfangsladung berechnet, wächst, wenn diese selbst abnimmt. Dagegen zeigt die gleichen Zeitintervallen entsprechende direkte Spannungsabnahme bei Weitem nicht so grosse Verschiedenheiten, wenn sie auch nicht vollkommen konstant ist. Dieses Verhalten ist unterdessen von Geitel auch an eingeschlossener Luft beobachtet worden. Dies weist auf die Thatsache hin, dass in gleichen Zeiten immer bestimmte Mengen freier Jonen gebildet werden. Aus der Luft bei der Neutralisation der Ladung eines isolierten Konduktors entnommene Jonen werden immer nur in dem Masse regeneriert, dass der Luft ein durch Druck und Temperatur bestimmter Gehalt an freien Jonen zukommt. Im Freien kann die Erscheinung natürlich nicht so rein zum Ausdruck kommen, wie bei eingeschlossener Luft. Dass sie aber doch so deutlich ausgesprochen ist, dürfte immerhin bemerkenswert sein.

Ich möchte noch anführen, dass Lenard bei seinen Versuchen an der durch Bestrahlung mit ultraviolettem Lichte elektrisch leitend gemachten Luft etwas Aehnliches beobachtet hat;[1]) die in derselben entladene Elektricitätsmenge wächst zwar mit der Spannung des geladenen Konduktors, aber langsamer wie diese, so dass bei niedrigeren Potentialen relativ grössere Elektricitätsmengen neutralisiert werden, als dem Coulomb'schen Zerstreuungsgesetze entsprechen würde. Man nähert sich mit steigenden Spannungen gewissermassen einer Art Sättigungsgrenze, der Strom der herzueilenden entladenden Jonen kann nicht über eine gewisse Grenze gesteigert werden.

Man hat hier ganz ähnliche Erscheinungen, wie sie J. J. Thomson und E. Rutherford in röntgenisierter Luft nachweisen.[2])

[1]) Ph. Lenard, Ueber die Elektricitätszerstreuung in ultraviolett durchstrahlter Luft. Ann. d. Phys. 3, S. 304, 1900.

[2]) „Die Entladung der Elektricität durch Gase" von J. J. Thomson, deutsch von P. Ewers. 1900. Leipzig, J. A. Barth. S. 21 ff.

Resultate:

1. Luftelektrische Messungen nach der neuen von Elster und Geitel ausgearbeiteten Methode sind im Freiballon mit genügender Sicherheit und mit verhältnismässig geringer Mühe neben den sonst üblichen meteorologischen Beobachtungen ausführbar.

2. Bei der grossen Wichtigkeit der Zerstreuungsmessungen gerade in den höheren Schichten der Atmosphäre sowie bei den ganz neuen Gesichtspunkten, welche der Nachweis freier Jonen in der Atmosphäre in die ganze Lehre von der atmosphärischen Elektricität gebracht hat, ist es dringend erwünscht, dass die Bestimmungen der relativen Jonenzahlen mit in das Programm einer grösseren Anzahl von wissenschaftlichen Luftfahrten aufgenommen werden.

3. Mit zunehmender Höhe ergibt sich auch unabhängig von der unipolaren Einwirkung des Erdkörpers, wie er sich besonders bei Bergbeobachtungen störend bemerklich macht, eine unzweifelhafte Zunahme der Zerstreuungsgeschwindigkeit.

4. Die unteren Luftschichten können sich bis hinauf zu 3000 m Höhe qualitativ insofern den dem Boden unmittelbar anliegenden ähnlich verhalten, als auch in ihnen im freien Luftraume die — Ladungen schneller als die + zerstreut werden.

5. In grösseren Höhen scheint sich mit der Zunahme der absoluten Jonenzahl diese unipolare Leitfähigkeit mehr und mehr dahin auszugleichen, dass beide Ladungsarten etwa gleich schnell zerstreut werden.

6. Dabei findet das von Geitel für eingeschlossene Zimmerluft nachgewiesene Verhalten auch für fast alle an den Ballon herantretenden Luftproben statt, dass der in Prozenten der jedesmaligen Anfangsladung berechnete Elektricitätsverlust mit abnehmender Anfangsladung wächst.

7. Die Spannungsabnahme in gleichen Zeiten ist dagegen ungefähr konstant, dem Umstande entsprechend, dass verbrauchte Jonen auch in der freien Atmosphäre immer nur mit bestimmter Geschwindigkeit und in bestimmter Zahl zuwandern, sei es, dass

nur eine ganz begrenzte Zahl wirklich neugebildet wird, sei es, dass sie nur in bestimmter Menge gegen die Verbrauchsstelle heranwandern können.

8. Die Zunahme der Leitfähigkeit mit der Höhe findet nicht stetig etwa in der Weise statt, dass man hoffen dürfte, eine einfache Formel mit wenigen Konstanten aufstellen zu können, die für alle Fälle diese Zunahme mit der Höhe darzustellen vermöchte, sondern sprungweise; die speziellere physikalische Beschaffenheit der Luftschicht, in der man sich befindet, übt einen massgebenden Einfluss aus.

9. In trockener klarer Luft ist das Zerstreuungsvermögen in der Höhe gerade so wie am Erdboden gross; in dem Grade, wie der Wasserdampfgehalt zunimmt, und ganz besonders, wenn dieser sich dem Kondensationspunkte nähert, oder gar in Form feiner Nebelbläschen ausfällt, wird die Entladungsgeschwindigkeit für beide Zeichen erheblich herabgesetzt. —

Nach diesen Ergebnissen erscheint es im hohen Grade wünschenswert, mit Wasserstoffgasfüllung die über 4000 m liegenden Schichten der Atmosphäre auf ihr Zerstreuungsvermögen hin zu untersuchen. Hierdurch dürften sich Gesichtspunkte gewinnen lassen, welche für die Erklärung einer grossen Reihe von Erscheinungen von der grössten Bedeutung sind.

Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen.

Von S. Finsterwalder.

(*Eingelaufen 1. Dezember.*)

Es ist bekannt, dass die langgezogenen Schuttrücken, welche die Zuflüsse eines Gletschers auch nach ihrer Vereinigung noch trennen, eigentlich Eisrücken sind, welche nur eine dünne, selten mehr als 0,3 m mächtige Schuttlage tragen, die das darunterliegende Eis vor der Abschmelzung schützt. Nur in relativ seltenen Fällen kommt diese Schuttlage in der Weise zu stande, wie es die populäre Erklärung der Moränen voraussetzt, dadurch nämlich, dass Steine auf den Gletscher fallen und auf der Oberfläche desselben durch die Bewegung des Eises thalab getragen werden.[1]) Diese Erklärung setzt nämlich als selbstverständlich voraus, dass Steine, die auf die Oberfläche fallen, auch dauernd auf derselben verbleiben. Das ist aber nur richtig, wenn es sich um die Oberfläche des abschmelzenden Gletschers handelt und daher kann jene Erklärung auch nur für Moränen, welche unterhalb der Vereinigung von Gletscherzuflüssen innerhalb des Abschmelzungsgebietes entstehen, gelten. Es vereinigen sich aber die Zuflüsse zumeist schon im Firnfelde, also im Gebiete dauernder Schneezufuhr, und hier wird ein auf die Oberfläche gelegter Stein zunächst immer weiter in's Innere wandern und erst weit unten im Abschmelzungsgebiet wieder irgendwo zum Vorschein kommen. Nun gibt es aber keine Vorgänge, durch welche

---

[1]) Diese Bemerkung gilt jedenfalls für die Gletscher der Ostalpen mit ihren hoch und frei gelegenen Firnfeldern, die von den Kämmen wenig überragt werden. In den Westalpen liegen die Verhältnisse infolge des steileren Aufbaues nicht unwesentlich anders und hier trifft die übliche Erklärung auch häufiger zu. Sie versagt aber für die Moränen der Gletscher vom skandinavischen oder arktischen Typus und besonders für jene der diluvialen Gletscher.

Steine dauernd mitten auf die Firnfelder gelegt werden und wenn etwa im Firnfelde eine Felsinsel auftauchen sollte, so werden an deren Umrandung keine anderen Vorgänge statthaben als an der äusseren Umrandung des Firnfeldes überhaupt. Der dort producierte Schutt liegt bereits am Grund des Gletschers, da die Umrandung ja nichts anderes ist als die Linie, an welcher der Gletschergrund an die Oberfläche tritt; er wird also in der Regel, wenn anders die Gletscherbewegung eine annähernd stetige ist, am Grunde weiter wandern und nicht in das Innere des Eises gelangen. Eine Ausnahme entsteht aber dann, wenn konvexe Unebenheiten des Gletschergrundes (Rücken oder Kuppen) derart beschaffen sind, dass sie an der Stossseite als Teiler der Strömungslinien des Eises wirken, also vom Eise umflossen werden, während an der Leeseite eine Wiedervereinigung der vorher getrennten Strömungslinien statthat. Eine ähnliche Vereinigung ursprünglich getrennter Strömungslinien findet auch an der Leeseite von Rücken statt, welche von der äussern Umrandung des Firnfeldes ins Innere einspringen und zwei Mulden scheiden. In beiden Fällen geht von der Leeseite der betreffenden Unebenheit eine Wand von vorher getrennten und nunmehr vereinigten Strömungslinien aus, welche mit Schutt beladen sind, da sie vom Grunde des Gletschers kommen, an welchem unter normalen Verhältnissen der Schutttransport erfolgt. Auf diese Weise habe ich das Entstehen von Innenmoränen erklärt.[1]) Eine solche Innenmoräne stellt demnach eine innerhalb des Eises verlaufende, von einer Unebenheit des Gletschergrundes ausgehende und mit ihrem Fusse in der Untermoräne wurzelnde aufrechtstehende Schuttwand vor. An ihrem oberen Ende reicht sie nicht bis zur Gletscherfläche, dagegen wird sie weiter abwärts im Schmelzgebiete des Gletschers zum Ausschmelzen kommen und als Mittelmoräne erscheinen. Ursprünglich konnte ich als Gründe für die Richtigkeit dieser Erklärung nur das Vorkommen von gekritzten Geschieben in den Mittelmoränen und die augenscheinliche Vermehrung ihres

[1]) Der Vernagtferner, seine Geschichte und seine Vermessung in den Jahren 1888 und 89. Graz 1897, S. 52 ff.

Schuttinhaltes, je mehr man sich dem Ende nähert, anführen.[1]) Neuere Beobachtungen haben mir jedoch eine direkte Bestätigung der erwähnten Ansicht geliefert.

Die erste verdanke ich meinem Freunde Herrn Professor Dr. A. Blümcke. Während seines diesjährigen durch Geschwindigkeitsmessungen am Hintereisferner veranlassten Aufenthaltes am Hochjochhospiz im hinteren Oetzthale war Ende August ein sehr schweres Hochgewitter niedergegangen. Ein stark angeschwollener, vom rechten Thalgehänge herabkommender Bach, war auf den Hochjochferner ausgetreten und hatte die oberflächliche Schuttlage einer kleinen Mittelmoräne nahe dem Ende auf die Erstreckung von 25—30 m vollständig abgeschwemmt, so dass das blanke Eis zu Tage trat. Man sah deutlich, dass der im Eise eingebackene Schutt in einzelne Reihen geordnet war, die sich in der Längsrichtung der Moräne erstreckten. Nach wenigen Tagen begann sich infolge der Ablation die Moräne in der Weise zu regenerieren, dass zuerst der vorhin beschriebenen Anordnung des Schuttes im Eisinnern entsprechend parallele Teilmoränen auftraten, deren Trümmer später zu einer zusammenhängenden Decke verschmolzen. Als ich Mitte September die Stelle besuchte, war die neue Decke von der alten kaum mehr zu unterscheiden, doch bewies der noch sichtbare Rand der alten Moränendecke, dass kein Stein derselben auf das früher abgewaschene Gebiet gerutscht war.

Gelegentlich der von Prof. E. Richter in Graz veranlassten internationalen Gletscherkonferenz am Rhonegletscher konnte den Teilnehmern auf dem Rücken der grossen Mittelmoräne des Unteraargletschers eine vom Abschwung bis nahe zum Gletscherende reichende, 7 Kilometer lange fast ununterbrochene Linie gezeigt werden, an der allenthalben Untermoränenmaterial austritt. Noch deutlicher liessen sich jedoch diese Verhältnisse am Hintereisferner feststellen,

[1]) Das Vorkommen von Untermoränenmaterial in Mittelmoränen hat zuerst Sévé am Justedalbrae bemerkt. Heim, Handbuch der Gletscherkunde, S. 359. Ferner: Brückner, Penck und v. Zittel, vergl. Brückner: Vergletscherung des Salzachgebietes, S. 26.

der eine vier Kilometer lange Mittelmoräne besitzt. Es war das um so unerwarteter, als mehrfache Bohrungen auf dem Rücken der Mittelmoräne keinen Schuttinhalt des darunter liegenden Eises ergaben. Der Grund liegt darin, dass die schuttführende Wand von so geringer Dicke ist, dass nur ein grosser Zufall sie auf der 20—80 m breiten Moräne finden lässt; ihre Mächtigkeit beträgt nämlich durchschnittlich nur 25—30 cm und dabei ist sie überaus scharf begrenzt, so dass nur ausnahmsweise ein Stein daneben im Eise steckt. Die Mittelmoräne ist durch Spalten an vielen Stellen aufgeschlossen und überall lässt sich die fast genau vertikal stehende Schmutzschicht erkennen, die augenscheinlich einen Bestandteil der als Bänderung[1]) zu bezeichnenden Struktur des Gletschereises bildet. Man gewinnt durchaus den Eindruck eines ungewöhnlich breiten stark schmutzdurchsetzten Blaubandes. Die auffallend deutliche Entwickelung der Bänderung in der Nachbarschaft der Schuttwand hängt wohl mit dem Umstande zusammen, dass die betreffenden Eispartien vor ihrer Vereinigung an der Schuttwand Bodenschichten waren, innerhalb welchen die grössten Geschwindigkeitsdifferenzen herrschen. Grosse Geschwindigkeitsdifferenzen sind aber der Ausbildung der Bänderung entschieden günstig. Nach oben gegen den Ursprung der Moräne unter den Felsen der Langtaufererspitze verbreitert sich, wie mein College Herr Prof. Dr. Heinke, der mich begleitete, durch sorgfältige Untersuchung gefunden hat, das Schmutzband auf ca. 60 cm und spaltet sich in drei, zwischen denen dunkle schuttfreie Eisschichten liegen. Erwähnung verdient noch das Aussehen der Linie, längs welcher das Schuttband austritt und welche gewissermassen die Schweissnaht der vereinigten Eisströme darstellt. Der frisch ausgeschmolzene Schutt unterscheidet sich durch einen breiigen, im trockenen Zustande staubigen Ueberzug von der durch den Regen gewaschenen älteren Schuttdecke der Moräne. Alle Steine von länglicher

[1]) In der Nomenklatur der Moränen und der Gletscherstruktur halte ich mich an die Vereinbarungen, welche auf der obengenannten Gletscherkonferenz getroffen wurden.

oder plattiger Form liegen mit ihrer Lang- bezw. Breitseite in der Ebene der Schuttwand und schmelzen hochkant gestellt aus.[1]) So markiert sich die Linie durch eine fortlaufende Reihe von halb im Eise steckenden Steinen in unnatürlicher Stellung. Der Verlauf der Linie ist ein überaus stetiger, nirgends ist man um einen halben Meter breit im Zweifel darüber; nur an sehr breiten und tiefen Spalten scheint sie manchmal um einige Decimeter verworfen zu sein. Die Regelmässigkeit der Erscheinung bewirkt, dass wenn man einmal darauf aufmerksam geworden ist, sie auch schon von weitem bemerkt und es ist mir schliesslich gelungen sie aus grosser Ferne (ca. 4 km) photographisch zu fixieren (vergl. Fig. 1). In dieser Entfernung sieht man natürlich nicht das Schmutzband selbst, wohl aber die durch sein Austreten bewirkte Anordnung des Schuttes. Auf dem Bilde ist auch der Umstand zu erkennen, dass die Linie nicht auf der Mitte des Moränenrückens verläuft, sondern weit gegen die Schattenseite hinausgerückt ist. Es legt sich eben die aus dem Eise auftauchende Schuttwand nach der Sonnenseite zu um und nach dieser Seite verbreitet sich der Schuttstreifen durch Abrutschen der Steine beim Unterschmelzen ihrer Basis weit mehr, als nach der Schattenseite. Sehr bezeichnend ist auch das Umbiegen der Linie gegen den Gletscherrand, wodurch das Ende des Langtaufererzuflusses gekennzeichnet ist. Unterhalb desselben ist der Hauptferner mit einem breiten Felde von Moränenschutt bedeckt, welches die Endmoräne des Langtaufererzuflusses darstellt. Diese Verhältnisse sind auf der Karte des Hintereisferners von Blümcke und Hess vorzüglich dargestellt. Die ausgeprägte Lage der Grenzlinie am Schattenrande des Moränenrückens und die mächtige Verbreiterung desselben nach abwärts von 20 auf 100 m, machen es sehr wahrscheinlich, dass der Schuttinhalt der Mittelmoräne in der

---

[1]) Diese Anordnung der Steine habe ich 1895 am Zufallferner gesehen, glaubte sie aber Bewegungsdifferenzen der benachbarten Eisströme zuschreiben zu müssen. Vergl. Die Gletscher der Ortlergruppe, Mitteilungen des D. u. Oe. Alpenvereins, 1896, S. 31. Penck fand sie am Wurtenkees in der Sonnblickgruppe, Zeitschrift d. D. u. Oe. A.-V., 1897, S. 69.

Hauptsache nach aus der Innenmoräne stammt und nicht direkt von den aperen Felsen der Langtaufererspitze, an denen sie den Ausgang nimmt. Wenn man bedenkt, dass die schuttführende Wand nach den Gletscherprofilen von Blümcke und Hess in den oberen Teilen eine Höhe von 250 m hat, kann man an der Möglichkeit dieser Herkunft nicht zweifeln.



Fig. 1. Die Mittelmoräne des Hintereisferners. Die weisse (retouchierte) Linie bezeichnet die Lage der Schweissnaht.

Eine letzte Reihe von Beobachtungen, welche die Richtigkeit der vorgetragenen Ansicht über den Zusammenhang von

Mittel- und Innenmoränen zu stützen geeignet sind, bezieht sich auf die Verteilung des Schuttes auf dem Moränenrücken. Am Langtauferferner ist das Gestein in der ganzen Umrandung der Firnmulde so einförmig, dass keinerlei Unterschiede im Schutt zu bemerken waren. Anders liegt die Sache bei der grossen Mittelmoräne des Hochjochferners. Dieselbe beginnt in der Höhe von 2600 m mit einer Reihe vereinzelnter Platten, die in abenteuerlichen Stellungen, ausschliesslich hochkant aus dem Eise hervorragen. Weiter abwärts bildet sich der schuttbekleidete Moränenkamm aus, auf welchem die Schweissnaht der beiden Zuflüsse in der früher beschriebenen Weise deutlich zu erkennen ist. Infolge des S-förmigen Verlaufes der Moränenaxe wechselt die Sonnen- und Schattenseite des Rückens wiederholt, wobei sich die Naht getreu an der jeweiligen Schattenseite hält. Noch weiter abwärts, wo der Rücken schon eine ansehnliche Breite gewonnen hat, taucht in ca. 8 m Entfernung neben der ersten Schweissnaht und zwar auf der Sonnenseite eine zweite auf, welche ockergelben Schutt führt, der mit dem graubraunen Schutt, der der ersten Naht entstammt, stark kontrastiert. Der gelbe Schutt verbreitet sich ausschliesslich nach der Sonnenseite, da nach der Schattenseite zu die Böschung des Rückens aufwärts geht und er erreicht bald den sonnenseitigen Rand des graubraunen Schuttes, der fast ganz unter ihm verschwindet. Wenige hundert Meter oberhalb der Strandungsstelle der Moräne taucht innerhalb des gelben Schuttstreifens eine dritte Naht auf, die mehr rötliches Gestein in reicher Fülle liefert, das wiederum nach der Sonnenseite zu sich verbreitend den gelben Schutt überdeckt. Offenbar laufen im Innern des Gletschers in geringem Abstand drei Innenmoränen parallel einher, die von verschieden stark ausgeprägten Rücken aus verschiedenfarbigem Gestein herstammen. Die Innenmoränen ragen vom Grunde ab verschieden hoch in's Innere und kommen nacheinander zur Ausschmelzung, wie das in der schematischen Figur 2 angedeutet ist.

Hiernach erscheint auch die früher erwähnte Beobachtung Blümckes über die Streifen der regenerierten Moräne in neuem Lichte.

Von weittragendster Bedeutung ist die hier vertretene Ansicht von der Struktur der Moränen für die diluvialen Gletscher, wie Eduard Richter auseinandergesetzt hat.[1]) Die vielverzweigten Sammelgebiete der diluvialen Alpengletscher mussten eine grosse Zahl von Innenmoränen liefern, die aus deutlichem Untermoränenmaterial (gekritzten Geschieben und

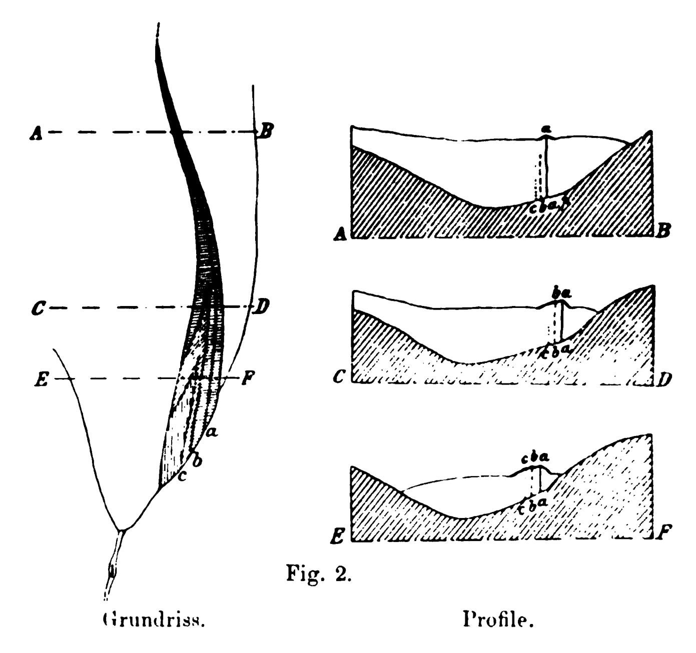


Fig. 2.

Schlamm) aufgebaut waren, da ja die Geschiebe, ehe sie in die Innenmoräne kamen, bereits einen weiten Weg am Gletschergrunde irgend eines Seitenthales zurückgelegt hatten. So erklären sich die Riesenmassen von Grundmoränenmaterial des alpinen Diluviums, ohne dass man genötigt wäre anzunehmen, dass die damaligen Gletscher wesentlich mächtigere Schichten von Untermoräne bewegt hätten als die heutigen.

[1]) Geomorphologische Untersuchungen in den Hochalpen. Ergänzungsheft 132 zu Petermanns Mitteilungen. S. 32.

Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der periodischen Functionen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 27. Dezember.)

Im folgenden soll unter $f(u)$ ein für allemal eine Function verstanden werden, welche keine „unendlich kleine" Periode d. h. in jedem endlichen Bereiche nur eine endliche Zahl von Perioden besitzt: eine Eigenschaft, welche bekanntlich jeder nicht constanten eindeutigen oder endlich-vieldeutigen analytischen Function eo ipso (aber nicht dieser Functions-Classe ausschliesslich[1])) zukommt. Für Functionen dieser Kategorie gilt dann bekanntlich der von Jacobi[2]) aufgestellte und bewiesene Satz, dass sie höchstens doppelperiodisch sein können. Jacobi's Beweis gründet sich auf die folgenden drei Theilsätze:

I. $f(u)$ kann niemals zwei Perioden ω_1, ω_2 mit reellem irrationalen Quotienten besitzen. Ist hingegen $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ reell und rational, so lassen sich ω_1, ω_2 als ganzzahlige Multipla einer einzigen Periode ω darstellen. (A. a. O. § 1.)

---

[1]) So können auch unendlich-vieldeutige analytische Functionen die fragliche Eigenschaft besitzen (z. B. $\lg f(u)$), brauchen sie aber nicht zu besitzen (wie z. B. die Umkehrungsfunction eines Integrals u mit mehr als zwei Periodicitäts-Moduln). Vgl. im übrigen: Casorati, Acta math. T. 8 (1886), p. 344.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 13 (1835), p. 55—61 (= Ges. Werke, II, p. 25—32).

II. Sind ω_1, ω_2, ω_3 Perioden, welche paarweise kein reelles Verhältniss besitzen, so muss zwischen ihnen eine homogene lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten bestehen. (A. a. O. § 3.)[1]

III. Besteht zwischen irgend drei Perioden ω_1, ω_2, ω_3 mit paarweise nicht reellem Verhältniss eine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten, so lassen sich zwei Perioden ω, ω' angeben, derart dass: $\omega_\varkappa = m_\varkappa \omega + n_\varkappa \omega'$ ($\varkappa = 1, 2, 3$; $m_\varkappa$, $n_\varkappa$ ganze Zahlen bezw. Null). (A. a. O. § 2.)

Hieraus kann nun in der That gefolgert werden, dass jede endliche Anzahl von Perioden sich schliesslich immer auf eine bezw. zwei reduciren lässt. Aber, obschon das hierzu dienliche Verfahren unbegrenzt fortsetzbar erscheint, so ist doch nicht genügend ersichtlich, dass sich wirklich auch die Gesammtheit aller möglichen Perioden, welche ja unter allen Umständen aus einer unendlichen Zahlenmenge besteht, durch eine bezw. zwei specielle, eindeutig charakterisirte Perioden darstellen lässt. Mit anderen Worten, durch die Jacobi'sche Deduction wird die jeweilige Existenz primitiver Perioden noch keineswegs vollständig in Evidenz gesetzt, vielmehr ist hierzu wiederum noch eine besondere Betrachtung erforderlich.

Darnach erscheint es aber weit zweckmässiger, von vornherein die Existenz bestimmter primitiver Perioden festzustellen: die obigen Jacobi'schen Sätze resultiren sodann als ganz unmittelbare Folgerungen. Ein Verfahren dieser Art wurde von Weierstrass für den allgemeinen Fall von Functionen beliebig vieler Variabeln angegeben[2]) und von O. Bier-

[1]) Der sehr sinnreiche, aber etwas mühsame Algorithmus, den Jacobi zum Beweise dieses, den eigentlichen Schwerpunkt der ganzen Deduction bildenden Satzes anwendet, lässt sich auch durch eine wesentlich einfachere Grenz-Betrachtung ersetzen: s. z. B. Rausenberger, Theorie der periodischen Functionen (1884), p. 303. Nr. 7. — Thomae, Abriss einer Theorie der Functionen einer compl. Veränderlichen und der Thetafunctionen, 3. Aufl. (1890), p. 39. § 35.

[2]) Berl. Monatsber. 1876, p. 680 (= Math. Werke, II. p. 70).

mann auf den Fall einer einzigen unabhängigen Variabeln übertragen.[1])

Die folgende, auf einer anderen, principiell etwas einfacheren Auswahl[2]) der primitiven Perioden beruhende Darstellung dürfte den Vorzug grösserer Anschaulichkeit besitzen und gestattet überdies auch einen genauen Ueberblick über die verschiedenen, bezüglich der Anzahl und der Grössenverhältnisse jener besonderen Primitiv-Perioden vorhandenen Möglichkeiten. Der Vollständigkeit halber und, um die vollkommene Analogie in der Behandlung der einfachen und doppelten Periodicität deutlich hervortreten zu lassen, schicke ich auch die Betrachtung desjenigen Falles voraus, welcher den Jacobi'schen Satz I involvirt.

Lehrsatz I. Alle einer Function vom Charakter $f(u)$ zukommenden Perioden Ω, welche gegenseitig in *reellem* Verhältnisse stehen, lassen sich als ganzzahlige Multipla einer einzigen Periode ω_1 darstellen.

Beweis. Bedeutet Ω irgend eine beliebige Periode, so giebt es in Folge der über $f(u)$ gemachten Voraussetzung nur eine endliche Anzahl von Perioden mit einem absoluten Betrag $\leqq |\Omega|$ und somit auch eine endliche Anzahl von Perioden $\omega_\varkappa$, deren absoluter Betrag $|\omega_\varkappa|$ einen bestimmten, von Null verschiedenen Minimalwerth besitzt. Wird eine dieser letzteren willkürlich ausgewählt und mit ω_1 bezeichnet, so hat man für alle möglichen $\omega_\varkappa$ die Beziehung: $\left|\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1}\right| = 1$; da aber andererseits $\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1}$ nach Voraussetzung reell ist, so folgt:

$$\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1} = \pm 1, \quad \text{d. h.} \quad \omega_\varkappa = \pm \omega_1.$$

---

[1]) Theorie der analytischen Functionen (1887), p. 368.

[2]) Noch anders (in wesentlich geometrischer Darstellung) bei Tannery et Molk, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, T. I (1893), p. 143, Nr. 83.

Ist sodann Ω wieder eine ganz beliebige der zu ω_1 in reellem Verhältnisse stehenden Perioden, so lässt sich $\frac{\Omega}{\omega_1}$ stets und nur auf eine einzige Weise in die Form setzen:

$$\frac{\Omega}{\omega_1} = m + \varrho,$$

wo m eine ganze Zahl und $0 \leq \varrho < 1$. Darnach wäre aber:

$$\varrho\,\omega_1 = \Omega - m\,\omega_1 \quad \text{und zugleich} \quad |\varrho\,\omega_1| < |\omega_1|,$$

d. h. $\varrho\,\omega_1$ eine Periode mit kleinerem absoluten Betrage als ω_1, was unmöglich ist, solange $\varrho > 0$. Somit muss $\varrho = 0$ sein, worauf dann $\Omega = m\,\omega_1$ sich ergiebt.

Folgerungen. 1) Unter den Perioden von $f(u)$ können niemals zwei solche vorkommen, welche ein reelles irrationales Verhältniss besitzen.[1])

[1]) Will man dies noch ausdrücklich bestätigen, so kann man sich statt der von Jacobi benützten Kettenbruch-Entwickelung von $\frac{\omega'}{\omega}$ auch der noch elementareren Darstellung von $\frac{\omega'}{\omega}$ durch einen unendlichen Decimalbruch oder sonstigen systematischen Bruch bedienen. Angenommen man habe:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{b^\nu} \text{ irrational,}$$

(wo b eine natürliche Zahl > 2, a_ν eine Folge ganzer Zahlen, die man ohne Beschränkung der Allgemeinheit als positiv voraussetzen kann), so wird für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a_\nu + \varrho_\nu}{b^\nu}, \text{ wo: } 0 < \varrho_\nu < 1$$

also:

$$\varrho_\nu\,\omega = b^\nu\,\omega' - a_\nu\,\omega.$$

Die ϱ_ν sind sämmtlich von einander verschieden, da aus $\varrho_m = \varrho_n$ folgen würde:

$$b^m\,\omega' - a_m\,\omega = b^n\,\omega' - a_n\,\omega$$

d. h.

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a_m - a_n}{b^m - b^n}, \text{ d. h. rational.}$$

Es gäbe also in dem endlichen Bereiche $u = \varrho\,\omega$ $(0 < \varrho < 1)$ unendlich viele Perioden $\varrho_\nu\,\omega$, was der Voraussetzung widerspricht.

2) Besitzt $f(u)$ nur Perioden Ω mit reellem Verhältniss so ist $f(u)$ einfach periodisch, und die „primitive" Periode von $f(u)$ ist eine der beiden nach Willkür zu wählenden Zahlen $\pm\omega_1$, für welche $|\omega_1|$ ein Minimum wird.

3) Da umgekehrt für jedes einfach periodische $f(u)$ alle Perioden-Quotienten reell (und rational) ausfallen müssen, so folgt weiter: Finden sich unter den Perioden von $f(u)$ irgend zwei: $\omega = \xi + \eta i$, $\omega' = \xi' + \eta' i$ mit nicht-reellem Verhältniss:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\xi^2 + \eta^2}\cdot i, \quad \text{wo also: } |\xi\eta' - \xi'\eta| > 0,$$

so kann $f(u)$ nicht einfach periodisch sein. Um festzustellen, dass alsdann $f(u)$ genau doppelperiodisch sein muss, beweisen wir zunächst den folgenden

Hülfssatz. Sind ω, ω' Perioden von $f(u)$ mit *nicht-reellem* Verhältniss und ausserdem von der Beschaffenheit, dass ausser $h = \omega$ und $h = \omega'$ *keine* Zahl von der Form:

$$h = \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega', \quad \text{wo: } \left.\begin{matrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{matrix}\right\} \geqq 0, \quad \varepsilon + \varepsilon' \leqq 1$$

eine *Periode* von $f(u)$ bildet[1]), so lässt sich *jede* Periode Ω in der Form darstellen:

$$\Omega = m\omega + n\omega'$$

wo m, n ganze Zahlen (einschliesslich der Null) bedeuten; ω, ω' heissen alsdann *primitive* Perioden.

Beweis. Zunächst lässt sich jedenfalls Ω (wie für jede beliebige Zahl durch Auflösung der betreffenden 2 Lineargleichungen folgt) stets und nur auf eine einzige Weise in der Form darstellen:

$$\Omega = a\omega + b\omega' \quad (a, b \text{ reell bezw. Null}),$$

---

[1]) Diese Bedingung besagt geometrisch, dass im Innern und auf den Seiten des Dreiecks mit den Eckpunkten $0, \omega, \omega'$ keine Perioden ausser ω, ω' liegen sollen.

anders geschrieben:

$$\Omega = m\omega + n\omega' + k,$$

wo m, n ganze Zahlen (eventuell Null) und:

$$k = \vartheta\omega + \vartheta'\omega', \quad 0 \leqq \begin{Bmatrix} \vartheta \\ \vartheta' \end{Bmatrix} < 1.$$

Da sodann $k = \Omega - m\omega - n\omega'$ eine Periode von $f(u)$ sein muss, so folgt aus der Voraussetzung, das keinesfalls

$$\vartheta + \vartheta' \leqq 1$$

sein kann, ausser wenn:

$$\vartheta = \vartheta' = 0.$$

Wäre nun aber:

$$\vartheta + \vartheta' > 0 \quad (\text{andererseits: } \vartheta + \vartheta' < 2),$$

so hätte man:

$$\begin{aligned}(\omega + \omega') - k &= (1 - \vartheta)\cdot\omega + (1 - \vartheta')\cdot\omega' \\ &= \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega',\end{aligned}$$

wo jetzt:

$$\varepsilon + \varepsilon' = 2 - (\vartheta + \vartheta') \begin{cases} > 0 \\ < 1, \end{cases}$$

d. h. $(\omega + \omega') - k$ wäre eine Periode von der Art, deren Existenz auf Grund der Voraussetzung ausgeschlossen erscheint.

Hiernach kann also in der That nur $\vartheta = \vartheta' = 0$, also:

$$\Omega = m\omega + n\omega'$$

sein, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist. —

Lehrsatz II. Finden sich unter den Perioden Ω von $f(u)$ solche mit nicht-reellem Verhältniss und bezeichnet man mit ω_1 irgend ein Ω, für welches $|\omega_1|$ unter allen möglichen $|\Omega|$ ein *Minimum* ist; sodann mit ω_2 ein anderes Ω, für welches $|\omega_2|$ unter allen nach Ausscheidung von $\Omega = \nu\omega_1$ ($\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) übrig bleibenden $|\Omega|$ gleichfalls ein *Minimum* ist (wobei also $|\omega_2| \geqq |\omega_1|$): so sind ω_1, ω_2 *primitive* Perioden.

Beweis. Es werde unter der (jedenfalls endlichen) Anzahl von Perioden Ω, deren absoluter Betrag einen gewissen von Null verschiedenen Minimalwerth r_1 besitzt, irgend eine beliebig ausgewählt und mit ω_1 bezeichnet. Alsdann ist zunächst auch $-\omega_1$ eine Periode mit dem absoluten Betrage r_1. Im übrigen sind dann nur folgende zwei Fälle möglich:

Erster Fall. Es existiren ausser $\pm\omega_1$ noch andere Perioden mit dem absoluten Betrage r_1. Bezeichnet man eine derselben mit ω_2, so folgt leicht aus dem eben bewiesenen Hülfssatze, dass ω_1, ω_2 primitive Perioden. Betrachtet man nämlich alle Zahlen h von der Form:

$$(1) \qquad h = \vartheta_1 \omega_1 + \vartheta_2 \omega_2, \quad \text{wo:} \left.\begin{matrix}\vartheta_1 \\ \vartheta_2\end{matrix}\right\} \geqq 0, \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 \leqq 1,$$

so folgt zunächst für $\vartheta_2 = 0$, bezw. $\vartheta_1 = 0$, dass:

$$h = \vartheta_1 \omega_1 \quad \text{bezw.} \quad h = \vartheta_2 \omega_2$$

wird, sodass unter diesen speciellen h nur die beiden folgenden:

$$h = \omega_1 \qquad h = \omega_2$$

Perioden sind. Ist dagegen $\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_2 > 0$, so hat man:

$$\begin{aligned} |h| &= |\omega_1| \cdot \left| \vartheta_1 + \vartheta_2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| \\ &< |\omega_1| \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

mit Ausschluss der Gleichheit, da $\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right| = 1$, aber $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ von $+1$ verschieden; also schliesslich:

$$|h| < |\omega_1| = |\omega_2| \ ^{1)},$$

sodass in Folge der Auswahl von ω_1 keine dieser Zahlen h eine Periode liefern kann: nach dem obigen Hülfssatze müssen also ω_1, ω_2 primitive Perioden sein.

Zweiter Fall. Es seien $\pm\omega_1$ die einzigen Perioden mit dem absoluten Betrage r_1. Man scheide dann aus der

[1] Dies ist übrigens geometrisch unmittelbar ersichtlich.

Gesammtheit der Ω alle diejenigen von der Form $\Omega = \nu\,\omega_1$ ($\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) aus: es sind dies nach Lehrsatz I alle möglichen, die überhaupt zu ω_1 ein reelles Verhältniss haben. Für die übrigbleibenden, die dann also zu ω_1 ein nicht-reelles Verhältniss haben (sodass auf Grund der Voraussetzung auch wirklich solche vorhanden sind) existirt dann wiederum ein gewisses Minimum r_2 des absoluten Betrages (wo also $r_2 > r_1$) und eine endliche Anzahl von Ω, für welche $|\Omega| = r_2$ ist. Wird dann irgend eine von diesen mit ω_2 bezeichnet, so sind ω_1, ω_2 primitive Perioden. Betrachtet man nämlich wiederum alle Zahlen h von der Form (1), so folgt zunächst für $\vartheta_1 = 0$:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2,$$

sodass also unter diesen h nur $h = \omega_2$ eine Periode ist (denn $\pm\,\omega_1$ besitzt ja zu ω_2 kein reelles Verhältniss, ist also nicht von der Form $\vartheta_2\,\omega_2$). Ist aber $\vartheta_1 > 0$, so hat man:

$$\begin{aligned} |h| &= |\omega_2| \cdot \left| \vartheta_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} + \vartheta_2 \right| \\ &< |\omega_2| \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2) \qquad \left(\text{wegen: } \left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right| < 1\right) \\ &< |\omega_2|. \end{aligned}$$

Da es aber ausser $h = \omega_1$ keine Periode h giebt, welche den Bedingungen $\vartheta_1 > 0$, $|h| < |\omega_2|$ genügt, so folgt wieder aus dem obigen Hülfssatze, dass ω_1, ω_2 primitive Perioden sind. —

Folgerungen. 1) Finden sich unter den Perioden von $f(u)$ solche mit nicht-reellem Verhältniss, so ist $f(u)$ genau doppelperiodisch: es giebt also keine drei- und mehrfach periodischen $f(u)$.

2) Zwischen irgend drei der Function $f(u)$ zukommenden Perioden mit paarweise nicht-reellem Verhältniss findet eine homogene lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten statt.

Zwei specielle primitive Perioden, wie die oben näher charakterisirten und mit ω_1, ω_2 bezeichneten, mögen Minimal-Perioden genannt werden. Aus den bisherigen Betrachtungen geht dann nur soviel hervor, dass es jedenfalls nur eine endliche Zahl solcher Minimal-Perioden geben kann. Um deren mögliche Anzahl genauer festzustellen, stützen wir uns auf den folgenden bekannten Satz:

Sind ω, ω' primitive Perioden, so sind

$$\tilde{\omega} = \alpha\,\omega + \beta\,\omega', \quad \tilde{\omega}' = \gamma\,\omega + \delta\,\omega'$$

dann und nur dann gleichfalls primitive Perioden, wenn α, β, γ, δ ganze Zahlen (einschliesslich der Null) bedeuten, welche der Beziehung genügen:

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = \pm 1.$$

Hieraus folgt speciell, wenn man einmal $\alpha = 1$, $\beta = 0$, also $\delta = \pm 1$, γ beliebig, das andere Mal $\gamma = 0$, $\delta = 1$, also $\alpha = \pm 1$, β beliebig annimmt:

Bilden (ω, ω') ein primitives Periodenpaar, so sind alle primitiven Paare, bei welchen eine der Perioden ω bezw. ω' beibehalten wird, in der Form enthalten:

$$(1) \quad (\omega, \gamma\,\omega \pm \omega') \text{ bezw. } (\pm\omega + \beta\,\omega', \omega') \quad \left(\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \Big).$$

Umgekehrt ist jedes solche Periodenpaar ein primitives.

Mit Hülfe dieses letzteren Resultates können wir jetzt den Lehrsatz II, nach welchem — abgesehen von dem noch beliebig bleibenden Vorzeichen — mindestens zwei Minimal-Perioden existiren, in folgender Weise ergänzen.

Lehrsatz III. Es giebt, abgesehen von dem noch willkürlich bleibenden Vorzeichen, *höchstens drei* Minimal-Perioden, d. h. drei paarweise in nicht-reellem Verhältnisse zu einander stehende, noch nach Willkür mit beliebigem Vorzeichen zu versehende Perioden ω_1, ω_2, ω_3, die der Bedingung genügen:

$$|\omega_1| < |\omega_2| = |\omega_3|,$$

während ausser $\pm \omega_1$, $\pm \omega_2$, $\pm \omega_3$ *keine* Periode Ω existirt, für welche:

$$|\Omega| \leq |\omega_2|.$$

Zugleich bildet dann, ausser (ω_1, ω_2) und (ω_1, ω_3), auch (ω_2, ω_3) ein *primitives* Perioden-Paar.[1])

Beweis. Wir beweisen zunächst die Richtigkeit der zuletzt ausgesprochenen Behauptung. Im Falle $|\omega_2| = |\omega_1|$ folgt dieselbe unmittelbar aus Lehrsatz II, da man in diesem Fall für ω_1, ω_2 ohne weiteres auch ω_2, ω_3 substituiren kann.

Sei nun $|\omega_2| > |\omega_1|$. Da ω_3 eine Periode und (ω_1, ω_2) ein primitives Periodenpaar, so hat man jedenfalls:

$$\omega_3 = m\,\omega_1 + n\,\omega_2, \tag{2}$$

wo m, n ganze Zahlen und beide von Null verschieden. Dabei kann man ω_3 aus den beiden, nur durch das Vorzeichen verschiedenen, zur Verfügung stehenden Zahlen so auswählen, dass $m > 0$. Zugleich mag dann auch unter ω_2 gerade diejenige der beiden in Betracht kommenden, nur durch das Vorzeichen verschiedenen Zahlen verstanden werden, für welche $n > 0$. Sind jetzt ω_3, ω_2 in dieser Weise normirt, so lässt sich wiederum zeigen, dass ausser ω_2, ω_3 keine Periode h von der Form existirt:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2 + \vartheta_3\,\omega_3, \quad \text{wo:} \left.\begin{matrix}\vartheta_2 \\ \vartheta_3\end{matrix}\right\} \geq 0, \quad \vartheta_2 + \vartheta_3 \leq 1. \tag{3}$$

Man hat zunächst wieder für $\vartheta_3 = 0$, bezw. $\vartheta_2 = 0$:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2, \quad \text{bezw.} \quad h = \vartheta_3\,\omega_3,$$

sodass unter diesen besonderen h sich thatsächlich nur die beiden Perioden

$$h = \omega_2, \quad h = \omega_3$$

vorfinden. Ist sodann $\vartheta_2 > 0$, $\vartheta_3 > 0$, so wird:

---

[1]) Für (ω_1, ω_2) und (ω_1, ω_3) folgt dies aus Lehrsatz II.

$$|h| = |\omega_2| \cdot \left| \vartheta_2 + \vartheta_3 \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \right|$$
$$< |\omega_2| \cdot (\vartheta_2 + \vartheta_3) \qquad \text{(mit Ausschluss der Gleichheit)}$$
$$< |\omega_2|.$$

Die einzigen Perioden, deren absoluter Betrag $< |\omega_2|$ ist, sind aber $\pm \omega_1$. Und da aus Gl. (2) folgt:

$$\omega_1 = -\frac{n}{m}\omega_2 + \frac{1}{m}\omega_3, \quad -\omega_1 = \frac{n}{m}\omega_2 - \frac{1}{m}\cdot\omega_3$$

(wo $m > 0$, $n > 0$), so kommen $\pm \omega_1$ unter den Zahlen h nicht vor. Somit giebt es ausser $h = \omega_2$, $h = \omega_3$ keine Periode h von der Form (3), und (ω_2, ω_3) bilden daher nach dem bewiesenen Hülfssatze ein primitives Periodenpaar.

Da nun ausser (ω_3, ω_2) auch (ω_1, ω_2) ein primitives Periodenpaar bilden, so hat man nach (1):

$$\omega_3 = \pm \omega_1 + \beta \omega_2,$$

also mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$\omega_3 = \omega_1 + n\,\omega_2 \quad (n \geq 1). \tag{4}$$

Andererseits bilden aber auch (ω_1, ω_3) und (ω_1, ω_2) je ein primitives Periodenpaar, und man hat daher nach (1):

$$\omega_3 = \gamma\,\omega_1 \pm \omega_2,$$

also wiederum mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$\omega_3 = m\,\omega_1 + \omega_2 \quad (m \geq 1). \tag{5}$$

Die Vergleichung von (4) und (5) zeigt dann, dass:

$$m = 1, \quad n = 1$$

sein muss, d. h. man findet schliesslich:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \tag{6}$$

als den einzig möglichen Werth von ω_3. Damit ist aber der ausgesprochene Satz bewiesen.

Zusatz. Man überzeugt sich leicht, dass der durch Gl. (6) und die Beziehung $|\omega_3| = |\omega_2|$ charakterisirte mögliche Fall auch wirklich eintreten kann. Ist $|\omega_2| = |\omega_1|$, so erscheint als Perioden-Parallelogramm mit den Ecken $0, \omega_1, \omega_3, \omega_2$ ein Rhombus, welcher durch die Diagonale $\overline{0\,\omega_3}$ in zwei gleichseitige Dreiecke zerfällt. Ist $|\omega_2| > |\omega_1|$, so besitzt das betreffende Parallelogramm nur die Eigenschaft, dass die Diagonale $\overline{0\,\omega_3}$ der grösseren Seite $\overline{0\,\omega_2}$ gleich ist. Dagegen ist dann das (gleichfalls primitive) Perioden-Parallelogramm mit den Ecken $0, \omega_3, \omega_2 + \omega_3, \omega_2$ ein rhombisches.

Ueber Entstehung und Wachstum der Kieselgebilde bei Spongien.

Von Dr. **Otto Maas.**

(*Eingelaufen 1. Dezember.*)

(Mit Taf. V.)

Die Kenntnis von dem Entstehen und Wachstum der Kalknadeln der Schwämme hat in letzter Zeit erhebliche Fortschritte gemacht; für die Kieselnadeln aber stehen wir noch auf dem Standpunkt wie die ersten wirklich histologischen Schwammuntersuchungen. Es ist für Monactinelliden seit Lieberkühn (56) bekannt, dass die erste Entstehung einer stabförmigen Skeletnadel (Makrosklere) innerhalb einer einzigen Zelle stattfindet; auch für die Fleischnadel (Mikrosklere) ist das in einer Reihe von Fällen nachgewiesen (Sollas 80). Bei Tetractinelliden hat F. E. Schulze (80, 81) den Ursprung der kleinen vierstrahligen Nadel ebenfalls in einer Zelle abgebildet, und Sollas behauptet, allerdings ohne, oder so gut wie ohne Abbildungen in seinem Werk über die Challenger-Tetractinelliden (88), dass die Nadeln sämtlich, Mikro- wie Makroskleren, in Zellen gebildet werden. Ueber das weitere Wachstum der Nadeln, die ja unter Umständen eine bedeutende Grösse erreichen, und über das Schicksal der Nadelbildner (Skleroblasten), ist so gut wie nichts bekannt. Von manchen Autoren wird vermutet, dass später noch weitere formative Elemente zu dem ersten Skleroblast treten können; in andern Fällen aber, namentlich wo die fertige Nadel eine gewisse Grösse nicht überschreitet, konnte man noch den ursprüng-

lichen Nadelbildner auch für das ganze übrige Wachstum der Nadel verantwortlich machen. Es ist von mir für solche mässig grossen Einstrahler nachgewiesen worden (90), dass die ursprüngliche Bildungszelle ihnen, allerdings sehr blass und in die Länge gezogen, noch anhängt, wenn sie $^1/_2$ mm, also nahezu ihre definitive Grösse, erreicht haben, und keine weitere Zellen, auch nicht epithelartig, an ihnen wahrzunehmen sind. Für die Schaufelnadeln der Esperia fand ich dagegen eine Reihe regelmässig gelagerter Kerne (92), je zwei am Stiel und an der Schaufel, ohne bei der Kleinheit der Objecte den Ursprung und das weitere Schicksal näher verfolgen zu können. Auch bei Sollas, der doch die Meinung hat, dass jeweils eine Zelle genüge, finden sich, wie Minchin (98) hervorhebt, Bilder, wo mehrere Zellen an den extrem grossen Nadelschäften liegen.

Die Knospen von Tethya schienen mir ein günstiges Object, um diesen Fragen näher zu treten. Es muss hier eine reichliche Neubildung von Nadeln eintreten, und diese Nadeln gehören zu dreierlei Formen. Es kommen vor: 1) grosse Stabnadeln des Skelets mit etwas verdicktem Ende, sog. Keulen, Style, die wegen des mitunter kolbig abgesetzten Endes auch als Tylostyle bezeichnet werden könnten, 2) kleine sternförmige Fleischnadeln, zumeist an der Oberfläche und an der Wand der einführenden Lacunen, aber auch sonst im Parenchym. Sie werden meist als Chiaster bezeichnet, sollten aber der knorrigen Strahlenenden wegen eher Tylaster heissen. 3) Grössere Sterne mit massigerem Centrum in der tieferen Rinde, als Sterraster, Oxyaster, oder besser als Spheraster bezeichnet.

Es gelang mir an der Küste von Cypern auf einer Reise, die ich der Munificenz der hiesigen Akademie der Wissenschaften verdanke, u. A. auch sehr viele Entwicklungsstadien einer Tethya (wahrscheinlich spec. lyncurium, wie im übrigen Mittelmeer) zu sammeln, und nicht nur wie bisher sichbildende und ablösende Knospen, sondern auch die weiteren Stadien, deren Ansetzen im Aquarium nicht gelingt, auf der Unterseite von Uferfelsen als Krusten von einigen Millimeter Durchmesser in grosser Anzahl frei zu finden. Es ist seit den Mitteilungen

von Deszö (79 u. 80) nichts näheres über die Knospenentwicklung der Tethyen bekannt geworden; dessen Angaben sind aber noch weit primitiver, als die Zeit der Abfassung, wo schon eine Anzahl der F. E. Schulze'schen ausgezeichneten Monographien vorlag, rechtfertigen könnte, so dass sie auch von Minchin (98), der sonst eine so genaue Litteraturübersicht giebt, wohl absichtlich und mit Recht ignoriert werden. Die kleinen wie die grossen Sterne sollen in einer Zelle entstehen, letztere gleich in ihrer ganzen Grösse in einer „Riesensternzelle"; der Kern soll sich dabei zum Spiculum umwandeln! Abbildungen dafür werden nicht gegeben.

Ueber die Gesamtentwicklung der Knospen, speziell über die Bildung des Canalsystems und der Geisselkammern möchte ich mir ausführlichere Mitteilung vorbehalten und an dieser Stelle nur in Kürze über meine Befunde betreffs der Nadelentstehung berichten.

Am leichtesten ist die Bildung der kleinen Chiaster zu verfolgen. Sie liegen in Massen an der Oberfläche in einer Schichtdicke von mehreren Exemplaren und bilden so eine dichte Decke auch an der Knospenhervorwölbung. Bei deren Freiwerden aber wird die Decke nicht mit herübergenommen, die Knospe ist keine einfache Sprossung, die alle Gewebe bereits fertig aus dem Mutterschwamm übernimmt (was gegen die Auffassung verschiedener Autoren schon hier hervorgehoben sein mag), sondern eine richtige Neubildung aus indifferentem Material. Die Nadelschicht der Mutter platzt, und die junge Knospe ist nackt oder doch nur sehr spärlich hie und da an der Oberfläche mit einem Chiaster versehen, so dass alsbald eine reichliche Neubildung derselben stattfinden muss. In der That sind deren Mutterzellen sehr zahlreich in der Knospe zu sehen und treten namentlich mit gewissen Doppelfärbungen (Haematoxylin-Congorot, Carmin-Anilinblau) durch ihre regelmässigen Einlagerungen schön hervor. Es sind kleine (etwa 15 μ im Durchmesser haltende) Elemente, die sich nahe der Oberfläche sammeln. Sie gehören, um der jetzt gangbaren Einteilung zu folgen, zu den differenzierten Zellen der dermalen

Schicht; sie zeigen nicht den verhältnismässig grossen bläschenförmigen Kern mit Nucleolus der indifferenten Zellen (Archäocyten), sondern ein dichtes Chromatinnetz, so dass der kleine Kern öfters fast homogen erscheint. Ihr Protoplasma ist dicht und mit sehr gleichmässigen Granulationen überall durchsetzt; der Zellleib ist von einer deutlichen, ziemlich derben Membran umschlossen, so dass sie ein blasiges, pflanzenzellenähnliches Aeussere gewinnen, namentlich wenn später die Granulationen schwinden. Ihre Gestalt ist demzufolge nicht wechselnd, sondern kugelig resp. oval (Fig. 2[a]). Des öfteren kann man auch die Mutterzellen solcher Chiasterbildungszellen sehen (Fig. 1); sie sind von etwa doppelter Grösse, ebenso von Körnern erfüllt und membranumhüllt; häufig sind Karyokinesen in ihnen zu erkennen, so dass dem letzten Stadium vor Beginn der Kieselausscheidung eine rege Zellteilung vorauszugehen scheint.

Die Bildung der Chiaster selbst muss sehr rasch erfolgen; denn man sieht fast nur solche körnererfüllte Bildungszellen neben ebenso membranösen mit klarem Plasma, die bereits einen fertigen Stern mit allen Strahlen umschliessen (Fig. 3) in bunter Mischung durcheinanderliegen. Zwischenstadien sind selten, kommen aber bei der Menge der Bilder doch zur Erscheinung. Die ersten Andeutungen sind (Fig. 2) einzelne Radiärbälkchen, meist ganz unsymmetrisch nur von einer Seite, mit dem Kreuzungspunkt in der Nähe des Kerns. Die Granulationen sind bereits vermindert und schwinden um so mehr, als Chiasterstrahlen gebildet werden, bis schliesslich, nach Ausbildung des Sterns, die ganze Zelle glasig hell ist und der Kern sehr deutlich hervortritt. Der Chiaster charakterisiert sich durch den Mangel eines eigentlichen Centrums, nur durch das Zusammentreffen der Radiärbälkchen selbst entsteht ein Mittelteil; die Bälkchen sind in der Mitte nicht stärker, sondern gleichmässig; eher nehmen sie nach der Peripherie etwas zu und können da leicht geknöpft sein, oder eine etwas höckerige Oberfläche zeigen. Es hängt dies damit zusammen, dass zuletzt nur an der Peripherie der Zelle die Kieselausscheidung vor sich geht, und hier auch noch die letzten Granulationen im

Plasma zu sehen sind. Der Stern spannt alsdann die kugelige Zelle und bringt sie in eine mehr unregelmässige, polygonale Gestalt (Fig. 2^{III}), bis sie schliesslich nachgiebt, den Stern freilegt und selbst nur noch locker anliegt (Fig. 2^{IV}), infolge dieser Zusammenziehung aber wieder mehr tingierbar geworden. Was schliesslich aus der Bildungszelle wird, ob sie zu Grunde geht oder eine gewöhnliche Dermalzelle wird, ist nicht sicher; wahrscheinlich ist das letztere. Man sieht den Sternbildungsprocess an Zellen vor sich gehen, die ganz an der Oberfläche der Knospe liegen, dicht neben andern, die gewöhnlichen Dermalcharakter haben. Ein prinzipieller Gegensatz zwischen epithelialer Deckschicht und Spiculaschicht (resp. Chiasterschicht) ist auch hier, wenigstens in diesem Stadium, nicht zu machen.

Ausser diesen gewöhnlichen Chiastern finden sich im erwachsenen Schwamm, häufig im Parenchym der Rindenschicht, weniger an der Oberfläche und an den Wandungen der Canäle wie die ebengenannten Chiaster, eine andere Kategorie etwas grösserer Chiaster, bei denen auch der Centralkörper ein wenig mehr ausgebildet ist. Sie haben etwa die halbe Grösse der später zu besprechenden Spheraster, sind aber von diesen durch die Form (dünne Strahlenbälkchen und kolbig zunehmende, nicht zugespitzte Enden) auf allen Phasen deutlich verschieden. Meist haben sie einige Strahlen mehr wie die gewöhnlichen Chiaster, es kommen aber auch solche mit auffallend wenig z. B. nur 5 Strahlen vor (Fig. 4^{III}). Ihre Bildung geschieht in ähnlich beschaffenen nur etwas grösseren Zellen, wie die der übrigen Chiaster (Fig. 4^{I}); man hat sich zu denken, dass die vorhererwähnte Mutterzelle der Skleroblasten ihre letzten Teilungen unterlassen hat, resp. dass die Kieselausscheidung früher beginnt, als die letzte Teilung einsetzt. Mitunter sieht man die Teilung, wenigstens im Kern, noch nachträglich geschehen und man sieht alsdann solch grössere Chiasterzellen mit zwei Kernen (Fig. 4^{II}). Ob dies und die ganze Bildung der grösseren Chiaster, die immerhin ziemlich selten sind, ein normales Verhalten ist oder ob es sich blos um eine verfrühte Ausscheidung der Kieselsubstanz handelt, vermag ich nicht zu sagen.

Jedenfalls erklärt sich aus ihrem Vorkommen eine grössere Variabilität der Chiaster in Strahlenzahl etc., wie sie auch von Lendenfeld angegeben wird (96), während Topsent für die Chiaster eine ziemliche Constanz behauptet (1900), was nur für deren typische kleinere Form zutrifft.

Ganz anders vollzieht sich die Bildung der so viel mal grösseren Spheraster. Sie haben weder genetischen Zusammenhang noch sonst Beziehung zu den Chiastern; Topsent bemerkt sehr scharf, dass „pas de passage" zwischen beiden, und schon Deszö behauptet, dass sie selbstständigen Ursprungs sind, lässt sie aber merkwürdigerweise gleich in ihrer ganzen Grösse aus „Riesensternzellen" hervorgehen, trotzdem Zellen von solchem Umfang weder im erwachsenen Schwamm, noch in der Knospe vorkommen. Selbst die eiartigen Zellen erreichen noch nicht die Hälfte des Durchmessers eines Spherasters. Dass es auch kleine Spheraster giebt, ist ihm wie es scheint, gänzlich entgangen und wie es scheint, auch den meisten übrigen Autoren. Lendenfeld und Topsent haben zwar beide eine gewisse Grössenvariabilität unter diesen Nadeln gefunden (von 50 bis 120 μ bei ersterem, von 40 μ bis zu 110 μ bei letzterem), was aber auf individuelle Verschiedenheiten geschoben wird; die kleinen und kleinsten Formen aber, die in allen Abstufungen von grossen an vorhanden sind und noch an Grösse unter die kleinen Chiaster heruntergehen können (also Formen von 50 bis nur 10 μ) und weniger, finde ich nirgends erwähnt oder abgebildet. Immer aber sind auch diese kleinen und kleinsten Spherasterformen an Gestalt durchaus von den Chiastern verschieden, und eine Verwechslung ist auf keinem Stadium möglich. Immer ist ein verhältnismässig starkes, mehr oder minder kugeliges Centrum entwickelt, die Strahlen sind viel zahlreicher, als bei den Chiastern und sind im Gegensatz zu diesen nach der Peripherie zu verjüngt resp. zugespitzt, nach der Mitte zu verdickt, so dass sie oft unmerklich ins Centrum übergehen. Schon die kleinsten Spheraster zeigen deutlich diese charakteristische Form (Fig. 7 u. 11).

Wie geht nun deren Entstehung vor sich? Die zur Ab-

lösung reifen Knospen enthalten gewöhnlich schon eine beschränkte Anzahl ganz fertiger, grosser Spheraster, daneben lassen sich eine Reihe von Bildungsstadien wahrnehmen. Noch zahlreicher sind sie aber zu sehen, wenn die Hervorwölbung der Knospe an der Mutter erst beginnt, und sich das mütterliche Gewebe zur Ausprägung der Knospenelemente erst anschickt (wovon an anderer Stelle noch zu berichten sein wird). Dann finden sich unter den grossen und kleineren Spherastern der Rinde, die hier eine Lage bilden, und auf die die Grössenangaben der Autoren passen, im Mark grosse Mengen kleiner und kleinster Spheraster in allen Abstufungen bis zu 5 μ, und bei weiterem Suchen entdeckt man auch ihre Bildungszellen und sieht solche mehrzackigen Gebilde noch innerhalb von Zellen liegen.

Auch die Zellen, die hier die Bildung besorgen, sind anderer Art als bei den Chiastern; sie sind nach Plasma- und Kernstructur als undifferenzierte Elemente (Archäocyten ähnlich) anzusprechen, besitzen einen Nucleolus im bläschenförmigen Kern, ihr Plasmaleib ist nicht scharf conturiert, gewiss nicht von einer Membran umgeben. Die erste Anlage des Concrements scheint innerhalb einer Vacuole zu erfolgen und ist kugelig (Fig. 5 u. 31), dann sieht man mehrere (zwei, drei) Zacken davon ausgehen. Gar nicht selten aber sind typische, vierstrahlige Nadelformen innerhalb einer Zelle zu sehen, richtige Tetractine oder Kalthropsnadeln, nur dass die Strahlen naturgemäss recht kurz im Verhältnis zu ihrem Vereinigungscentrum sind (Fig. 6). Es sind dies Stadien, die durchaus an die Bilder und Angaben erinnern, die F. E. Schulze für Plakina und Corticium, also für typische Tetractinelliden, über die Anlage der Nadeln gebracht hat. (80 u. 81.)

Wie sind nun aber die kleinen Sternchen mit mehr als vier, ja vielen Zacken, mit diesen Tetractinen in Beziehung zu bringen? Es könnte scheinen, als bestünde gar keine solche, da sich mitunter schon ein sehr frühes Stadium in einer Zelle kugelig mit kleinen Zacken darstellt (Fig. 7), so dass nachher nur ein Weiterwachsen in gleichem Sinne zu erfolgen hätte,

und die Tetractine (Fig. 6 bis 10) seitab stehende Bildungen wären. Das ist jedoch nicht der Fall. Die kleinen Sterraster zeigen nämlich zwei und dann mehr Kerne resp. Zellen an ihren Strahlen anliegen. In mehreren Fällen kann man sehr gut erkennen, dass sich zwei Tetrastermutterzellen mit ihren Nadeln zusammenlegen, und dann die Tetractine selbst verschmelzen. Hierbei kommt, da ja die Strahlen nur kurz sind, ein ziemlich massiges Gebilde mit annähernd kugeligem Centrum und 8 kleinen Strahlen zu Stande, der Ausgangspunkt für das weitere Spherasterwachstum (Fig. 11). Man kann öfters die beiden Tetractine noch teilweise getrennt, teilweise mit ihren Kiesellagern verschmolzen beobachten (Fig. 8, 9, 10); namentlich deutlich werden diese Bilder, wenn die beiden Zellen mit ihren Hartgebilden nicht direkt untereinander, sondern schräg ins Gesichtsfeld zu liegen kommen (Fig. 33) und ferner dann, wenn ein Tetractin im Gegensatz zum gewöhnlichen Verhalten, wo beide auf gleichem Grössenstadium zu einander geschmolzen werden, dem andern in der Entwicklung schon etwas voraus ist.

Das Resultat der Verschmelzung bildet sozusagen den formbestimmenden Ausgangspunkt. Weitere richtige Tetractine scheinen mir jetzt nicht mehr dazu zu kommen, sondern jetzt nur eine Vergrösserung durch Auflagerung von neuen Kieselschichten zu erfolgen, die von einer Anzahl Bildungszellen besorgt wird. Ob letztere durch Teilung der beiden ersten entstehen, oder sich durch Hinzukommen neuer Elemente aus dem Parenchym recrutieren, ist die Frage. Es scheint das letztere der Fall zu sein, da man kaum und nur bei grossen Spherastern in den letzten Stadien Karyokinesen sieht, dagegen jetzt und später viele Bilder, wo deutlich Zellen vom Charakter der Spiculabildner aus dem Parenchym an das bestehende Kieselgebilde hinwandern. Man sieht solche Zellen von unregelmässiger Form, ziemlich kleinem Plasmakörper (etwa halb so gross wie die ersten Bildungszellen) mit regelmässigen Granulationen bei einiger Aufmerksamkeit fast an jedem unausgewachsenen Spheraster in grösserer oder geringerer Zahl (Fig. 11

bis 17). Sie liegen an verschiedenen Stellen, bald mehr am kugeligen Centrum angehäuft, bald sich deutlich den Strahlen anschmiegend und diese einhüllend, bald um den Grund der Strahlen herumgebogen. Das Grössenwachstum betrifft dementsprechend bald mehr den centralen Körper, bald mehr die Strahlen und zwar mit einer gewissen Regelmässigkeit abwechselnd, so dass die daraus resultierenden Spherasterbilder, die im Lauf der Entwicklung auftreten, ziemlich verschieden sind und manchmal mehr als Oxyaster, wenn die spitzen, breitbasigen Strahlen überwiegen (Fig. 15), darnach wieder als Spheraster (Fig. 16), vorher beinahe als Sterraster (Fig. 12) bezeichnet werden konnten. Die letzten Phasen scheinen sich mit starker Ausprägung und Verlängerung der Strahlen zu befassen; ein Strahl besitzt dann etwa die Länge des Durchmessers des Centralkörpers, so dass vom Gesamtdurchmesser nur $^1/_3$ auf das Centrum, $^2/_3$ auf die Strahlen kommt (Fig. 17).

Die Bildungszellen liegen dann fast sämtlich an den Strahlen selbst. Hierfür wie für die Darstellung der Skleroblasten überhaupt erhält man recht instructive Bilder bei vorsichtiger Auflösung des Kieselskelets am ganzen Stück durch Einwirkung von Fluorwasserstoffsäure, ein Verfahren, das auch sonst zur Erlangung von Serienschnitten unerlässlich ist. Es verdient Hervorhebung, dass die mit Sublimatalkohol-Eisessig, Sublimatalkohol, überhaupt alle mit Sublimat behandelten Stücke sich hierfür viel günstiger erwiesen, als die mit Alkohol, mit Pikringemischen etc. behandelten, wo stets das Gewebe unter der Fluorwasserstoffsäure mitlitt. Dagegen ergaben die mit Sublimat etc. erhärteten Exemplare bei vorsichtiger Einwirkung (1—2 % Lösung von Fl H in Wasser 4—5 Tage lang in paraffinierten festschliessenden Glasdosen) histologisch noch durchaus tadellose Bilder, an denen sogar das Erkennen von Karyokinesen, das ja bei Schwämmen überhaupt nicht leicht gelingt, noch gut möglich war. Man sieht an Stelle der Spheraster ihre „Schatten", (Fig. 18 u. 19), und kann dann gerade an solchen leichten Stellen, während sonst durch Kleinheit der Zellen der Schnitt leicht zu dick erscheint, die Zellen ohne Verwechselung mit

drüber- und drunterliegenden Elementen gut studieren und die Bildungszellen viel besser sehen, als zwischen den Gruben und Spitzen des intacten Spherasters. An den fertigen Stadien ist der organische Mantel öfters an den Stellen, wo Strahlen abgehen durchbrochen (Fig. 18), so dass die Strahlen frei herausragen; an andern Stellen aber überziehen die Bildungszellen die Strahlen bis zum spitzen Ende. Gerade solche langgestreckten spindelförmigen Elemente schmiegen sich dem Strahl in ganzer Länge an. Wenn die Strahlen und auch der Centralkörper der Zellen schliesslich entbehren, so ist nach vielen Bildern amöboider Skleroblasten anzunehmen, dass sie nicht zu Grunde gehen, sondern wieder ins Gewebe zurückwandern.

Was die Entstehung der Einstrahler (Style) betrifft, so geht sie auch im erwachsenen Schwamm noch beständig vor sich, wie schon daraus ersichtlich ist, dass sich Stabnadeln jeder Grösse und Dicke dort finden können (Fig. 26, 27, 28); aber die kleinen Formen sind doch immer nur in verschwindender Minderzahl vorhanden. Die Bildung kann daher am besten in Nadeln der Knospe studiert werden (Fig. 25), wo nach dem Festsetzen eine sehr reichliche Ausscheidung zur Erzielung der radiären Skeletbündel stattfindet, teilweise auch in ganz frühen Stadien, wenn das Muttergewebe sich zur Knospenbildung anschickt.

Die Zellen, in denen die Stabnadeln gebildet werden, sind bedeutend grösser als die Mutterzellen der Spheraster, gehören aber sonst nach Plasma und Kerne zur gleichen Kategorie der „undifferenzierten“ Zellen des Parenchyms (Fig. 20 bis 22). Die Körnelung ist hier eine sehr ungleiche, sowohl was die Grösse der einzelnen Körner als, was ihre Verteilung betrifft; oft sieht man die Granulationen in mehreren wohlabgegrenzten kugeligen Aggregaten vermehrt angehäuft (Fig. 20), in andern Fällen sind sie diffus verteilt. Es treten dann gewöhnlich auch mehrere Kieselconcremente gleichzeitig auf (Fig. 22) untereinander von ungleicher Grösse, alle von mehr oder minder kantiger Form. Einen extremen Fall stellt Fig. 21 dar, wo die Kieselanhäufung besonders reichlich ist, vielleicht ebenfalls

zu früh eingetreten ist, ehe die Mutterzelle ihre letzten Teilungen gemacht hat. Dass es sich bei diesen Bildern nicht um Kunstprodukte, hervorgerufen durch Schnittführung oder Reagentien handelt, brauche ich wohl nicht zu betonen. Normalerweise finden sich weniger Concremente (Fig. 22), die sehr bald noch innerhalb der Zelle zu einem kleinen Stäbchen verschmelzen (Fig. 23). Bald darauf zeigen sich an dem Stäbchen, noch ehe es sehr viel weiter gewachsen ist, mehrere Bildungszellen. Es ist dies ein von den gewöhnlichen Monaxonien abweichendes Verhalten; aber in deren Fall bleibt es auch bei e i n e r Zelle und bei einer beschränkten Länge der Nadel, während hier die Stabnadeln verhältnismässig gigantische Proportionen erreichen und sich deswegen schon früh mit einem epithelialen Belag zur Kieselausscheidung versehen.

An sehr vielen der jungen Nadelbündel sieht man an den einzelnen Stabnadeln solche epithelartig angeordneten Zellen, die nicht zu verwechseln sind mit amöboiden und faserigen Zellen, die die Gesammtbündeln sonst begleiten. Am besten und unzweideutigsten werden auch hier die Bilder nach Auflösung der Kieselsubstanz durch Fluorwasserstoff, wo dann an Stelle der grossen Nadeln lange hohle Röhren zurückbleiben. Sie zeigen deutlich die organische Bekleidung, die mit verschiedenen Färbemitteln eine leichte Tinction zulässt (Fig. 29 und 30). Auf diesem organischen „Rock" sieht man dann die Bildungszellen in Strängen angeordnet liegen, kenntlich an der Körnelung, der Plasmatinction und Kernstructur, gewöhnlich von geringerer Grösse als die ersten Bildungszellen. In manchen Fällen sind die einzelnen Zellen deutlich getrennt zu sehen, der Belag macht alsdann den Eindruck eines Pflasterepithels (Fig. 29); in anderen Fällen sind die Zellgrenzen verwischt, und es erscheint ein Syncytium von Zellen (Fig. 30) mit mehreren Kernen vorhanden, das die Kieselausscheidung auf grosse Strecken hin besorgt, im Gegensatz zum localisierten und so zu sagen individualisiertem Verhalten der Zellen bei den Spherastern. Noch an sehr grossen Nadeln sind solche Bildungslager zu finden, und es ist schwer zu sagen, wo sie ganz

aufhören. Dass die Zellen nach gethaner Arbeit ins Gewebe wandern, dafür konnte ich bei diesen keine Bilder auffinden, im Gegenteil scheinen sie Fall zu collabieren und einzugehen.

Es lassen sich also für die Entstehung der Nadeln der Tethya folgende Thatsachen zusammen

1. Alle Nadeln entstehen zuerst in einer doch nur bei einer Kategorie, den Chiastern, genügt bei allen andern kommen weitere Zellen zum Wachs zur definitiven Formausprägung dazu.

2. Die kieselausscheidenden Zellen sind mit dicht erfüllt, die mit entsprechender Abscheidung substanz aufgebraucht werden. Der ersten Ausschei Zellteilungen voraus.

3. Bei den Chiastern, für die eine Zelle differenzierte Elemente des Parenchyms die Ausg bei den Spherastern und bei den Stabnadeln undi Zellen mit bläschenförmigem Kern und Nucleolus.

4. Die später dazu kommenden Bildungszellen teilweise durch Teilung der ersten, grösstenteils neu aus dem Parenchym dazugekommenen Elemen leiten. Ebenso können Zellen nach geschehener scheidung ins Parenchym zurückwandern.

5. Die Bildung des Spheraster geschieht durch zung mehrerer (wahrscheinlich zweier) kleinen Tetra Ausbildung dieser Grundform geschieht das Weiter durch Auflagerungen.

6. Die Bildung der Stabnadeln erfolgt durch zung kleinster unregelmässiger Concremente zu einen noch innerhalb einer Zelle. Das Weiterwachstum durch Apposition, die von epithelartig gelagerten zellen ausgeht.

Für die Beurteilung der Nadeln ergeben sich mittelbare Folgerungen.

Virkliche Mikroskleren (Fleischnadeln) sind nur die eine verbrauchenden Chiaster; die Spheraster dürfen trotz Form nicht als Fleischnadeln aufgefasst werden. Sie uchen, wie die Stabnadeln viele Zellen zu ihrer Bildung. ss dies hier ein prinzipieller, nicht durch Grösse bedingter chied ist, zeigt sich schon darin, dass kleine Spheraster, e ausgebildeten Chiaster an Grösse nicht übertreffen, viele Zellen besitzen, während umgekehrt noch die ausweise grossen Chiaster innerhalb einer einzigen Zelle vorn. Auch können die Spheraster nicht durch Verschmelzung r Chiaster entstanden gedacht, also einer Vielheit von skleren nicht gleichgesetzt werden; denn es sind auch artige Zellen, die die Mikroskleren als die die Makro- hervorbringen. Wie Evans bei Spongilla gezeigt hat ntstehen die kleinen Fleischnadeln in differenzierten Zellen ttleren Schicht, die Stabnadeln in indifferenten. Dasselbe r der Fall; die Chiaster erscheinen in Zellen mit Kernrk, die Stabnadeln in indifferenten, amöboidähnlichen ocyten, die im Kern und Plasma noch den Charakter izelle tragen, und die Spheraster folgen hierin den Chiastern, sondern den Stabnadeln.

Ian kann sie als verschmolzene Tetractine benen, deren Anfänge ähnlich waren, wie bei den tinen der Plakiniden, und der typischen Tetraxonier, die achher in die Breite wuchsen, statt durch Ausziehung Verästelung der Strahlen.

ür die Beurteilung der Stellung der Tethyaden und den menhang der grossen Schwammgruppen lassen sich daraus Schlüsse ziehen. Die Monaxonier, denen sie angehören, sich bekanntlich in die Unterordnungen der Hadromerina lina i. w. S.) und Cornacuspongia (Monaxonida s. str., ondrina i. w. S.). Zu der ersten Gruppe, bei denen die nadeln in Radiärbüscheln stehen, nicht durch Spongin zzüge angeordnet sind, gehören die Tethyaden. Man ese Gruppe, die sich auch durch den radiären Bau des körpers in einen Gegensatz zum Gros der Monaxonida, den

Cornacuspongien stellt, und dadurch wie durch das Vorhandensein einer Rinde, sowie in manch andern Charakteren den Tetractinelliden nähert, als diejenige bezeichnet, die die Abstammung der Monaxonier an den Tetraxoniern am ehesten documentiere. Die grossen Stabnadeln sollten durch Reduction von Vierstrahlern, speziell der grossen Triaene entstanden sein, deren einer Strahl ja extrem ausgezogen ist, während die drei andern kurze Zapfen darstellen können. Gerade die Keulennadeln der Clavulina sollten den Uebergang zeigen, man hat aber bisher vergeblich im keulenartig verdickten Ende nach einem Rest der Vierstrahligkeit, etwa in Form eines Axenkreuzes im Centralfaden gesucht. Es konnte daher auch die Ansicht bestehen, dass die Vierstrahler, speziell die grossen Triaene durch Gabelung des ungleichen Endes eines Monactins entstanden seien. Bei den grossen Stabnadeln sind hier bei Tethya allerdings ebensowenig Andeutungen der Vierstrahligkeit zu erkennen, auch in der Entwicklung nicht, trotz besonderem Suchen; dagegen ist hervorzuheben, dass sich vierstrahlige Nadeln bei der Spherasterbildung regelmässig zeigen. Damit sind die gesuchten Vierstrahler bei den Monaxonier, **wenn auch an anderer Stelle, doch wirklich aufgefunden, und thatsächliche Beweise für den Zusammenhang der Tetractinelliden und Monactinelliden geliefert.**

Litteraturverzeichnis.

1856. **Lieberkühn.** Zur Entwicklungsgeschichte der Spongillen. Archiv f. Anat. u. Physiol.

75. **Carter.** Notes introductory to the Study and Classification of the Spongida. Ann. u. Mag. Nat. Hist. (ser. 4), vol. 16.

79. **Deszö.** Die Histologie und Sprossenentwicklung der Tethyen. Arch. f. Mikr. Anat. 16. Bd. und

80. — — 17. Bd.

80. **Sollas.** The Sponge fauna of Norway. Ann. u. Mag. Nat. Hist. (ser. 5), vol. V.

80. **Schulze, F. E.** Untersuchungen etc. IX. Die Plakiniden. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 34.

81. — — X. Corticium candelabrum. ibid. Bd 35.

88. **Sollas.** Report on the Tetractinellida. Chall. Rep. 25.

90. **Maas.** Ueber die Entwicklung des Süsswasserschwammes. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 50.

92. — — Die Metamorphose von Esperia lorenzi. Mitteil. Zool. Stat. Neapel. Bd. 10.

96. **Lendenfeld.** Die Clavulina der Adria. Nova Acta [illegible] der Leop. Carol. Akad. Halle. Bd. 69 [illegible]

98. **Minchin.** On the origin and growth of the [illegible] spicules [illegible] Quart. Journ. Micr. Science. vol. 40 New ser.

99. **Evans.** The structure and Metamorphosis of the larva of Spongilla lacustris. Quart. Journ. Micr. Sc. New ser. vol. 42

1900. **Topsent.** Spongiaires de France [illegible] Monaxonida [illegible] Arch. Zool. exp. [illegible] 3 Bd. [illegible]

Tafelerklärung.

Sämtliche Figuren mit Ausnahme von 31—34 sind mit gleicher Vergrösserung (700 : 1) gezeichnet.

Fig. 1. Drei Mutterzellen von Chiasterbildungszellen, in zwei davon Karyokinesen.

Fig. 2. Vier einzelne Chiasterbildungszellen (a noch ohne Kieselausscheidung; in den andern letztern um den Kern unsymmetrisch beginnend).

Fig. 3. Mehrere Chiaster mit ihren Bildungszellen im Gewebe, I die einfachste Form, II und III mit knorrigen Enden, die Zelle spannend, IV die Zelle nur mehr anliegend.

Fig. 4. Ausnahmsweise grosse Chiaster, I noch unvollendet in der Bildungszelle, II mit vielen Strahlen und zwei Kernen, III mit nur fünf Strahlen.

Fig. 5. Vier Zellen, die die erste Entstehung der Spheraster zeigen.

Fig. 6. Zwei Zellen mit dem Tetractinstadium des Spherasters (versch. Einstellung der Nadel).

Fig. 7. Zelle mit etwas grösserem Spheraster.

Fig. 8, 9, 10. Drei verschiedene Bilder von je zwei sich zur Verschmelzung anschickenden Tetractinen.

Fig. 11. Der daraus resultierende Spheraster mit 2 anliegenden Zellen.

Fig. 12, 13, 14. Weiteres Wachstum mit dazukommenden Parenchymzellen.

Fig. 15. Wachstum besonders an den Strahlen.

Fig. 16. Wachstum darauf besonders am Centrum.

Fig. 17. Kurz vor der Spheraster endgiltigen Ausbildung.

Fig. 18 u. 19. „Schatten" von Spherastern nach Auflösung durch Fluorwasserstoff mit den anliegenden Bildungszellen.

Fig. 20. Amöboide Mutterzelle einer Stabnadelbildungszelle.

Fig. 21. Anormalgrosser Skleroblast mit zahlreichen, kleinen Kieselconcrementen.

Fig. 22. Drei normale Skleroblasten von Stabnadeln mit wenigen, immer mehr sich zusammenschliessenden Concrementen.

Fig. 23. Erste Anlage des eigentlichen Stäbchens innerhalb einer Zelle.

Fig. 24. Weiterwachstum mit mehreren Zellen.

Fig. 25. Stabnadel der Knospe und

Fig. 26, 27, 28. Stabnadelstücke des Erwachsenen mit gleicher Vergrösserung.

Fig. 29 u. 30. Stücke vou Stabnadeln im eben angesetzten Schwämmchen nach Kieselauflösung durch Fluor; in 29 epithelialer, in 30 mehr syncytialer Zellenbelag.

Fig. 31 u. 32. Sehr starke Vergrösserung zweier Skleroblasten mit der ersten Anlage des Concrements innerhalb einer Vacuole, um die sich die Körner sammeln.

Fig. 33. Zwei Tetraster mit ihren Zellen, die sich zur Spherasterbildung aneinanderlegen, bei starker Vergrösserung, die Mittelteile sind bereits verschmolzen.

Fig. 34. Einige später auflagernde Zellen an den Spherastern bei sehr starker Vergrösserung.



Namen-Register.

Sach-Register.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1900.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:

Argovia. Bd. 28. 1900. 8°.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XXIII, part 1. 2. 1899. 8°.
Memoirs. Vol. I, part 1. 1899. 4°.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Rad. Vol. 140. 141. 1899. 8°.
Monumenta historico-juridica Slav. merid. Vol. VII, 1. 1899. 8°.
Ant. Radić, Zbornik za narodni život. Bd. IV, 2. 1899. 8°.
Milivoj Šrepel, Gracta za povjest Književnosti hrvatske Kniga 2. 1899. 8°.
P. Budman, Rjetnik hrvatskoga ili srpskoga jezika Svezak 19. 1899. 4°.

Kgl. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. II, 1. 2. 1900. 4°.

Kroatische archäologische Gesellschaft in Agram:

Vjestnik. N. S. Sveska IV. 1899/1900. 4°.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Bulletin. Année 1898 trimestre 1—4. 1899, 1. 1898—99. 8°.

Observatoire national d'Athènes:

Annales. Tom. II. 1900. 4°.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Zeitschrift. 26. Jahrg. 1899. 8°.

Peabody Library in Baltimore:

Extract from first Catalogue (Artikel: London). 1899. 4°.

Maryland Weather Service in Baltimore:

Maryland Weather Service. Vol. I. 1899. 8°.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Maryland Geological Survey. Vol. III. 1899. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Bamberg:

XVII. Bericht. 1899. 8°.

Kgl. Bibliothek in Bamberg:

Katalog der Handschriften. Bd. I. Abth. 2. Lfg. 3. 1899. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Band XII, 2. 1900. 8°.
Der Basler Chemiker Christ. Friedr. Schönbein. 1899. 8°.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Jahresbericht über das Jahr 1898/99. 1899. 8°.
Beiträge zur vaterländischen Geschichte. N. F. Bd. 5. H. 3. 1900. 8°.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1898/99 in 4° u. 8°.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Band 42, 1. 1899. 8°.
Notulen. Deel 37, afl. 1. 2 en Register over 1889—98. 1899. 8°.
Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia. Anno 1686 und 1672. 1899. 4°.

Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XXI. 1898. 1899. fol.
Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Jaarg. XX. 1898. 1899. 8°.
Die Abweichung der Magnetnadel, Beobachtungen von W. von Bemmelen. 1899. fol.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Glas. No. 58. 1900. 8°.
Spomenik. No. 36. 37. 1900. 4°.

Museum in Bergen (Norwegen):

G. O. Sars. An account of the Crustacea. Vol. III, part 1—4. 1899. 1900. 4°.
Aarbog für 1899. 1900. 8°.
Aarsberetning for 1899. 1900. 8°.

University of California in Berkeley:

Schriften der Universität of California aus dem Jahre 1899. 8°.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Die zweihundertjahrfeier der kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften am 19. u. 20. März 1900. Berlin. 4°.
Geschichte der kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften, bearbeitet von A. Harnack. Bd. I, 1. 2, II, III. 1900. 8°.
Sitzungsberichte. 1899. No. 39—53. 1900. No. 1—22. 8°.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Jahrbuch für die Jahre 1896—1898. 1897—99. 8°.

Central-Bureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Bericht über den Stand der Erdforschung der Breitenvariation am Schlusse d. J. 1899. 1900. 8°.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 32. Jahrg., No. 19. 33. Jahrg., No. 1—11. 1900. 8°.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 51, Heft 3. 4. 1899. 8°.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Band 30. 1900. 8°.

Deutsche physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1893. 54. Jahrg. in 3 Abteilungen. Braunschweig 1899—1900. 8°.
Verhandlungen. Jahrgang 1, No. 15. Jahrgang 2, No. 1—11. Leipzig. 1899—1900. 8°.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie 1899/1900. Bd. XIII, No. 21—26 a u. b Bd. XIV, No. 1—6. 8°.
Verhandlungen 1899—1900. No. 1—10. 8°.

K. technische Hochschule in Berlin:

Rede zur Feier der Jahrhundertwende am 9. Jan. 1900 von A. Riedler. 4°.
Ueber die geschichtliche und zukünftige Bedeutung der Technik, Rede von A. Riedler. 1900. 4°.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band XIV, 4. Band XV, 1. 1900. 4°.

K. preuss. Geodätisches Institut in Berlin:

A. Westphal, Das Mittelwasser der Ostsee. 1900. 4°.
Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung. 1900. 4°.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Regenkarte der Provinz Preussen von G. Hellmann. 1900. 8°.
Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen im Jahre 1897. 1899. 4°.
Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen in den Jahren 1895 u. 1896. 1899. 4°.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordnung im Jahre 1895 und 1899. 1899—1900. 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Band XXVIII, Heft 3. 1900. 8°.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. 49. Jahrg., No. 2—13. 1900. 8°.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band XV, Heft 1—6. 1900. Fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 20. Jahrg., Heft 1—6. 1900. 4°.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 24. Band. Zürich. 1899. 8°.

Schweizerische geologische Kommission in Bern:

Carte géologique de la Suisse feuille XVI (2. édit.) avec notice explicative. 1899. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. III. Serie. Vol. 17, Fasc. 4—6. 1900. 8⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1899, 2. Hälfte. 8⁰.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 104. 1899. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 56. Jahrg., 2. Hälfte. 1899. 8⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Procès-verbaux Année 1898—99. 1899. 8⁰.
Mémoires. 5ᵉ Série, tome 3, cahier 2. Tome 5, cahier 1. 1899. 8⁰.
Observations pluviométriques 1898—99. 1899. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 53. 1898. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1900. No. 1—12. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 35, No. 4—9. 1899. 8⁰.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 29, No. 1—8. 1899. 8⁰.

Archiv der Stadt Braunschweig:

Urkundenbuch der Stadt Braunschweig. Bd. II, Abth. 3. 1900. 4⁰.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. 4. Jahrg., Heft 1, 2. 1900. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Band 37. 1898. 1899. 8⁰.
XVII. Bericht d. met. Comm. i. J. 1897. 1899. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série. Tom. XIII, No. 11. 1899. Tom. XIV, No. 1—5. 1900. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Bulletin. a) Classe des Lettres 1899, No. 11, 12. 1900, No. 1—4;
b) Classe des Sciences 1899, No. 11, 12. 1900, No. 1—4. 8⁰.
Annuaire. 66ᵉ année. 1900. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome XIX, fasc. 1, 2. 1900. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Vol. 43. 1899. 8⁰.
Mémoires. VII. 1900. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tome 12, Fasc. 2. 13, 1. 14, 1. 1900. 8⁰.

Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:

Bulletin des Séances 1899, p. XCVII—CXXVIII. 8⁰.
Annales. Tome 31, fasc. 2. 1896. Tome 33. 1898. 8⁰.

Observatoire Royale in Brüssel:

Bulletin mensuel de magnetisme terrestre. Sept. u. Oct. 1899, Janvier 1900. 8⁰.
Annuaire 65ᵉ année 1898 avec Supplement
66ᵉ „ 1899
67ᵉ „ 1900 1898—1900. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Diplomacziai Emlékek az Anjon-Korból III. 1876. 8⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

A Magyar kir. földtani intézet évköngve. Bd. XIII, 2. 1899. 4⁰.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd. XIII. Heft 1, 2. 1899. 8⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 29. Heft 1—12. 1899. 8⁰.

K. ungarisches Ackerbau-Ministerium in Budapest:

Landwirtschaftliche Statistik der Länder der ungarischen Krone. Bd. IV. 1900. 4⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Comunicaciones. Tomo I, No. 5. 1900. 8⁰.

Officina meteorologica Argentina in Buenos Aires:

Anales. Tomo XII. 1898. 4⁰.

Deutsche akademische Vereinigung in Buenos Aires:

Veröffentlichungen. Bd. I. Heft 1—3. 1900. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Bulletin No. III. 1900. 4⁰.
Mededeelingen. No. 34. 36. 37. Batavia 1899. 1900. 4⁰.
M. Raciborski, Parasitische Algen und Pilze Java's. Theil I. Batavia 1900. 4⁰.

Society of natural sciences in Buffalo:

Bulletin. Vol. 6. No. 2—4. 1899. 4⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Documente privitóre la istoria Românilor. Vol. XI (1517—1612) 1900. 4⁰.
Eudoxiu de Hurmuzaki, Documente privitóre la Istoria Românilor. Vol. IX, 2 et Suppl. II, Vol. III, fasc. 1. 1899—1900. 4⁰.
Acte si fragmente din Istoria Românilor de Neculac Jorga I. 1895. 8⁰.
Fragmente din Istoria Românilor de Eudoxin Baron de Hurmuzaki. 1900. 8⁰.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele. Tom. 14. 1898. 1900. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Mémoires. Vol. XIX, fasc. 3. 1899. 4⁰.
Bulletin. 5. Série. Vol. II. 1899. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1899. August—Dezember. 1900. Fol.

Geological Survey of India in Calcutta:

Memoirs. Vol. 28, part 1. 1898. 4⁰.
Palaeontologia Indica Ser. XV, Vol. 1, part 2. Vol. II.
Title page etc. New Series Vol. I. No. 1 u. 2. 1899. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 950 und 953—963. 1899—1900. 8⁰.
Journal. No. 382. 383. 1899—1900. 8⁰.
Proceedings. 1899. No. VIII—IX. 1900. No. I. 8⁰.
Catalogue of Books and Manuscripts of the Asiatic Society of Bengal. Fasc. II. 1900. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass:

Bulletin. Vol. 35. No. 8. 1900. 8⁰.
Memoirs. Vol. XXIII. No. 3. 1899. 4⁰.
Vol. XXIV. Reports of an Exploration of the West coasts of Mexico.
Vol. XXVI. The Fishes by S. Garman. Text and Atlas. 1899. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

54th annual Report for the year ending Sept. 30. 1899. 8⁰.
Annals. Vol. 32, part 2. Vol. 33, Vol. 42, part 2. Vol. 44, part 1. 1899—1900. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. X, part 4, 5. 1900. 8⁰.
Transactions. Vol. XVIII. Vol. XIX, 1. 1900. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV, Vol. 12. 1899. 4⁰.
Bollettino. Fasc. 60, 61, 62. 1899—1900. 8⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

1. Jahrgang der Decaden-Monatsberichte für 1898. 1899. 4⁰.
Jahrbuch 1897. Jahrg. XV, Abth. III. 1899. 4⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 40. 41. 1899. 8⁰.
The Birds of Eastern North America by Charles B. Cory. Part II. 1899. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court“ in Chicago:

The Open Court. Vol. XIV, (No. 1—2) No. 524. 525. 1900. 8⁰.

Yerkes Observatory of the University of Chicago:

Bulletin. No. 12. 1899. 4⁰.
I. II. annual Report. 1899. 4⁰.
Publications. Vol. I. 1900. 4⁰.

Zeitschrift „Astrophysical Journal" in Chicago:

Vol. XI, No. 1—4. 1900. 8⁰.

Norsk Folkemuseum in Christiania:

Beretning om Foreningens Virksomhed 1899, No. V. 1900. 8⁰.

Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Forhandlingar 1899, No. 2—4. Oversigt u. Tit. 1900. 8⁰.
Skrifter. I. Mathem.-naturwiss. Klasse 1899, No. 1. 5. 8. 9 u. Tit.
II. Histor.-filos. Klasse 1899, No. 5 u. Tit. 1900. 4⁰.

Kgl. Norwegische Universität in Christiania:

Universitets Aarsberetning for 1897—98. 1899. 8⁰.
Universitets-og Skole-Annaler. 13. Aarg. 1898. 1899. 8⁰.
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. XX, Heft 4. Bd. XXI, Heft 1—3. 1897—99. 8⁰.
Jahrbuch des meteorologischen Instituts für 1898. 1899. 4⁰.
Norske Gaardnavne af O. Rygh. 1898. 8⁰.
A. Chr. Bang, Documenter og studier II. 1899. 8⁰.

Committee of the Norwegian North-Atlantic Expedition in Christiania:

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878. No. XXV. XXVI. XXVII. 1899—1900. Fol.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:

XXIX. Jahresbericht. Jahrg. 1899. 1900. 8⁰.

Franz-Josephs-Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1900. 8⁰.
Die feierliche Inauguration des Rektors für 1899/1900. 1899. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. Neue Folge. Bd. X. Heft 1. 1899. 8⁰.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Hans Märcker, Geschichte der ländlichen Ortschaften des Kreises Thorn.

Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:

Archiv für Hessische Geschichte. Neue Folge. 2. Bd. 2. Heft. 1899. 8⁰.
Oberhessisches Wörterbuch von Wilh. Crecelius. Lfg. 3. 4. 1899. 8⁰.

Davenport Academy of natural sciences in Davenport:

Notes on Mining in the State of Durango, Mexico. By H. van F. Furmann. 1900. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. 20, trimestre 4. 1899. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Ser. III, Vol. 5, No. 4. 1900. 8⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 22, No. 1—5. 1900. 8⁰.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports from the Laboratory. Vol. VII. 1900. 8°.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XXII, No. 6, 7. 1899. Vol. XXIII, No. 1. 1900. 8°.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. II, No. 4. 1899. 8°.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1898—99. 1900. 8°.

Karl Friedrichs-Gymnasium zu Eisenach:

Jahresbericht f. d. J. 1899—1900. 1900. 4°.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

83. u. 84. Jahresbericht für 1897/99. 1899. 8°.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Serie, Vol. 22, disp. 3—4. 1899. 8°.

R. Deputazione Toscana sugli studi di storia patria in Florenz:

Documenti per la storia della città di Arezzo per Ubaldo Pasqui. Vol. I. 1899. 4°.

R. Istituto di studi superiori in Florenz:

Pubblicazioni. a) Sezioni di filosofia e filologia. No. 28. 1896—97. 4°.
b) Sezioni di scienze fisiche e naturali. No. 28—29. 1896—97. 4°.
c) Sezioni di medicina e chirurgia. No. 15, parte IV. No. 18—20. 1896—97. 4°.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Bd. 20, Heft 2. Bd. 26, Heft 1. 1899. 4°.
Bericht 1899. 1900. 8°.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a/M.

Mittheilungen über römische Funde in Heddernheim III. 1900. 4°.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

„Schau-ins-Land." Jahrlauf 26. 1899. Fol.

Universität Freiburg in der Schweiz:

Index lectionum. Verzeichniss der Vorlesungen, Sommer-Semester 1900. 8°.
Collectanea Friburgensia. Fasc. IX. 1900. 4°.

Verein für Naturkunde in Fulda:

Jos. Vonderau, Pfahlbauten im Fuldathale. 1899. 4°.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:

Bulletin. Tom. 2, livr. 3. 1900. 8°.

Kruidkundig Genootschap Dodonaea in Gent:

Botanisch Jaarboek. XI. Jahrg. 1899. 8°.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 75, Heft 2. 1899. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1899. No. 6, 11, 12; 1900. No. 1—4. Berlin 1899—1900. 4°.

Nachrichten. a) Philol.-hist. Classe. 1899. Heft 4. 1899. 4°.
b) Mathem.-phys. Classe. 1899. Heft 3. 1899. 4°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothemburg:

Handlingar. IV. Folge. Heft II. 1899. 8°.

Stadtbibliothek in Gothemburg:

Göteborgs Högskolas Årsskrift. Bd. 5. 1899. 8°.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. X, No. 1, 2. 1900. 8°.

Universität in Graz:

Verzeichniss der Behörden, Lehrer und Beamten. 1899/1900. 4°.

Verzeichniss der Vorlesungen, Sommersemester. 1900. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mittheilungen. 31. Jahrg. Berlin 1900. 8°.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:

Jahresbericht über das Jahr 1899/1900. 1900. 4°.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië im Haag:

Bijdragen. 6de Volgreeks, Deel VII, aflev. 1, 2. 1900. 8°.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Sér. II, Vol. 6, partie 4, 5. 1899/1900. 4°.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises. Sér. II, Tom. 3, livre 3—5. 1900. 8°.

Historischer Verein für Württemb. Franken in Schwäbisch-Hall:

Württembergisch Franken. N. F. VII. 1900. 8°.

Kaiserlich. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 35, No. 12. 1899. Heft 36, No. 1—5. 1900. 4°.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 53, Heft 4. Band 54, Heft 1. Leipzig 1899/1900. 8°.

Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Band XI, 2. Leipzig 1899. 8°.

Universität Halle:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1900. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 72, Heft 3—5. Stuttgart 1899—1900. 8°.

Mathematische Gesellschaft in Hamburg:

Mittheilungen. Bd. 3, Heft 9. Leipzig 1900. 8°.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Mittheilungen. 19. Jahrg. 1898/99. 1900. 8°.

Gesammtregister von 1839—1899. 1900. 8°.

Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung in Hamburg:

Verhandlungen. Bd. 10. 1899. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Abhandlungen. Bd. XVI, 1. Hälfte. 1900. 4⁰.
Verhandlungen 1899. III. Folge XII. 1900. 8⁰.

Bibliothek der deutschen Seewarte in Hamburg:

II. Nachtrag zum Katalog. 1899. 8⁰.

Geschichtsverein in Hanau:

Jahresbericht für das Jahr 1898/99. 1899. 8⁰.

Universität Heidelberg:

Herm. Osthoff, vom Suppletivwesen der indogermanischen Sprachen. 1899. 4⁰.
Robert Wilhelm Bunsen, ein akademisches Gedenkblatt. 1900. 4⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. 9, Heft 2. 1899. 8⁰.

Naturhistorisch-medicinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Band VI, Heft 3. 1899. 8⁰.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:

Bulletin. No. 9, 10. 1899. 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Öfversigt af Förhandlingar XLI. 1898—99. 1900. 8⁰.
Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 58. 1900. 8⁰.

Societas pro Fauna et Flora Fennicia in Helsingfors:

Acta. Vol. 15. 17. 1898—99. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F., Band 29, Heft 2. 1900. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1898/99. 1900. 8⁰.

Ostsibirische Abtheilung der Kaiserlich russischen Geographischen Gesellschaft in Irkutsk:

Iswestija. Tom. 30, No. 2–3. 1900. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 3, No. 9. 1899. Vol. 4, Nr. 1—4. 1900. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Band VI, Lieferung 3. Text und Atlas. 1899. Fol.
Band VIII, Lieferung 5. Text und Atlas. 1900. Fol.

Société de médecine in Kharkow:

Trudy. 1898. 1900. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:

Sapiski 1900. kniga 1, 2. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Band 29. 1900. 8⁰.

zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

tliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. V, Heft 1. Ab-
; Kiel. 1900. 4°.

Universität in Kiew:

Vol. 39, No. 5, 9—12. 1899. Bd. 40, No. 1—4. 1900. 8°.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

e. Witterungsjahr 1899. 1900. Fol.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

40. Jahrg. 1899. 4°.

K. Universitäts-Sternwarte in Königsberg:

ische Beobachtungen, Abteilung 38 u. 39. 1899. Fol.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

. 1899. No. 6. 1900. No. 1—3. 8°.
es. a) Sections des Lettres. Tome VI, No. 1.
b) Sections des Sciences. Tome IX, No. 4—6. 1900. 4°.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

er 1899, II. Raekke. 14. Band, Heft 4. 1900. 8°.
res. Nouv. Sér. 1899. 8°.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

er. 1899, October—Dezember. 1900, Januar—März. 8°.
wy. a) histor.-filozof. tom. 37 und Ser. II, tom. 13.
b) filolog. Ser. II, tom. 14.
c) matemat. Ser. II, tom. 16 (36). 1899. 8°.
k. Rok 1898/99. 1899. 8°.
ozdanie komisyi hist. sztuki Tom. VI, 4. 1899. 4°.
res Rerum Polonicarum. Tom. 17. 1899. 8°.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

n. IV. Série, Vol. 35, No. 133, 134. 1899. Vol. 36, No. 135,
6. 1900. 8°.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

lingen en Mededeelingen, jaar 1898—99. 1890. 8°.
berichten der afgestorven Medeleden 1898—99. 1899. 8°.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

. II. Reihe, Theil XVII, Heft 3. 1900. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

dlungen der philol.-hist. Classe. Band XX, No. 1. 1900. 4°.
dlungen der mathem-physikalischen Classe. Bd. XXV, 6 u. 7.
l. XXVI, 1 u. 2. 1900. 4°.
te der philol.-histor. Classe. Bd. 51, No. 4. 5. 1899. Bd. 52,
o. 1—3. 1900. 8°.
te der mathem.-physik. Classe. Bd. 51, 1899, Allgemeiner Teil.
aturwissenschaftl. Teil und Mathematisch. Teil, No. 5 u. 6. Bd. 52.
00. I, II. 8°.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

hriften. No. XXXV. 1900. 4°.

Journal für praktische

Journal. N. F. Bd 60, Heft 9—12. 18

Verein für Erdkunde

Mittheilungen 1899. 1900. 8°.

University of Nebraska

Bulletin of the U. S. Agricultural Exper
Vol. XI, No. 55—59. 1898—99. 8°.

Sociedade de geographia in

Boletin. 17. Serie, 1898—99, No. 1, 2. 1899.

Literary and philosophical Society

Proceedings. No. LIII. 1899. 8°.

Université Catholique in Loew

Schriften der Universität a. d. J. 1898/99.

Zeitschrift „La Cellule" in Loew

La Cellule. Tome XVII, 1. 1900. 4°.

Her Majesty's Secretary of State for India in Cou

Dictionary of the Lepcha-Language by G. B. Mainw
Albert Grünwedel. Berlin 1898. 4°.

The English Historical Review in London

Historical Review. Vol. 15, No. 57, 58. 1900. 8°.

Royal Society in London:

Year-book 1900. 8°.
Proceedings. Vol. 65, No. 422—423. Vol. 66, No. 424—43

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 60, No. 2—7. 1899—1900. 8°.

Chemical Society in London:

Journal No. 447—452 (February—July 1900). 8°.
List of the Fellows and Officers March 1900. 8°.
Proceedings. Vol. 16, No. 217—226. 1900. 8°.

Linnean Society in London:

The Journal. Zoology. Vol. 27, No. 177, 178. 1899—1900. 8°.
List 1899—1900. 1899. 8°.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1900, part 1—3. 8°.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1899, part IV. 1900, part I. 1900. 8°.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1575—1600. 1900. 4°.

Missouri Botanical Garden in St. Louis:

11. annual Report. 1900. 8°.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. V, Heft 1. Abtheilung Kiel. 1900. 4⁰.

Universität in Kiew:

Iswestija. Vol. 39, No. 5, 9—12. 1899. Bd. 40, No. 1—4. 1900. 8⁰.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Diagramme. Witterungsjahr 1899. 1900. Fol.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 40. Jahrg. 1899. 4⁰.

K. Universitäts-Sternwarte in Königsberg:

Astronomische Beobachtungen, Abteilung 38 u. 39. 1899. Fol.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1899. No. 6. 1900. No. 1—3. 8⁰.
Mémoires. a) Sections des Lettres. Tome VI, No. 1.
b) Sections des Sciences. Tome IX, No. 4—6. 1900. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger 1899, II. Raekke. 14. Band, Heft 4. 1900. 8⁰.
Mémoires. Nouv. Sér. 1899. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. 1899, October—Dezember. 1900, Januar—März. 8⁰.
Rozprawy. a) histor.-filozof. tom. 37 und Ser. II, tom. 13.
b) filolog. Ser. II, tom. 14.
c) matemat. Ser. II, tom. 16 (36). 1899. 8⁰.
Rocznik. Rok 1898/99. 1899. 8⁰.
Sprawozdanie komisyi hist. sztuki Tom. VI, 4. 1899. 4⁰.
Scriptores Rerum Polonicarum. Tom. 17. 1899. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série, Vol. 35, No. 133, 134. 1899. Vol. 36, No. 135, 136. 1900. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Handelingen en Mededeelingen, jaar 1898—99. 1890. 8⁰.
Levensberichten der afgestorven Medeleden 1898—99. 1899. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe, Theil XVII, Heft 3. 1900. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Band XX, No. 1. 1900. 4⁰.
Abhandlungen der mathem-physikalischen Classe. Bd. XXV, 6 u. 7. Bd. XXVI, 1 u. 2. 1900. 4⁰.
Berichte der philol.-histor. Classe. Bd. 51, No. 4. 5. 1899. Bd. 52, No. 1—3. 1900. 8⁰.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Bd. 51, 1899, Allgemeiner Teil. Naturwissenschaftl. Teil und Mathematisch. Teil, No. 5 u. 6. Bd. 52. 1900. I, II. 8⁰.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Preisschriften. No. XXXV. 1900. 4⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias y Revista. Tomo XII, No. 11 y 12. 1899. 8⁰.

Sociedad de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Serie, Tom. 3, cuad. 3 y 4. 1899. 4⁰.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Ser. IV, Vol 1, anno 32. 1899. 1900. 8⁰.

Museo nacional in Montevideo:

Anales. Tom. II, Fasc. 12. Tom. III, fasc. 13. 1899—1900. Fol.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des lettres. 2ᵉ Série, Tome 2, No. 2.
Section des sciences. 2ᵉ Série, Tome 2, No. 5.
Section de médecine. 2ᵉ Série, Tome 1, No. 2, 3. 1898—99. 8⁰.

Observatoire météorologique et magnétique de l'Université Imp. in Moskau:

Observations. Décembre 1898 et Janvier—Juin et Août 1899. 4⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1899. No. 1—3. 1899—1900. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 1899, No. 10—12. 1900, No. 1. München. 4⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:

Münchener statistische Jahresübersichten für 1898. 1900. 4⁰.
Verzeichnis der Strassen und Plätze in München. 1900. 4⁰.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Nachträge zum Verzeichniss der in und ausserhalb Bayern erscheinenden Zeitungen. 1900.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Sommer-Semester 1900. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1900. 8⁰.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1900. No. 1—13. 8⁰.

K. Oberbergamt in München:

Geognostische Jahreshefte XI. u. XII. Jahrg. 1898 u. 1899. 4⁰.

K. Staatsministerium des Innern in München:

Der Stand des landwirthschaftlichen Genossenschaftswesens in Bayern 1899. 1900. 4⁰.
Jahrbuch des Hydrotechnischen Bureaus 1899 u. 1900. Heft 1. 4⁰.

Universität in München:

Schriften aus den Jahren 1899/1900 in 4⁰ und 8⁰.
Amtliches Verzeichniss des Personals. Sommer-Semester 1900. 8⁰.
Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1900. 4⁰.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Bd. VIII. 1898. 1899. 8⁰.

Historischer Verein in München:

Altbayerische Monatsschrift. Heft 1—8. 1900. 4⁰.

Bayer. Kunstgewerbeverein in München:

Denkschrift. Die würdige Ausgestaltung der Kohleninsel. 1900. 4⁰.

Ornithologischer Verein in München:

Jahresbericht für 1897 u. 1898. 1899. 8⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. 1900, No. 112—114, 116, 117. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens in Münster:

Zeitschrift. Bd. 57. 1899. 8⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:

Mémoires. 5. Série, tom. 16. 1899. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Sér. II, Tome 16, fasc. 33. Sér. III, Tome 1, fasc. 1, 2. Paris 1899. 1900. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali e politiche in Neapel:

Rendiconto. Seriè 3, Vol. 5, fasc. 8—12. 1899. Vol. 6, fasc. 1—4. 1900. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 48, part 5, 6. Vol. 49, part 1, 2. 1899—1900. 8⁰.
Annual Report for the year 1898—99. 1899. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Serie, Vol. 9, No. 49—54 (January—June). 1900. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. XX, 2. Half. 1899. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Charter and List of Members. 1899. 8⁰.

American Jewish Historical Society in New-York:

Proceedings. No. 7. 1899. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol XI, part II. 1899. 8⁰.

American Mathematical Society in New-York:

Transactions. Vol. 1, No. 1. Lancaster, Pa. 1900. 4⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 31, No. 5. 1899. Vol. 32, No. 1, 2. 1900. 8⁰.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. Vol. III, No. 4—6. 1899. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:

Jahresbericht über das 21. Vereinsjahr 1898. 1899. 8⁰.
Mittheilungen. 13. Heft. 1899. 8⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mittheilungen. Bd. 24. 1899. 1900. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. IV, part 1 by Lawrence M. Lambe. 1899. 8⁰.
R. G. Mc Connell, Preliminary Report on the Klondike Gold Fields mit Karten. 1899. 8⁰.
Annual Report. N. Ser. Vol. X, 1897 mit Karten. 1899. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie. Vol. XV. 1899. 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Atti. Serie II. Vol. IV, fasc. 1. 1900. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Annuario. 1900. 8⁰.
Rendiconti. Tomo XIV, Fasc. 1—4. 1900. 8⁰.

Societa di scienze naturali ed economiche in Palermo:

Giornale di scienze naturali. Vol. XXII. Anno 1899. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Rapport sur les vaccinations en 1897. Melun 1898. 8⁰.
Rapports de la commission permanente de l'hygiène de l'enfance, pour 1898. 1898. 8⁰.
Bulletin. 1900, No. 1—26. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 130, No. 2—26. 1900. 4⁰.
Oeuvres d'Augustin Cauchy. II. Série, Tom. 4. 1899. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Procès-verbaux de 1899. 8⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 698—703 (Fevrièr—Juillet). 1900. 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Annales. Bibliothèque d'études. Tome 8. 1899. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 39, No. 1—3. Tome 40, No. 1—3. 1899. 1900. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1899, No. 3—8. 1900, No. 1. 8⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Série. Tome 10, fasc. 2, 3, 5. 1899. 8⁰.

Société des études historiques in Paris:

Revue. Nouv. Sér., Tome 2, No. 1—3 et 2 Supplèments. 1900. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus. 1899. No. 7. 8⁰.
Bulletin. VIIᵉ Série, Tome 20, 4ᵉ trimestre 1899. 8⁰ et année 1900. No. 1. 4⁰.
La Géographie, Année 1900. No. 2—6. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 27, No. 4, 1899. Tome 28, No. 1. 1900. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tome XXIV. 1899. 8⁰.

California Paris Exposition Commission of 1900 in Paris:

Six maps of the State of California.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Annuaire du Musée zoologique 1899. No. 4. 1900. 8⁰.

Physikalisch-chemische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 31, Heft 8, 9. 1899. Tom. 32, Heft 1—3. 1900. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Godischni Akt 1899 (Jahrbuch). 1900. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1899, part II. 1899. 8⁰.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings at the 47. annual Meeting held at Put-in-Bay. Sept. 1899. Baltimore 1899. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 23, No. 4. Vol. 24, No. 1 1900. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 36, No. 1—6. 1900. 8⁰.

The American Association to promote the teaching of speech to the Deaf in Philadelphia:

6. Summer Meeting at Northampton, Mass. 1899. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 38, No. 160. 1899. 8⁰.
Transactions. Vol. 20, part 1. 1899. 4⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Vol. XXI. 1899. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. XI, pag. 159—177. Vol. XII, pag. 1—28. 1899—1900. 8⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il Nuovo Cimento. Serie IV, tom. X, Novembre e Dicembre 1899; tom. XI Gennaio—Marzo. 1900. 8⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht für 1899/1900. 4⁰.

Alterthumsverein in Plauen:

Regesten zur Orts- und Familiengeschichte des Vogtlandes. Bd. II. 1898. 8⁰.
Mittheilungen. 13. Jahresschrift auf die Jahre 1897/99. 1900. 8⁰.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. Bd. XIII, 3, 4. Bd. XIV, 1—4. 1898—99. 8°.
Historische Monatsblätter. Jahrg. I, No. 1—3. 1900. 8°.

K. geodätisches Institut in Potsdam:

Die Polhöhe von Potsdam. II. Heft. Berlin 1900. 4°.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Joh. Endt, Beiträge zur jonischen Vasenmalerei. 1899. 4°.
Ludwig Pollak, Zwei Vasen aus der Werkstatt Hierons. Leipzig 1900. 4°.
Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Band X. 1899. 8°.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Mittheilung. No. X. 1900. 8°.
Rechenschaftsbericht für das Jahr 1899. 1900. 8°.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Jahresbericht für das Jahr 1899. 1900. 8°.
Sitzungsberichte 1899. a) Classe für Philosophie.
b) Mathem.-naturw. Classe 1899. 1900. 8°.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Sbornik. Číslo II, III. 1899. 8°.
Časopis. Band 29, No. 1—5. 1900. 8°.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht über das Jahr 1899. 1900. 8°.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Časopis. Band 73, Heft 2—6; Band 74, Heft 1. 1899—1900. 8°.
Boh. Hellich, Praehistorické Lebky v. Čechách. 1899. 4°.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnet. u. meteorologische Beobachtungen im Jahre 1899. 60. Jahrg. 1900. 4°.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Ordnung der Vorlesungen. Sommer-Semester 1900. 8°.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mittheilungen. Band 3, No. 1—4. 1899—1900. 8°.

Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos" in Prag:

Sitzungsberichte. Jahrg. 1898. 1899. 8°.
Abhandlungen. Band I, Heft 1—3; Band II, Heft 1, 2. 1898—1900. 4°.
Jahrbuch. Neue Folge, Band XII - XVIII. Wien 1892—98. 8°.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. Band 51. 1899. 8°.

Naturforscher-Verein in Riga:

Arbeiten. Neue Folge. Heft 8, 9. 1899. 4° u. 8°.
Korrespondenzblatt. Nr. XLII. 1899. 8°.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. 10. 1899. 8⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

G. V. Schiaparelli, Osservazioni sulla topografia del piareta Marte. Memoria VI. Roma 1899. 4⁰.

Atti. Serie V. Classe di scienze fisiche. Vol. IX. Semestre 1. Fasc. 1 bis 10. 1900. 4⁰.

Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Vol. VII, parte 2. Notizie degli scavi Agosto-Dicembre 1899 und Indice per l'anno 1899. Vol. VIII, parte 2. Gennajo und Febbrajo 1900. 4⁰.

Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. VIII, Fasc. 9—12. 1899. Vol. IX, Fasc. 1, 2. 1900. 8⁰.

Annuario 1900. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 53 (1899—1900), Sessione I—IV. 1900. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1899, No. 4. 1900. 8⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:

Mittheilungen. Vol. XIV, Fasc. 3, 4. 1899. 8⁰.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:

Indici e cataloghi. IV. J. codici Palatini di Firenze. Vol. 2, Fasc. 6. 1899. 8⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XXII, 3, 4. 1899. 8⁰.

Académie des sciences in Rouen:

Précis analytique des travaux. Année 1897—98. 1899. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 5, Fasc. 3, 4. 1899. Vol. 6, Fasc. 1. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht 1897—98. 1899. 8⁰.

China Branch of the R. Asiatic Society in Shanghai:

Journal. Vol. XXXI, 1896—97. 1900. 8⁰.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV, Vol. XI, No. 4—10; Vol. XII, No. 1—3. 1899—1900. 4⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno 22, No. 11—12. 1899. Anno 23, No. 1—4. 1900. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speyer:

Mittheilungen. XXIV. 1900. 8⁰.

K. Akademie der schönen Wissenschaften, Geschichte und Alterthumskunde in Stockholm:

Der Orient und Europa von Oscar Montelius, übersetzt von J. Mestorf. 1. Heft. 1899. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

C. A. M. Lindman, Vegetationen i Rio Grande do Sul. 1900. 8⁰.
C. F. O. Nordstedt, Index Desmidiacearum. Berlin 1896. 4⁰.
Öfversigt. Vol. 56 (1899). 1900. 8⁰.
Handlingar. N. F., Band 32. 1899—1900. 4⁰.
Meteorologiska iaktagelser i Sverige. Band 36 (1894). 1899. 4⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Band 21, Heft 7; Band 22, Heft 1—4 und Register zu XI—XXI. 1900. 8⁰.

Nordiska Museet in Stockholm:

Minnen från Nordiska Museet. Band II, Heft 5—7. 1900. Fol.
Bilder från Skansen. Heft 5—12. 1899. Fol.
Sagospelet på Skansen. 1899. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Band 33, Heft 10. 1899. Band 34, Heft 1—5. 1900. 8⁰

K. öffentliche Bibliothek in Stuttgart:

Württembergisches Urkundenbuch. Band VII. 1900. 4⁰.

K. Württemberg. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher für Statistik, Landeskunde. Ergänzungsband I, Heft 2—3. 1900. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mittheilungen. Band VII, Heft 3. 1899. 8⁰.

Kaiserliche Universität Tokyo (Japan):

The Journal of the College of Science. Vol. XI, 4. 1899. 4⁰.
Mittheilungen aus der medicinischen Facultät. Band IV, No. 6. 1899. 4⁰

Faculté des Lettres à l'Université in Toulouse:

Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptiones et Belles-Lettres de Toulouse 1827—1898. 63 Bände. 8⁰.
Annales du Midi 1889—1899. 1900, No. 1. 8⁰.
Bibliothèque Méridionale. Tom. 1—5, IIᵉ Sér.; Tom. 1—5. 1888—1899. 8⁰.

Faculté des Sciences à l'Université in Toulouse:

Annales. II. Série, Tome I, Fasc. 2—4. 1899. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazioni meteorologiche nell' anno 1899. 1900. 8⁰.
Atti. Vol. 35, disp. 1—6. 1900. 8⁰.
Memorie. Serie II, Tom. 49. 1900. 4⁰.

Verein für Kunst und Alterthum in Ulm:

Mittheilungen. Heft 9. 1900. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Skrifter. Band III und VI. 1900. 8⁰.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique. Vol. 31. Année 1899. 1899—1900. Fol.

K. Universität in Upsala:

Urkunder rörande Stockholms historia I. 1900. 8⁰.
Eranos. Vol. III, No. 4; Vol. IV, No. 1. 1899—1900. 8⁰.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. Band XX. Amsterdam 1899. 8⁰.
Werken. III. Serie, No. 10. Amsterdam 1899. 8⁰.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Aanteekeningen, Juni 1899. 1899. 8⁰.
Verslag, Juni 1899. 1899. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks, I. Aflev. 2. 1899. 8⁰.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Atti. Tomo 59, parte 1. 1899. 8⁰.

Accademia Olimpica in Vicenza:

Atti. Vol. 30, 31. 1897—98. 8⁰.

National Academy of Sciences in Washington:

Memoirs. Vol. VIII, No. 4. 1899. 4⁰.

Bureau of Education in Washington:

Report for the year 1897—1898. 1899. 8⁰.
Annual Report of the Commissioner of Educat. for 1897—98. Vol. 2. 1899. 8⁰.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

Division of biological Survey. Bulletin No. 12. 1900. 8⁰.
" " " " North America Fauna No. 17. 1900. 8⁰.
" " vegetable Physiology. Bulletin No. 18. 1899. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Bulletin No. 40. 1900. 4⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report of the U. S. National-Museum. Part I. 1899. 8⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections, No. 1173. 1899. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 150—165. 1898—99. 8⁰.
Annual Report XIX. 1897—98. Part 2—4 mit Atlas. XX. 1898—99. Part 1 und Part 6 in 2 vols. 1899. 4⁰.
Survey Monographs XXXII, 2, XXXIII, XXXIV, XXXVI-XXXVIII. 1899. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 32. Jahrg., 2. Hälfte. 1899. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrgang 1899, Band 49, Heft 3. 1899. 4⁰.
Verhandlungen. 1899, No. 11—18; 1900, No. 1—5. 4⁰.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Abhandlungen. Band 1, Heft 1—5. 1899. 4⁰.
Mittheilungen. Band 42. 1899. 8⁰.

K. K. Centralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1897. Neue Folge. Band 34. 1899. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1900, No. 2—27. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 29, Heft 6. 1899. Band 30, Heft 1—2. 1900. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 50, Heft 1—4. 1900. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band 14, No. 3, 4. 1899. 4⁰.

Verein für Nassauische Alterthumskunde etc. in Wiesbaden:

Annalen. Band 30. 1899. gr. 8⁰.
Mittheilungen. 1898/99, No. 4; 1899/1900, No. 1—4. gr. 8⁰.

Oriental Nobility Institute in Woking:

Vidyodaya. Vol. 28, No. 10—12. Calcutta 1899. 8⁰.

Herzogliche Bibliothek in Wolfenbüttel:

Die Handschriften der herzogl. Bibliothek zu Wolfenbüttel. Bd. 7. 1900. 4⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. Neue Folge. Band 32, No. 2, 3. 1899—1900. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1899, No. 6, 7. 8⁰.
Festschrift zur Feier ihres 50jährigen Bestehens. 1899. 4⁰.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Band 41. 1899. 8⁰.
Jahresbericht für 1898. 1899. 8⁰.

Schweizerische Meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen 1897. 34. Jahrg. 1899. 4⁰.

Schweizerische geologische Kommission in Zürich:

Beiträge z. Geologie der Schweiz. Geotechn. Serie, Liefg. I. Bern 1899. 4⁰.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mittheilungen. Band XXV, 1. 1900. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Neujahrsblatt auf das Jahr 1900. 102 Stück. 4⁰.
Vierteljahrsschrift. 44. Jhrg. 1899, H. 3 u. 4; 45. Jhrg. 1900, H. 1 u. 2. 1900. 8⁰.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde. N. F., Bd. I. 1899. 4⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Ludwig Bach in Würzburg:

Zur Lehre von den Augenmuskellähmungen und den Störungen der Pupillenbewegung. Leipzig 1899. 8⁰.
Experimentelle Untersuchungen über den Verlauf der Pupillarfasern. Wiesbaden 1899. 8⁰.

Léon Bollack in Paris:

Kurze Grammatik der blauen Sprache, deutsch von A. Lévy-Picard. Paris 1900. 8⁰.

Sophus Bugge in Christiania:

S. Rygh, Norske Gaardnavne. Bd. III, IV. Kristiania 1900. 8⁰.

Paléologos C. Candargy in Athen:

Communication universelle à Messieurs les savants de notre planète. Athènes 1899. 8⁰.

Ernst Dümmler in Berlin:

Jahresbericht über die Herausgabe der Monumenta Germaniae historica. Berlin 1900. 8⁰.

Sophus Elvins in Kopenhagen:

Minder fra Roskilde Latinskole efter J. H. Larsens Optegnelser. Kjöbenhavn 1900. 8⁰.

V. Fausböll in London:

The Dhammapada. London 1900. 8⁰.

Albert Grünwedel in Berlin:

Buddhistische Kunst in Indien. Berlin 1900. 8⁰.
Mythologie des Buddhismus. Leipzig 1900. 4⁰.

Gottlieb Haberlandt in Graz:

Briefwechsel zwischen Franz Unger u. Stephan Endlicher. Berlin 1899. 8⁰.

Ernst Häckel in Jena:

Kunstformen der Natur, Liefg. IV. Leipzig 1900. Fol.

Ernst Hartwig in Bamberg:

Der veränderliche Stern von Algoltypus z Herculis. Bamberg 1900. 8⁰.

F. R. Helmert in Potsdam:

Neuere Fortschritte in der Erkenntniss der mathematischen Erdgestalt. Leipzig 1900. 8⁰.

Philipp Holitscher in Budapest:

Giordano Bruno. Historisches Drama. Stuttgart s. a. 8⁰.

A. von Kölliker in Würzburg:

Sur l'entrecroisement des pyramides chez les marsupiaux et les monotrêmes. Paris 1900. 4⁰.
Ueber das Chiasma. Jena 1899. 4⁰.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. IX. Band, Heft 1—3. Leipzig 1900. 8⁰.

J. V. Kull in München:

Repertorium zur Münzkunde Bayerns. I. Fortsetzung. München 1900. 8⁰.

Marcus Landau in Wien:

Geschichte der italienischen Literatur im XVIII. Jahrh. Berlin 1899. 8⁰.

Gustav C. Laube in Prag:

Neue Schildkröten und Fische aus der böhmischen Braunkohlenformation. Prag 1900. 4⁰.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

The dead Hand. Philadelphia 1900. 8⁰.

Eduard Löwenthal in Berlin:

Der Bankrott d. Darwin-Häckel'schen Entwicklungstheorie. Berl. 1900. 8⁰.

Gabriel Monod in Paris:

Revue historique. Tom. 72, No. 1, 2, Janvier-Avril; Tom. 73, No. 1, Mai-Juin. Paris 1900. 8⁰.

P. Moutier in Rouen:

Essais sur l'organisation rationnelle de la comptabilité à parties doubles, Iere étude. Rouen 1899. 8⁰.

Fridtjof Nansen in Christiania:

The Norwegian North Polar-Expedition 1893—1896. Scientific Results, Vol. I. 1900. 4⁰.

E. Pick in Strassburg:

Zur Kenntniss der peptischen Spaltungsprodukte des Fibrins. Theil I. Strassburg 1899. 8⁰.

Count Plunkett in Dublin:

The Jacobite War in Ireland (1688—1691). 3. edition. Dublin 1894. 8⁰.

Alexander Pongrácz in Budapest:

Turanische Sprach- u. Volks-Studien (in ungar. Sprache). Budapest 1900. 8⁰.

Anton Redtenbacher in Wien:

Die steirischen und oberösterreichischen Redtenbacher. Wien 1900. 8⁰.

Dietrich Reimers Verlagshandlung in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. 5. Jahrg., Heft 1. Berlin 1900. 4⁰.

Seitz und Schauer in München:

Deutsche Praxis 1900. No. 1—11. München. 8⁰.

Lucian Schermann in München:

Orientalische Bibliographie. XIII. Band (für 1899), 1. Hälfte. Berl. 1900.

Emil Selenka in München:

Der Schmuck des Menschen. Berlin 1900. 4⁰.

John Shaw in San Francisco:

Thought and its Basis. San Francisco 1899. 8⁰.

Michele Stossich in Triest:

Contributo allo studio degli Elminti. Trieste 1900. 8⁰.

August Sturm in Naumburg a. S.:

Revision der gemeinrechtlichen Lehre vom Gewohnheitsrecht unter Berücksichtigung des neuen deutschen Reichsrechts. Leipzig 1900. 8⁰.

Giacomo Tropea in Messina:

Studi sugli Scriptores historiae Augustae IV. Messina 1900. 8⁰.

Nikolaus Wecklein in München:

Euripidis fabulae. Vol. III, pars 1 Andromacha. Lipsiae 1900. 8⁰.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis Dezember 1900.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. 24, part 1. 1900. 8°.
Memoirs. Vol. I, part 2. 1900. 4°.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis za godinu. 1899—1900. 8°.
Rad. Bd. 142. 1900. 8°.
Monumenta historico-juridica. Vol. VII, 2. 1900. 8°.
La Cathédrale de Djakovo. 1900. fol.
Zbornik za narodni zivot. Bd. V, 1. 1900. 8°.

Kgl. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. II, 3 u. 4. 1900. 4°.

University of the State of New-York in Albany:

College Department. 2d annual Report 1899. Vol. 2.
Professional Education in the United States. 1900. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde I. Sectie. Deel VII, No. 1—5; II. Sectie Deel VII, No. 1—3. 1899—1900. 4°.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde. N. Reeks. Deel II, No. 3. 1899. 4.
Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde. Jahr 1899/1900, Theil VIII.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde. IV. Reeks. Deel III. 1899. 8°.
Jaarboek voor 1899. 1900. 8°.
Prijsvers: Sosii fratres etc. 1900. 8°.

Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig Congres in Antwerpen:

Handelingen. 1899. 4°.

Wissenschaftliche Gesellschaft in Athen:

Athena. Bd. I-XI, XII, 1—4. 1899—1900. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:

34. Bericht. 1900. 8⁰.

Peabody Library in Baltimore:

Memoirs from the Biological Laboratory. IV, 4. 1900. 4⁰.
Second Catalogue of the Library. Part III, IV. E—K. 1898—99. 4⁰.
33th and 34th annual Report. 1899, 1900. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. 19, No. 142, 143. 1899. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. 21, No. 3, 4; Vol. 22, No. 1. 1899—1900. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. 20, No. 1—4. 1899. 8⁰.
American Chemical Journal. Vol. 21, No. 6; Vol. 22, No. 1—6; Vol. 23, No. 1—4. 1899—1900. 8⁰.
Johns Hopkins University Studies. Series XVII, No. 6—12; Series XVIII, No. 1—4. 1899—1900. 8⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. No. 98—108. 1899—1900. 4⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. VII, No. 5—9; Vol. VIII, No. 1—2. 1899. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. XII, 3. 1900. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 42, afl. 2—6. 1900. 8⁰.
Notulen. Deel 37, afl. 4, 5; Deel 38, afl. 1. 1900. 8.
Verhandelingen. Deel 51, stuk 2—4. 1900. 4⁰.
Taalkaart van de Minahasa.

Kgl. natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 59. 1900. 8⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv für Geschichte. Bd XXI, 1. 1899. 8⁰.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Essai de bibliographie française sur les Serbes et les Croates 1544—1900 par Nic. S. Petrovitch. 1900. 8⁰.

Observatoire astronomique et meteorologique de Belgrade:

Bulletin. Janvier—Juillet, No. 1—7. 4⁰.

Museum in Bergen (Norwegen):

An Account of the Crustacea of Norway by G. O. Sars. Vol. 3, part 5—10. 1900. 4⁰.
Aarbog für 1900. 1900. 4⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1900, No. 23—38. gr. 8⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. Neue Folge. Heft 10, 32, 33. 1900. 4⁰.

Central-Bureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Ableitung der Declinationen und Eigenbewegungen der Sterne, von Fritz Cohn. 1900. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 33. Jahrg., No. 12—19 und Sonderheft. 1900—1901. 8⁰.

Allgemeine Elektricitätsgesellschaft in Berlin:

Elektrischer Einzelantrieb und seine Wirtschaftlichkeit. 1900. 4⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 52, Heft 1—3. 1900. 8⁰.

Deutsche physikalische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Jahrg. 2, No. 12, 12a, 13—17. Leipzig 1900. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. 13, Inhaltsverzeichnis, Bd. 14, No. 7—20. 1900—1901. 8⁰.
Verhandlungen. 1899—1900, No. 11—15; 1901, No. 1, 2. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahresbericht über das Jahr 1899. 1900. gr. 8⁰.
Jahrbuch. Bd. XV, Heft 2, 3. 1900. 4⁰.

K. preuss. geodätisches Institut in Berlin:

Veröffentlichung. Neue Folge, No. 4. Potsdam 1900. 8⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Regenkarte der Provinzen Westpreussen und Posen, v. G. Hellmann. 1900. 8⁰.
Bericht über das Jahr 1899. 1900. 8⁰.
Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1898. 1900. 4⁰.
Veröffentlichungen. 1899, Heft 2. 1900. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 29, Heft 1—3. 1900. 8⁰.

K. Universität in Berlin:

Schriften aus den Jahren 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 49, 1900, No. 14—24; Jahrg. 50, 1901, No. 1. 1900—1901. gr. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. XIII, 2. Leipzig 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Bd. XV, 7—12. 1900. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 20. Jahrg., 1900, Heft 7—12. 1900. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:
Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 25. Bd. Zürich 1900. 8°.

Allgemeine Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:
Neue Denkschriften. Bd. 33, 2; 36, 1, 2; 37. 1898—1900. 4°.

Historischer Verein in Bern:
Archiv. Bd. 16, Heft 1. 1900. 8°.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:
Atti e Memorie. Serie III. Vol. 18, fasc. 1—3. 1900. 8°.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:
Sitzungsberichte 1900, 1. Hälfte. 8°.

Universität in Bonn:
Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4° u. 8°.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:
Bonner Jahrbücher. Heft 105. 1900. 4°.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:
Verhandlungen. 57. Jahrg., 1. Hälfte. 1900. 8°.

Société Linnéenne in Bordeaux:
Actes. Vol. 54. 1899. 8°.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:
Bulletin. 1900. No. 13—24. 8°.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:
Proeedings. Vol. 35, No. 10—27; Vol. 36, No. 1—8. 1899—1900. 8°.

American Philological Association in Boston:
Transactions and Proceedings. Vol. 30. 1899. 8°.

Archiv der Stadt Braunschweig:
Urkundenbuch der Stadt Braunschweig. Bd. II, Abth. 3. 1900. 4°.

Ortsverein für Geschichte und Altertumskunde zu Braunschweig und Wolfenbüttel in Braunschweig:
Braunschweigisches Magazin. Bd. 5, Jahrg. 1899. fol.

Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig:
8. Jahresbericht für die Jahre 1891/92 u. 92/93. 1900. 8°.

Meteorologische Station in Bremen:
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen i. J. 1899. 1900. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:
Abhandlungen. Bd. XVI, 3. 1900. 8°.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:
7. Jahresbericht 1899 und Ergänzungsheft. 1900. 8°.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. 4. Jahrg., Heft 3, 4. 1900. gr. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés. Tom. XV, fasc. 5, 6. 1900. 8⁰.
Bulletin. IV. Série. Tom. 14, No. 6—10. 1900. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Bulletin. a) Classe des lettres 1900, No. 5—11. 1900. 8⁰.
b) Classe des sciences 1900, No. 5—11. 1900. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. 19, Fasc. 3, 4. 1900. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tome 14, Fasc. 2—4. 1900. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Almanach. 1900. 8⁰.
Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftliche Mitteilungen.) Bd. XXIX, 3, 4; XXX, 1, 2. 1899—1900. 8⁰.
Történettud. Ertekezések. (Historische Abhandlungen.) Bd. XVIII, 7—10. 1899—1900. 8⁰.
Archaeologiai Ertesitö. (Archäolog. Anzeiger.) Bd. XIX, 3—5; XX, 1, 2. 1899—1900. 4⁰.
Tarsadalmi Értekezések. (Staatswissensch. Abhandlungen.) Bd. XII, 4, 1899. 8⁰.
Nyelvtudomán. Értekezések. (Sprachwissensch. Abhandlungen.) Bd. XVII. 3—5. 1899—1900. 8⁰.
Margalits Ede, Horvát történelmi Repertorium. Bd. I. 1900. 8⁰.
Réthi L., Corpus nummorum Hungariae. Bd. 1, Heft 1. 1899. 4⁰.
Méhely L., Monographia chiropterorum Hungariae. 1900. gr. 8⁰.
Mathematikai Ertesitö (Mathemat. Anzeiger.) Bd. XVII, 3—5; XVIII, 1, 2. 1899—1900. 8⁰.
Mathematikai Közlemények. (Mathem. Mitteilungen.) Bd. XXVII, 4. 1899. 8⁰.
Mathematische und naturwissenschaftl. Berichte aus Ungarn. 16. Band, 1898. 1899. 8⁰.
Rapport. 1899. 8⁰.
Bölcseszettudományi Értekezések. Bd. III, 4. 1900. 8⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

A Magyar kir földtani intézet évkönyve. Bd. XIII, 4. 1900. 4⁰.
Mitteilungen. Bd. XII, 1, 2; XIII, 3. 1900. 4⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 30, 1—7. 1900. 8⁰.
Generalregister zu Jahrg. 1882—1891 des Jahresberichtes. 1899. 4⁰.
Joh. Böckle u. Thomas v. Szontagh, Die kgl. ungarische geologische Landesanstalt. 1900. 4⁰.
Die Tertiärbildungen des Beckens der Siebenbürgischen Landesteile II, von Ant. Koch. 1900. gr. 8⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Comunicaciones. Tom. I, No. 6, 7. 1900. 8⁰.

Officina meteorologica Argentina in Buenos Aires:

Anales. Tomo XIII. 1900. 4⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

M. Raciborski, Parasitische Algen und Pilze Java's. Theil III. 1900. 4⁰.
Mededeelingen. No. 29, 33, 38—41, 43. 1900. 4⁰.
Verslag over het jaar 1899. 1900. 4⁰.
Bulletin. No. 4—6. 1900. 4⁰.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele. Ser. II. Tom. XXI. 1898—99. Memoriile sect. istorice.
Buletinul. Ser. II, Tom. XXII, 1899—1900. Partea administrativa Bucaresci. 1900. 4⁰.
Discursuri de recepţiune. XXI. XXII. 1900. 4⁰.
Indice alfabetic zu Vol. XI—XX der II. Serie. 1900. 4⁰.
Studiŭ asupra Pelagrei de Joan Neagoe. 1900. 4⁰.
Studiĭ istorice asupra Chilieĭ şi Cetăliĭ-Albe, de Nic. Jorga. 1900. 8⁰.
Fragmente din Istoria Romănilor de Eudoxiu Baron de Hurmuzaki. Tom. III. 1900. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1899. January—July 1900, and Annual Summary 1899. 1900. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. 6, part 6, 7; Vol. 11, part 2; Vol. 12, part 1. 1900. fol.
Report on the Administration in 1899—1900. 1900. fol.

Departement of Revenue and Agriculture of the Government of India in Calcutta:

Memorandum on the snowfall of 1900. 1900. fol.

Geological Survey of India in Calcutta:

General Report 1899—1900. 1900. 4⁰.
Memoirs. Vol. 29, 30, part 1. 1899—1900. gr. 8⁰.
Paläontologia Indica. Ser. XV, Vol. 3, part 1. 1899. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 964—970. 1900. 8⁰.
Journal. No. 384—386. 1900. 8⁰.
Proceedings. 1900. No. 2—8. 1900. 8⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.

Bulletin. Vol. 36, No. 1—4; Vol. 37, No. 1, 2. 1900. 8⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

Circulars 1 to 50. 1900. 4⁰.

The Adams Memorial Committee in Cambridge:

The scientific Papers of John Couch Adams. Vol. II. 1900. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. X, part 6. 1900. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bollettino. Fasc 63. 1900. 8⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. III. Berlin 1900. 4⁰.
Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt 1897/1900. Berlin 1900. 4⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Decaden. Monatsberichte 1899, Jahrg. II. 1900. 4⁰.
Abhandlungen. Heft 4. Leipzig 1899. 4⁰.

Academy of sciences in Chicago:

Bulletin. No. III, part 1. 1898. 8⁰.

John Crerar Library in Chicago:

5th annual Report for the year 1899. 1900. 8⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 42—44, 46—49. 1899—1900. 8⁰.

Yerkes Observatory of the University in Chicago:

Bulletin. No. 13—15. 1900. 8⁰.

Redaction of the astrophysical Journal in Chicago:

The Astrophysical Journal. Vol. XI, No. 5; Vol. XII, No. 1—4. 1900. gr. 4⁰.

Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Skrifter. I. Mathem.-naturwiss. Klasse 1900, No. 1—4. II. Histor.-filos. Klasse 1900, No. 1—5. 4⁰.

Meteorologisches Institut in Christiania:

Wolkenbeobachtungen in Norwegen 1896—97 von N. J. Föyn. 1900. fol.
Jahrbuch für 1899. 1900. fol.

Kgl. Norwegische Universität in Christiania:

Norway. Official Publication for the Paris Exhibition 1900. 1900. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. Neue Folge. Bd. 43. 1900. 8⁰.

Lloyd Museum and Library in Cincinnati:

Bulletin. No. 1. 1900. 8⁰.

Stadtarchiv in Danzig:

Des Syndicus der Stadt Danzig Gottfried Lengnich Jus publicum civitatis Gedanensis. 1900. 8⁰.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Zeitschrift. Heft 42. 1900. gr. 8⁰.
Geschichte der ländlichen Ortschaften des Kreises Thorn von Hans Maercker. Lief. III. 1900. 8⁰.

Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:

Quartalblätter. Jahrg. 1899. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mittheilungen. Bd. 8, Theil 6. 1900. 8⁰.

Verein für Geschichte und Naturgeschichte in Donaueschingen:

Schriften. Heft 10. 1900. Tübingen. 8⁰.

K. sächsischer Alterthumsverein in Dresden:

Festschrift zum 75 jährigen Jubiläum. 1900. 8⁰.
Die Sammlung des k. sächs. Altertumsvereins, Schluss (Tafel 81—100) von O. Wanckel. 1900. 4⁰.
Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. 21. 1900. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. III[d]. Series. Vol. 5, No. 5; Vol. 6, No. 1. 1900. 8⁰.

Observatory of Trinity College in Dublin:

Astronomical Observations Part IX. 1900. 4⁰.

Royal Society in Dublin:

Economic Proceedings. Vol. I, part 1. 1899. 8⁰.
Proceedings. Vol. IX, part 1. 1899. 8⁰.
Transactions. Vol. VII, part 2—7. 1899—1900. 4⁰.
Index of the Proceedings and Transactions 1877—98. 1899. 8⁰.

Pollichia in Dürkheim:

Festschrift zur 60jährigen Stiftungsfeier. 1900. 8⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 22, No. 6—12. 1900. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 23, No. 2. 1900. 8⁰.
Transactions. Vol. 39, part 2—4. 1899—1900. 4⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 3, No. 1. 1900. 8⁰.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 14. Jahrg. 1900. 8⁰.
Die geschichtliche Entwicklung des Mansfelder Kupferschieferbergbaues von Herm. Grössler. 1900. 8⁰.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F. Heft 26. 1900. 8⁰.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Ser. Vol. 23, disp. 1, 2. 1900. 8⁰.

Società Asiatica Italiana in Florenz:

Giornale. Vol. 13. 1900. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für 1898/99. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. Bd. XVII. Berlin 1900. 8⁰.
Societatum Litterae. Jahrg. XIII. 1899. No. 1—12. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:

Berichte. Bd. XI, 2. 1900. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

„Schau-ins-Land." 27. Jahrlauf. 1900. fol.

Universitätsbibliothek in Freiburg i. Br.:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Institut national in Genf:

Bulletin. Tom. 35. 1900. 8⁰.

Observatoire in Genf:

L'Éclipse totale de soleil du 28. Mai 1900. 8⁰.
Observations météorologiques, année 1898. 1900. 8⁰.

Universität in Genf:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Tom. 33, No. 3. 1900. 4⁰.

Universität in Giessen:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Oberhessischer Geschichtsverein in Giessen:

Mittheilungen. N. F. Bd. 9. 1900. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1900. No. 5—11. Berlin. 4⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Classe. 1900. Heft 1 mit Beiheft, Heft 2. Berlin. 4⁰.
b) Mathem.-phys. Classe. 1900 Heft 1, 2. Berlin. 4⁰.
Geschäftliche Mittheilungen. 1900. Heft 1. Berlin. 4⁰.
Abhandlungen der philosophisch-historischen Classe. N. F. Bd. III, No. 3; Bd. IV, No. 1—3. Berlin 1900. 4⁰.
Abhandlungen der mathemat.-phys. Classe. N. F. Bd. 1, No. 4.
Carl Friedr. Gauss' Werke. Bd. VIII. Leipzig 1900. 4⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. 10, No. 3. 1900. 8⁰.

Universität in Graz:

Verzeichnis der akademischen Behörden 1900/01. 1900. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Jahrg. 1899. Heft 36. 1900. 8⁰.

Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:

Pommersche Jahrbücher. Bd. 1. 1900. 8⁰.

K. sächs. Fürsten- und Landesschule in Grimma:

Von dem 350jährigen Jubelfeste der k. sächs. Fürsten- und Landesschule zu Grimma. 1900. gr. 8⁰.
Das Kollegium der Fürsten- und Landesschule Grimma von 1849—1900. 1900. gr. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks. Deel VII, aflev. 3 u. 4; Deel VIII, aflev. 1 u. 2. 1900. 8⁰.

K. Niederländische Regierung im Haag:

Die Triangulation von Java v. J. A. C. Oudemans. Lief. 6. 1900. 4⁰.

Ministerie van Binnenlande Zaken im Haag:

Nederlandsch kruidkundig Archief. III. Ser. Deel 2, stuk 1. Nijmwegen 1900. 8⁰.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Ser. II tom. VII, part 1 u. 2. 1900. 4°.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises. Sér. II, tom. 4, livr. 1. 1900. 8°.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. Vol. X, 1. 1899. 8°.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 36, No. 6—11. 1900. 4°.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 45, Heft 2 u. 3. Leipzig. 8°.

Universität Halle:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4° u. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 72, Heft 6; Bd. 73, Heft 1—4. Stuttgart 1900. 8°.

Thüring.-Sächs. Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:

Neue Mittheilungen. Bd. XX, Heft 3, 4. 1900. 8°.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

22. Jahresbericht für das Jahr 1899. 1900. 8°.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Schriften der Hamburger wissenschaftl. Anstalten a. d. J. 1899—1900 in 4° u. 8°.

Sternwarte in Hamburg:

Mitteilungen. No. 6. 1900. 8°.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrg. 1900. 8°.

Universität Heidelberg:

Harry Rosenbusch, Aus der Geologie von Heidelberg. Akademische Rede. 1900. 4°.

Schriften der Universität aus dem Jahre 1899—1900 in 4° u. 8°.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. X, Heft 1. 1900. 8°.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der Obergermanisch-Raetische Limes. Lief. 11. 1900. 4°.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 59, 60. 1900. 8°.
Öfversigt XL—XLII. 1897—1900. 1898—1900. 8°.

Commission géologique de Finlande in Helsingfors:

Bulletin. No. 11. 1900. 8°.
Carte géologique. Feuille No. 35 avec texte explicatif. 1900. 8°.

Société finno-ougrienne in Helsingfors:

Axel O. Heckel, Ethnographische Forschungen II, Trachten und Muster der Mordvinen. 1899. 4°.

Universität Helsingfors:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4° u. 8°.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Die Repser Burg. Von Heinr. Müller. 1900. 4°.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mitteilungen. Bd. 49. 1900. 8°.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:

Schriften. 35. u. 36. Heft. 1900. 8°.

Royal Society of Tasmania in Hobart town:

Papers and Proceedings 1898—99. 1900. 8°.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 27. Jahrg. 1900. 8°.

Historischer Verein in Ingolstadt:

Sammelblatt. Heft 24. 1899. 8°.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge. Heft 44. 1900. 8°.

Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. Jahrg. 23 u. 25. 1898—1900. 8°.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. IV, No. 5—9. 1900. 8°.

Université de Jassy:

Annales scientifiques. Tom. 1, fasc. 1—2. 1900. 8°.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Zoologische Forschungen in Australien. Lieferung 18 (Text und Atlas). 1901. fol.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 33, 34. 1900. 8°.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte 1899. 1900. 8°.

Verhandlungen. Bd. XX, 2. 1900. 8°.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte. Bd. XII, 2. 1900. 8°.

Redaktion des Pfälzischen Museums in Kaiserslautern:

Pfälzisches Museum. 17. Jahrg., No. 4. 1900. 8°.

Centralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:

Jahresbericht des Centralbureaus für das Jahr 1899. 1900. 4°.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4° u. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Karlsruhe:

Verhandlungen. Bd. XII und XIII, 1895—1900. 1900. 8⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. IIᵉ Série. Vol. 9, No. 3, 4; Vol. 10, No. 1. 1899—1900. 8⁰.

Universität Kasan:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900.
Godischnij. Akt 1900. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Kassel:

Abhandlungen und Bericht XLV. 1900. 8⁰.

Société des sciences physico-chimique à l'Université de Kharkow:

Traveaux. Tom. 24—27. 1898—1900. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:

Sapiski 1900. No. 3, 4. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Bd. 30. 1900. 8⁰.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. III, Heft 2; Bd. IV. Heft 1. 1900. 4⁰.

K. Universität in Kiel:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 40, No. 5—9. 1900. 8⁰.

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht über 1899. 1900. 8⁰.
Carinthia I. 90. Jahrg., No. 1—6. 1900. 8⁰.
Archiv für vaterländische Geschichte. 19. Jahrg. 1900. 8⁰.

Siebenbürgischer Museumsverein in Klausenburg:

Sitzungsberichte der medizin.-naturw. Sektion. Bd. XXI, I. Abteilung. 3 Hefte. 1899. 8⁰.

Stadtarchiv in Köln:

Mittheilungen. Heft 30. 1900. 8⁰.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1900. No. 4, 5. 8⁰.
Skrifter. 6. Serie. Historisk afd. Tom. 5, No. 1. 1900. 4⁰.

K. Dänisches Kultusministerium in Kopenhagen:

Le Danemark. 1900. 8⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger. II. Raekke. 15. Bd., 1. u. 2. Heft. 1900. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Studenterne fra Kjöbenhavns Universitet 1860. 1900. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger 1900. April—Juli—October. 8°.
Rozprawy. 1. filolog. Serya II, Tom. 13.
2. mathemat. Serya II, Tom. 15, 17. 1899—1900. 8°.
Materyaly antropologiczne. Tom. 4. 1900. 8°.
Sprawozdanie komisyi fizyograficzreij. Bd. 34. 1899. 8°.
J. Rostafinski, Slownik. 1900. 8°.

American Mathematical Society in Lancaster:

Transactions. Vol. I, No. 2. 1900. 4°.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. 36. Bd. 1900. 8°.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série. Vol. 36, No. 137. 1900. 8°.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

The Kansas University Quarterly. Vol. VIII, No. 1, 4. 1899.
Bulletin. Vol. I, No. 2, 3. 1900. 8°.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie, Deel XIX, 1, 2. 1900. 8°.
Handelingen en Mededeelingen, jaar 1899—1900. 8°.
Levensberichten 1899—1900. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Bd. XIX, 1, 2; XX, 2. 1900. 4°.
Abhandlungen der mathem.-physikalischen Classe. Bd. XXVI, 3, 4. 1900. 4°.
Berichte der philol.-histor. Classe. Bd. 52, IV—VIII. 1900. 8°.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Bd. 52, III—VI. 1900. 8°.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Preisschriften. No. XXXVI. 1900. 4°.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 61, Heft 10—12; Bd. 62, Heft 1—11. 1900. 8°.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

58. Jahresbericht. 1900. 8°.
Bibliotheks-Katalog. II. Nachtrag, 1896—1900, 15. April 1900. 8°.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XVII, 2. 1900. 4°.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XV, No. 58 u. 59; Vol. XVI, No. 61. 1900. 8°.

Royal Society in London:

List of the Fellows. 30. Nov. 1900. 4°.
Proceedings. Vol. 66, No. 431—434; Vol. 67, No. 435—439. 1900/01. 8°.
Philosophical Transactions. Ser. A, Vol. 192—194; Ser. B, Vol. 191, 192. 1899/1900. 4°.
Reports to the Malaria Committee, I.—III. Series 1899—1900. 1900. 8°.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 60, No. 8—10; Vol. 61, No. 1. 1900. 8.

Chemical Society in London:

Journal. No. 453 (Aug.), No. 454 (Sept.) and Supplementary - Number, No. 455—457 (Oct.—Dec. 1900), No. 458 (Jan. 1901). 1899—1900. 8⁰.
Proceedings. Vol. 16, No. 227—229. 1900. 8⁰.

Linnean Society in London:

Proceedings. 112th Session from Nov. 1899 to June 1900. 1900. 8⁰.
The Journal. Botany, Vol. 34, No. 240, 241; Zoology, Vol. 28, No. 179, 180. 8⁰.
The Transactions. Botany, Vol. V, 11, 12; Zoology, Vol. VII, 9—11. 1899. 4⁰.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 83. 1900. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1900, part 4—6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1899, part II, III. 8⁰.
Transactions. Vol. XV, part 5. 1900. 4⁰.
A List of the Fellows. 1900. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1601—1629. 1900. 4⁰.

Reale Accademia di scienze in Lucca:

Atti. Tomo 30. 1900. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 27, livr. 3. 1900. 8⁰.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Tom XXXV, 1, 2 1899. 4⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 55. Stans 1900. 8⁰.

Société d'agriculture science et industrie in Lyon:

Annales. VII. Série, tom. 6, 1898. 1899. 4⁰.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Tome 46. 1900. 4⁰.

Université in Lyon:

Annales. Nouv. Série: I. Sciences, fasc. 3.
II. Droit, Lettres, fasc. 3. Paris 1900. 8⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. VIII, No. 2. 1900. 8⁰.

The Government Observatory in Madras:

Report 1899—1900. 1900. fol.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 37. cuad. 1 6. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:

Jahresbericht und Abhandlungen 1898 - 1900. 1900. 8⁰.

Fondazione scientifica Cagnola in Mailand:

Atti. Vol. XVII. 1900. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Serie II. Vol. 32. 1899. 8⁰.
Memorie. a) Classe di lettere. Vol. 21, fasc. 1, 2.
b) Classe di scienze. Vol. 18, fasc. 7—10. 1899—1900. 4⁰.

R. Osservatorio astronomico di Brera in Mailand:

Osservazioni meteorologiche nell' anno 1899. 1900. 4⁰.
Pubblicazioni. No. 39. 1900. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 39, fasc. 2. 1900. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie III. Anno XXVII, fasc. 26, 27. 1900. 8⁰.

Comitato per le onoranze al Prof. Luciani in Mailand:

Ricerche di fisiologia e scienze affini dedicate al Prof. Luigi Luciani. 1900. 4⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 44, part IV, V. 1900. 8⁰.

Universität in Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tome X, Préface et fascicule 1—6. 1900. 4⁰.

Hennebergischer alterthumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Alterthums. Lief. 15. 1900. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mittheilungen. Bd. 5, Heft 3. 1900. 8⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. Vol. XII (New Series), part 2. 1900. 8⁰.

Accademia Peloritana in Messina:

Atti. Anno XIV. 1899—1900. 8⁰.

Universität in Messina:

CCCL Anniversario della Università di Messina. 1900. 4⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:

Rivista. N. Ser. Anno 5, fasc. 2, 3. 1900. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. 3ᵉ Série année 27 u. 28. 1897—98. 1900. 8⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:

Boletin mensual. Noviembre y Diciembre 1899, Enero, Febrero, Marzo, Junio 1900. 1900. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional de Tacubaya in Mexico:

El Clima de la Republica Mexicana por M. Moreno y Anda y Antonio Gomez Año II. Mexico 1900. 8⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias. Tomo 14, No. 1—10. 1899—1900. 8⁰.

Museo nacional in Montevideo:

Anales. Tom. 2, fasc. 15—16; Tom. 3, fasc. 4. 1900. 4⁰.

Numismatic and Antiquarian Society of Montreal:

The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal. III. Ser. Vol. 2, No. 2—4. 1899. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1899, No. IV. 1900. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXI, 1, 2. 1900. 8⁰.

Universität Moskau:

Utschenia Sapiski. Bd. XIV—XVI. 1899. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Publications. Vol. IV, 1900, Sacramento. 1900. 4⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:

Münchener statistische Jahresübersichten für 1899. 1900. 4⁰.

K. Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch. 2. Jahrg., Heft 2, 3. 1900. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt 1900. No. 5—8. 4⁰.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Verzeichnis der in und ausserhalb Bayern erscheinenden Zeitungen. I. u. II. Abteilung mit Nachträgen. fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Winter-Semester 1900 - 1901. 1900. 8⁰.
Bericht für das Jahr 1899/1900. 1900. 4⁰.
Programm für das Jahr 1900—1901. 1900. 4⁰.

Verlag der Hochschulnachrichten in München:

Hochschulnachrichten.

Erzbischöfl. Ordinariat in München:

Amtsblatt.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4⁰ und 8⁰.
Amtliches Verzeichnis des Personals. Winter-Semester 1900/01. 1900. 8⁰.
Verzeichnis der Vorlesungen. Winter-Semester 1900/01. 1900. 4⁰.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Bd. IX. 1899. 1900. 8⁰.

Historischer Verein in München:

Altbayerische Monatsschrift 1900. Heft 4—6. 4⁰.

Verein für Naturkunde in München:

I. Jahresbericht 1898/99. 1900. 4⁰.

K. bayer. meteorologische Zentralstation in München:

Beobachtungen der meteorologischen Stationen des Königreichs Bayern. Jahrg. 20 (1890). Heft 4. 4⁰.

Westphäl. Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst in Münster:

27. Jahresbericht für 1898/99. 1899. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Sér. II, Tome 16, fasc. 34; Sér. III, Tome 1, fasc. 3. 1900. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:

Atti. Vol. 31. 1900. 8⁰.
Rendiconto. Anno 38. 1900. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Serie III. Vol. 6, fasc. 5—7. 1900. gr. 8⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. 14, Heft 1 u. 2. Berlin 1900. 8⁰.

Société des sciences naturelles in Neuchatel:

Bulletin. Tom. 26. Année 1897—98 et Table des matières des tomes 1—25. 1898. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Series. Vol. 10, No. 55—60; Vol. 11, No. 61. 1900. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Memoirs. Vol. II, part 1. 1899. 4⁰.
Annals. Vol. XII, No. 2, 3. 1900. 8⁰.

American Jewish Historical Society in New-York:

Publications. No. 8. 1900. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. XII, 1899. 1900. 8⁰.
Annual Report for the year 1899. 1900. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 32, No. 3, 4. 1900. 8⁰.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. II. Series. Vol. 4, No. 1—3. 1900. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. Bd. XIII. 1900. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. Jahrg. 1899. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrg. 1899. 8⁰.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. II. Ser. Vol. 5. 1899. gr. 8⁰.

R. Osservatorio astronomico in Padua:

All' Astronomo G. V. Schiaparelli, Omaggio 30 Giugno 1860 — 30 Giugno 1900. 4⁰.

Reale Accademia di

Atti. III. Serie. Vol. 5.
Bulletino. Anni 1894—98.

Circolo

Rendiconti. Tom. 14, fasc. 5
Atti del collegio degli ingeg

Académie

Bulletin. 1900. No. 27—48. 8

Académie

Comptes rendus. Tom. 131, No

Moniteur S

Moniteur. Livr. 704—709 (Août

Musée G

Annales in 4°. Tome XVI, 4me
1900. 4°.
Revue de l'histoire des réligions.

Muséum d'histoire

Bulletin. Année 1900, No. 2—4. 8°
Nouvelles Archives. IV. Série. Vol

Société d'anthrop

Bulletins. 1899, fasc. 4. 8°.

Société des études his

Revue. Nouv. Série. Tom. 2, No. 4—

Société de géograph

La Géographie (Bulletin) Année 1900,

Société mathématique de

Bulletin. Tome 28, fasc. 2—4. 1900. 8°

Société zoologique de Fr

Mémoires. Tome 12. 1899. 8°.

Académie Impériale des sciences

Oeuvres de P. L. Tschebychef. Tom. I. 18
Byzantina Chronika. Tom. 6, No. 3, 4; Tom
Mémoires. a) Classe historico-philologique.
No. 1—7.
b) Classe physico-mathématique.
No. 1—9; Vol. X, No. 1, 2. 18
Bulletin. Ve Sér. Tom. 10, No. 5; Tom. 11,
1899—1900. 4°.
Annuaire du Musée zoologique. Tom. 5, No. 1

Comité géologique in St. Peter

Bulletins. Vol. XVIII, No. 3—10. 1899—1900.
Mémoires. Vol. VII, No. 3 u. 4; Vol. IX, No. 5; V

Kaiserl. botanischer Garten in St. Petersburg:

Petropolitani. Tom. 15, fasc. 2; Tom. 17, fasc. 1, 2. 1899. 8⁰.

Skizze des kais. botan. Gartens. 1899. 8⁰ (russ. Spr.)

aiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

a zur Geologie Russlands. Bd. XX. 1900. 8⁰.

ngen. II. Serie. Bd. 37, Lief. 2; Bd. 38, Lief. 1. 1899—1900. 8⁰.

aiserl. freie ökonomische Gesellschaft in St. Petersburg:

ılstatistik in Russland. 1900. 8⁰.

-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

. Tom. 32, Heft 7 u. 8. 1900. 8⁰.

ikalisch-mathematische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:

l. Tom. 32, No. 4—6. 1900. 8⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

e de l'Observatoire phys. central 1849—1899 par M. Rykatchew. rtie I. 1900. 4⁰.

ɜn. Jahrg. 1898, Theil I, II. 1899. 4⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

enije (Vorlesungsverzeichnis) für 1900—1901. 1900. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

edings. 1899, part III; 1900, part I. 8⁰.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

eedings. 48th annual Meeting at Richmond 1900. Baltimore 1900. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

ceedings on the Death of Charles Janeway Stillé, President of the Society. 1900. 8⁰.

e Pennsylvania Magazine of History. Vol. 24, No. 2 u. 3. 1900. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

umni Report. Vol. 36, No. 8—11. 1900. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

roceedings. Vol. 39, No. 161 u. 162. 1900. 8⁰.

Brinton Memorial Meeting held January 16th 1900. 1900. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. XII, pag. 1—138. 1900. gr. 8⁰.

Atti. Vol. XVII. 1900. gr. 8⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo cimento. Ser. IV. Tom. XI, Maggio e Giugno; Tom. XII, Luglio e Agosto. 1900. 8⁰.

Carnegie Museum in Pittsburgh:

Publications. No. 6 u. 7. 1899—1900. 8⁰.

Historische Gesellschaft in Posen:

Historische Monatsblätter. Jahrg. I, No. 4—7. 1900. 8⁰.

Böhmische Kaiser Franz-Joseph-Akademie in Prag:

Rozprawy. Trída I, Ročník VII, číslo 1, 2; Trída II, Ročník VIII; Trída III, Ročník VII, číslo 1. 1899. gr. 8°.
Historický Archiv. Bd. 16. 1899. gr. 8°.
Vestník. Bd. VIII, No. 1—9. 1899—1900. gr. 8°.
Almanach. Ročník X. 1900. 8°.
Čeněk Zíbrt, Bibliografie České historie, Theil I. 1900. gr. 8°.
Sbírka pramenův Skupina I, Řada 1, číslo 2. 1899. gr. 8°.
Fr. Nušl, Prokop Diviš. 1899. gr. 8°.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Forschungen zur Kunstgeschichte Böhmens. Mit 1 Atlas. 1900. fol.
Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Bd. III, Heft 1. 1900. 8°.
Mittheilung. No. 11, 12. 1900. 8°.
Jos. Mrha, Beiträge zur Kenntnis des Kelyphit. Wien 1899. 8°.
Jos. Langer, Untersuchungen über Biengift (II. Mitteilung), Sep.-Abdr. Gand u. Paris 1899. 8°.

K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Prager Tychoniana von F. J. Studnička. 1901. gr. 8°.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Časopis. 1900. Bd. 74, Heft 1—6. 8°.

K. K. Sternwarte in Prag:

Die Tychonischen Instrumente auf der Prager Sternwarte von L. Weinek. 1901. 4°.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rectors für das Jahr 1899/1900. 1900. 8°

Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:

Verhandlungen. Bd. XX. 1900. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. VII. Heft. 1900. 8°.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. XLIII. 1900. 8°.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Boletin mensual 1900, jan.—abril. 4°.
Annuario. 1900. 8°.
L. Cruls, Methodo para determinar as horas das Occultacões de estrellas pela Lua. 1899. 4°.

Augustana Library in Rock Island, Ill.:

Publications. Vol. 2. 1900. 4°.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. IX, fasc. 5. 6. 1900. 8°.
Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. IX, semestre 1. fasc. 11, 12; semestre 2, fasc. 1—11. 1900. 4°.
Atti. Ser. V, classe di scienze morali. Vol. VIII, parte 2. Notizie degli scavi Marzo—Agosto. 1900. 4°.
Rendiconto dell' adunanza solenne del Giugno. 1900. 4°.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:
Bolletino. Anno 1900, No. 1, 2. 8°.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:
Atti. Anno 53 (1899—1900), Sessione V—VII. 1900. 4°.

Kaiserl. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:
Mittheilungen. Bd. XV, fasc. 1—3. 1900. 8°.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:
Indici e cataloghi. XV. Biblioteca Riccardiana di Firenze. Vol. I, fasc. 8, 9. 1900. 8°.

Ufficio centrale meteorologico italiano in Rom:
Catalogo degli strumenti sismici e meteorologici per Luigi Fascianelli. 1900. 8°.

K. italienische Regierung in Rom:
Le Opere di Galileo Galilei. Vol. X. Firenze 1900. 4°.

R. Società Romana di storia patria in Rom:
Archivio. Vol. 23, fasc. 1, 2. 1900. 8°.

Universität Rostock:
Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4° u. 8°.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:
Atti. Serie III. Vol. 6, fasc. 2, 3. 1900. 8°.

Museo Civico in Rovereto:
Materiali per una bibliografia Roveretana per Giovanni de Corelli. 1900. 8°.

The American Association for the advancement of science in Salem:
Proceedings. 48th meeting at Columbus. August 1899. Easton 1899. 8°.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:
Mittheilungen. 40. Vereinsjahr. 1900. Salzburg. 8°.

Historischer Verein in St. Gallen:
Neujahrsblatt für 1900. 4°.
Mitteilungen zur vaterländischen Geschichte. Bd. 27, Teil 2. 1900. 8°.
Max Gmür, Die verfassungsgeschichtliche Entwicklung. 1900. 8°.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):
Almanaque náutico. 1900. 8°.

Museu Paulista in S. Paulo:
Revista. Vol. IV 1900. 8°.

Bosnisch-Herzegovinische Landesregierung in Sarajevo:
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1897. Wien 1899. 4°.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:
Jahrbücher und Jahresbericht. 65. Jahrg. 1900. 8°.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:
Bulletino di Archeologia. Anno 23. 1900. No. 5—11. 8°.
Nella Dalmazia Romana di Charles Diehl. 1900. 8°.
Ant. Mattiassevich-Caramaneo, Riflessioni sopra l'istoria di S. Doimo primo vescovo di Salona. 1900. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Briefe von Joh. Müller an Anders Retzius. 1900. 4°.
Statut et Reglement de la fondation Nobel. 1900. 8°.
Bihang til Handlingar. Vol. 25 (1899), Section 1—4. 1900. 8°.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 22, Heft 5. 1900. 8°.

Nordiska Museet in Stockholm:

Meddelanden 1898. 1900. 8°.
Tjugufemårsminne 1873—1898. 1900. 8°.
6 verschiedene kleinere Schriften.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. 34. Bd. 1900. Heft 6 (Juni). 8°.

Kaiserl. Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4° u. 8°.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F. IX. Jahrg. 1900. Heft 1—4. 8°.

K. Württemberg. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Beschreibung des Oberamts Rottenburg. 2 Teile. 1899—1900. 8°.
Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Jahrg. 1899. Teil I u. II. 1900. 4°.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Annual Mining Report for 1899. 1900. fol.
Mineral Resources. No. 7, 8. 1900. 8°.
Records. Vol 6. part 4; Vol. 7, part 1. 1900. 4°.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. 33. 1899. 8°.

Observatoire astronomique et physique in Taschkent:

Publications. No. 1. 2 et Atlas. 1899-1900. 4°.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:

Publications. No. 3, 4. 1900. 4°.

Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):

Calendar (1899—1900). 1900. 8°.
The Journal of the College of Science. Vol. XII, part 4; Vol. XIII part 1. 1900. 4°.
Mittheilungen aus der medicinischen Facultät. Bd. IV, No. 7. 1900. 4°
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. 2. No. 1—7; Vol 3 No. 1—5; Vol. IV, No. 1—3. 1894—1900. 8°.

Canadian Institute in Toronto:

Proceedings. New Ser. Vol. 2. part 3. 1900. 8°.
Transactions. Vol VI. part 1 u. 2. 1899. gr. 8°.

University of Toronto:

Studies. a) History. First Series. Vol. 4. 2d Series. Vol. I. p. 77—155 4°
b) Psychological. Series No. 2 u. 3. 1899. 4°.
c) Physiological. Series No. 1, 2 1900. 4°.

Faculté des Sciences à l'Université in Toulouse:

Annales. IIe Série. Tome 2, fasc. 1. 1900. 4⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XV, fasc. 1. 1900. 8⁰.

Universität Tübingen:

Verzeichnis der Doktoren im Jahre 1899—1900. 4⁰.
Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Tufts College Library in Tufts Coll. Mass.:

Studies. No. 6. 1900. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 35, disp. 7—15. 1900. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Series III. Vol. 18, fasc. 2. 1900. 4⁰.

K. Universität in Upsala:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1899—1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

H. van Golder, Geschichte der alten Rhodier. Haag 1900. 8⁰.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Meteorologisch Jaarboek voor 1897, 49. Jaarg. 1900. 4⁰.

Physiologisches Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks. Tom. 2, aflev. 1. 1900. 8⁰.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Concorsi a premio. 1900. 8⁰.

Accademia di Verona:

Memorie. Vol. 74, fasc. 3; Vol. 75, fasc. 1, 2. 1899—1900. 8⁰.
Gio. Battista Perez, La provinzia die Verona ed i suoi vini. 1900. 8⁰.
Enrico Nicolis, Marmi, pietre e terre coloranti della Provinzia di Verona. 1900. 8⁰.

Redaction der Prace matematyczno-fizyczne in Warschau:

Prace. Tom. XI. 1900. 8⁰.

Bureau of Education in Washington:

Report of the Commissioner of Education for 1898—99. Vol. I. 1900. 8⁰.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

Report of the Chief of the Division of Soils for 1900. 8⁰.
Yearbook 1899. 1900. 8⁰.
Division of Biological Survey. Bulletin, No. 13. 1900. 8⁰.
North American Fauna, No. 18 u. 19. 1900. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Report 1897—98. 1899. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 33. Jahrg., 1. Hälfte. 1900. 8°.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Südarabische Expedition. Bd. I. Die Somalisprache von Leo Reinisch. 1900. 4°.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Bd. 49, Heft 4; Bd. 50, Heft 1. 1900. 4°.
Verhandlungen. 1900. No. 6—12. 4°.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Abhandlungen. Bd. II. 1900. No. 1—7. 4°.

K. K. Gradmessungs-Commission in Wien:

Verhandlungen. 7. Juli 1899. 8°.
Astronomische Arbeiten. XI. Band. 1899. 4°.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1900, No. 28—42, 44—52, 4°; 1901. No. 1, 2. 4°.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXX, Heft 3—5. 1900. 4°.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 50, Heft 5—9. 1900. 8°.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. XV, No. 1 u. 2. 1900. 4°.

K. K. Universität in Wien:

Bericht über die volksthümlichen Universitätsvorträge 1899/1900. 1900. 8°.
Oeffentliche Vorlesungen im Sommer-Semester 1900 und im Winter-Semester 1900/1901. 8°.
Uebersicht der akademischen Behörden für das Studienjahr 1900/1901. 1900. 8°.
Die feierliche Inauguration des Rektors für das Studienjahr 1900/1901. 1900. 8°.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien.

Schriften. Bd. 40. Jahrg. 1899/1900. 1900. 8°.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 53. 1900. 8°.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. Bd. 33, No. 4; Bd. 34, No. 1. 1900. 8°.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1900, No. 1. 8°.

Schweizerische meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen 1898. 35. Jahrg. 1900. 4°.

Schweizerische geologische Kommission in Zürich:

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Neue Folge. Lief. IX Bern 1900. 4°.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

7. u. 8. Jahresbericht. 1898 u. 1899. 1900. 8⁰.
Die Wandmalereien in der Waffenhalle des Schweizerischen Landesmuseums. 1900. 8⁰.
Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F. Bd. 2, No. 2. 1900. 4⁰.

Sternwarte in Zürich:

Astronomische Mitteilungen. No. 91. 1900. 8⁰.

Universität in Zürich:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Albert I. Prince de Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques. Fasc. XIII—XVI avec 2 cartes. 1899—1900. fol.
Jules Richard, Les campagnes cientifiques de S. A. le Prince Albert Ier de Monaco. 1900. 8⁰.

Joh. Ambr. Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. Bd. 24. Stück 1—11. 1900. 8⁰.

Francis Bashforth in Cambridge:

A second Supplement to a revised Account of the Experiments made with the Bashforth Chronograph. 1900. 8⁰.

Hermann Böhlaus Nachfolger in Weimar:

Zeitschrift der Savigny-Stiftung. Bd. 21 (Röm. u. Germ. Abth.). 1900. 8⁰.

Johann Brunner in München:

Das Postwesen in Bayern in seiner geschichtlichen Entwicklung von den Anfängen bis zur Gegenwart. 1900. 8⁰.

Luigi Cerebotani in München:

Meine Telegraphie. 1900. 4⁰.

Jos. Anton Endres in Regensburg:

Frobenius Forster, Fürstabt von St. Emmeran in Regensburg. Freiburg i. B. 1900. 8⁰.

Camille Gaspar in Brüssel:

Essai de Chronologie Pindarique. 1900. 8⁰.

Mme Ve Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir, Revue des questions sociales Année 1898, 1899 u. 1900. Paris. 8⁰.
Le Familistère Illustré 1880—1900. Paris. 8⁰.
Robert Owen par Auguste Fabre. Nimes 1896. 8⁰.
Solutions sociales par Godin. Paris 1871. 8⁰.
Le gouvernement par Godin. Paris 1883. 8⁰.
Mutualité sociale par Godin. Paris 1880. 8⁰.
Les sky scratchers par Aug. Fabre. Nimes 1896. 8⁰.
La concurrence asiatique par Aug. Fabre. Nimes
Le féminisme par Aug. Fabre. Nimes 1897. 8⁰.

Antonio de Gordon y de Acos
La legislación sanitaria escolar. 1900. 8°.
El Azucar como alimento del hombre. 1899.

Bauinspektor Gugenhan in S
Beitrag zur Bestimmung der früheren Ausdeh
schwäbischen Alb. 1900. 8°.

Ernst Haeckel in Jena:
Kunstformen der Natur. Lief. 5. Leipzig 1900.

Hermann Hahn in Grunew
Die Grabsteine des Klosters Werschweiler. Berli

Otto Herman in Budapest:
Die Forschungsreisen des Grafen Eugen Zichy in
Bd. I recensiert. Nebst Nachtrag. 1900. 8°.

Friedrich Hirth in München:
Sinologische Beiträge zur Geschichte der Türkvölker
Attila's nach Johannes v. Thurócz. St. Petersb

Georg W. A. Kahlbaum in Basel:
Friedrich Wöhler. Ein Jugendbildnis in Briefen an
Leipzig 1900. 8°.

O. Kars in Berlin:
Der einstige zweite Mond der Erde. Berlin 1900. 8°.

Verlag von Knorr & Hirth in München
Rückblicke und Erinnerungen anlässlich ihres 25jähr
1900. 4°.

Ed. König in Bonn:
Stilistik, Rhetorik, Poetik in Bezug auf die biblische Litte
1900. 8°.

Karl Krumbacher in München:
Byzantinische Zeitschrift. Bd. IX, Heft 4. Leipzig 1900.

Berthold Laufer in Nordamerika:
Preliminary Notes on Explorations among the Amoor Tribes.
1900. 8°.
Petroglyphs on the Amoor. Sep.-Abdr. 1900. 8°.

Abraham Levy in Hamburg:
Philosophie der Form. Berlin 1901. 8°.

Chr. Mehlis in Neustadt a. H.:
Die Ligurerfrage. II. Mitteilung. Braunschweig 1900. 4°.

Lady Meux in London:
The Miracles of the blessed Virgin Mary and the Life of Hann
Anne) ethiopic texts publ. by E. A. Wallis Budge. 1900. 4°.

Gabriel Monod in Versailles:
Revue historique. Tom. 74, No. 1, 2; Tom. 75, No. 1. Paris 190

Richard v. Muth in St. Pölten:
Die Abstammung der Baiuwaren. 1900. 8°.

Karl Neureuther in München:

Das erste Jahrhundert des topographischen Bureaus des k. bayer. Generalstabes. 1900. 8°.

Karl Pamperl in Ruckerlberg bei Graz:

Universalgeld auf Grundlage des metrischen Gewichtes und des Monometallismus. Graz 1900. 8°.

Dietrich Reimer in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. 5. Jahrg., Heft 2. 1900. 4°.

Lucian Scherman in München:

Oriental Bibliography. Vol. XIII (for 1899), Second Half. Berlin 1900. 8°.

Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 1900. No. 12—23. 8°.

Emil Selenka in München:

Menschenaffen. Lief. 3. Wiesbaden 1900. 4°.

A. Thieullen in Paris:

Les pierres figures à retouches intentionelles à l'époque du creusement des vallées. 1900. 4°.

Josef Vincenti in Ivrea:

Prononciation et Phonographie. Turin 1900. 8°.

Adolf Vuković in Wien:

Erdbeben und Magnetnadel. 1899. 8°.

Albrecht Weber in Berlin:

Vedische Beiträge, No. 8. 1900. gr. 8°.

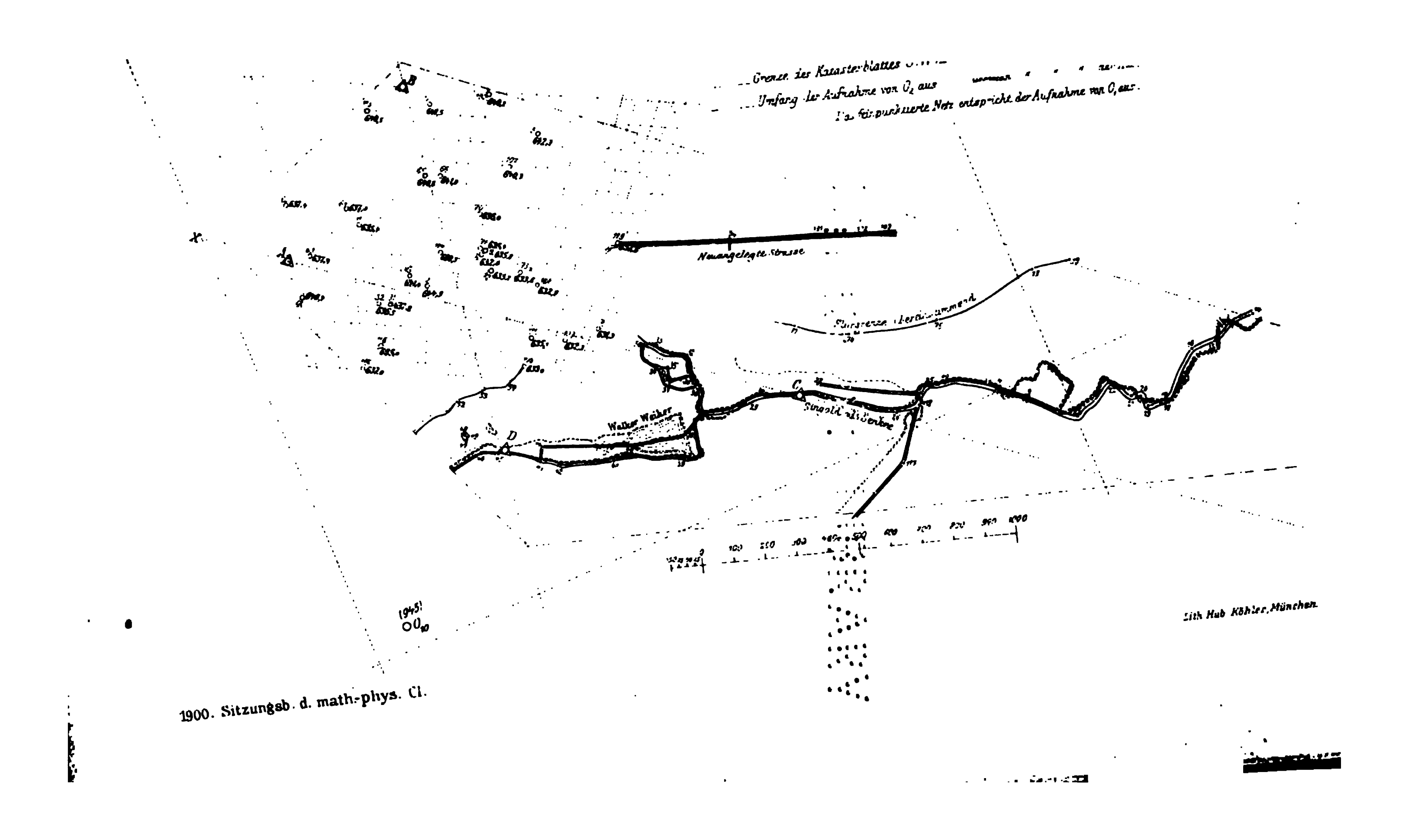
N. Wecklein in München:

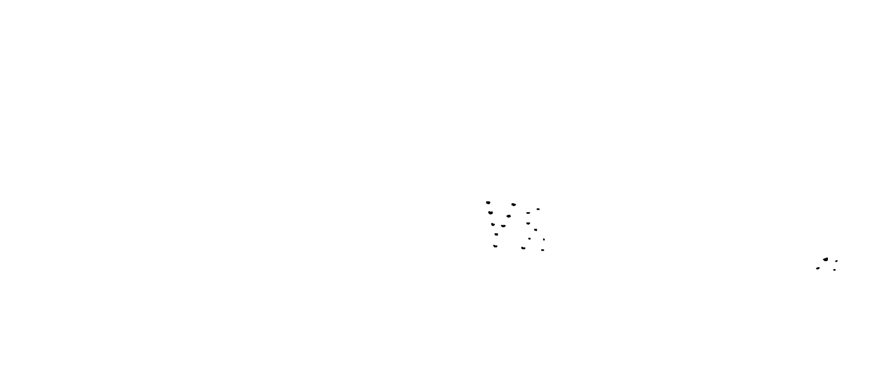
Euripidis fabulae. Vol. 3, pars 3. Lipsiae 1900. 8°.

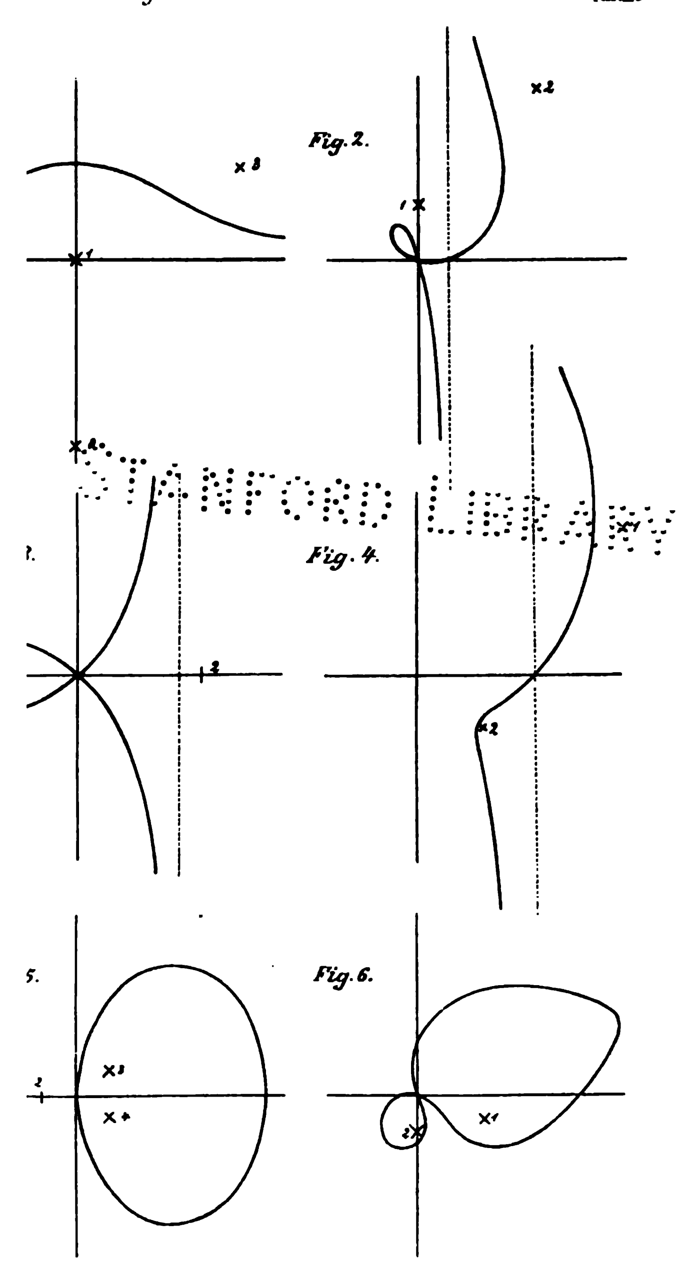
Eduard von Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie. Bd. XI, 4; Bd. XII, 1. Leipzig 1900. 8°.

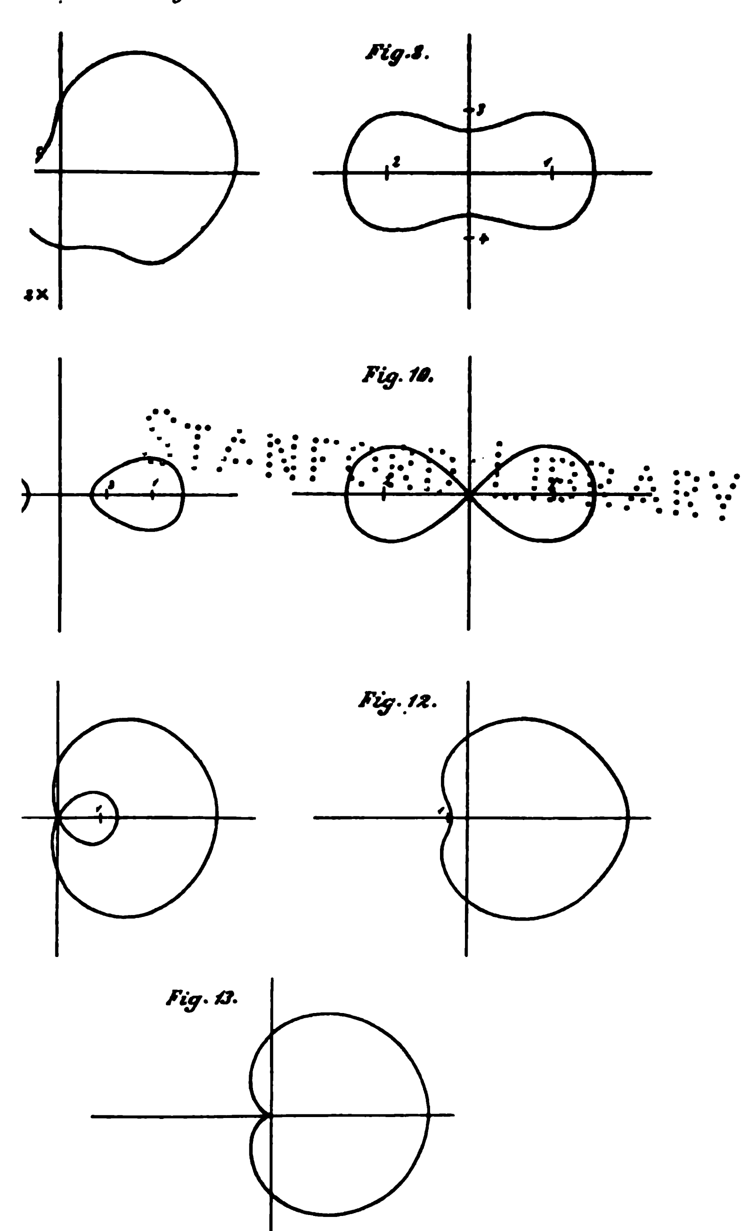



Grenze des Katasterblattes
Umfang der Aufnahme von O_2 aus
Neuangelegte Strasse
Walter Weiher
B
C
D
X
Lith Hub Köhler, München

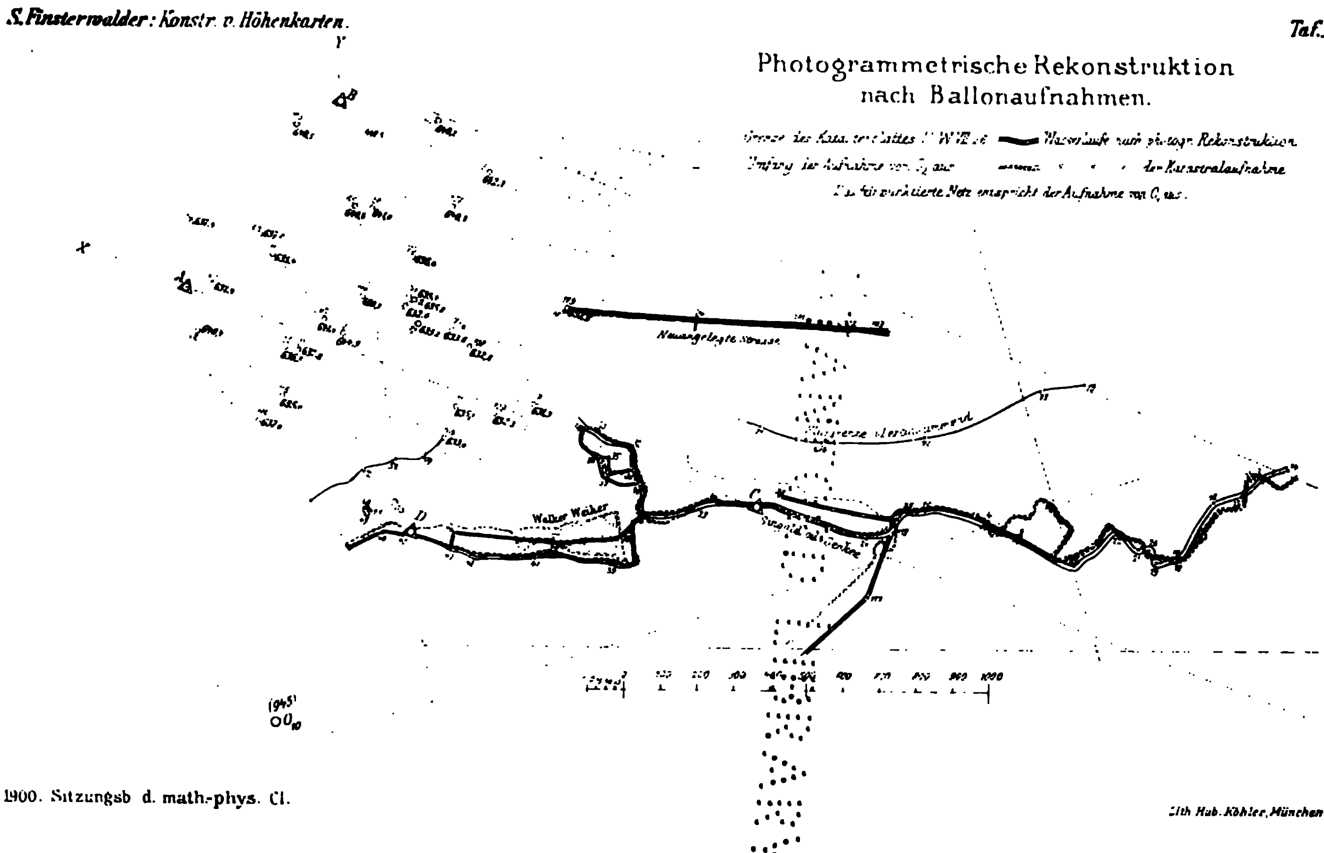



Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 6.

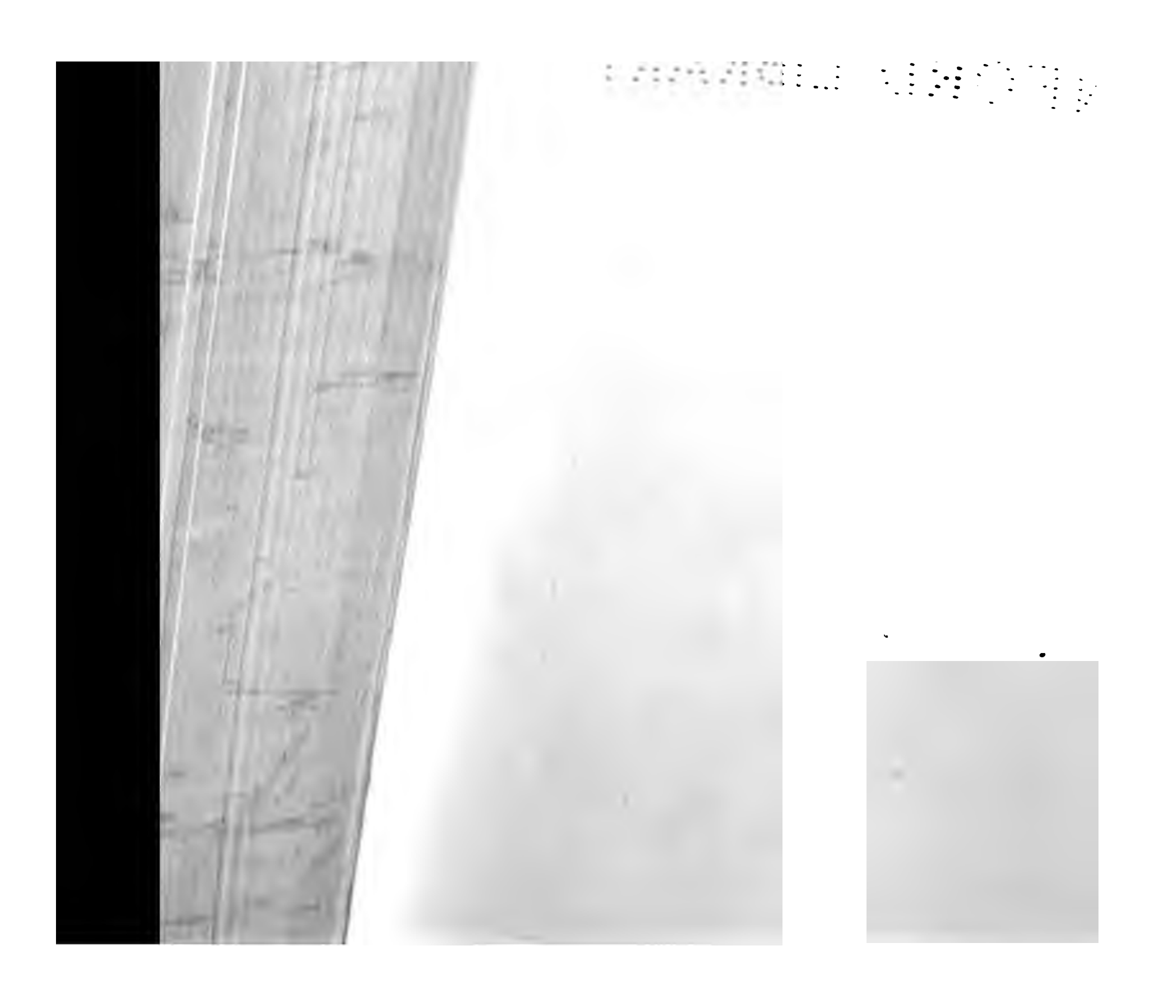


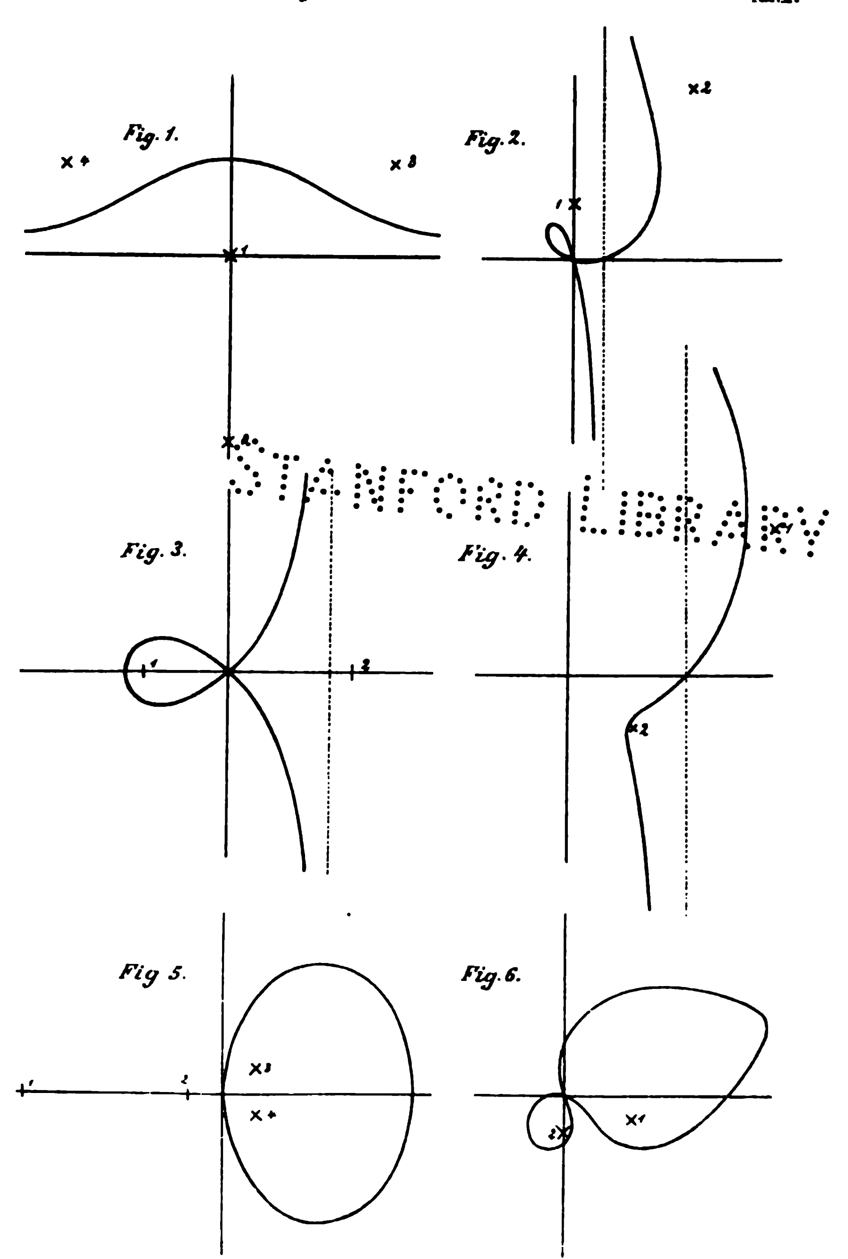


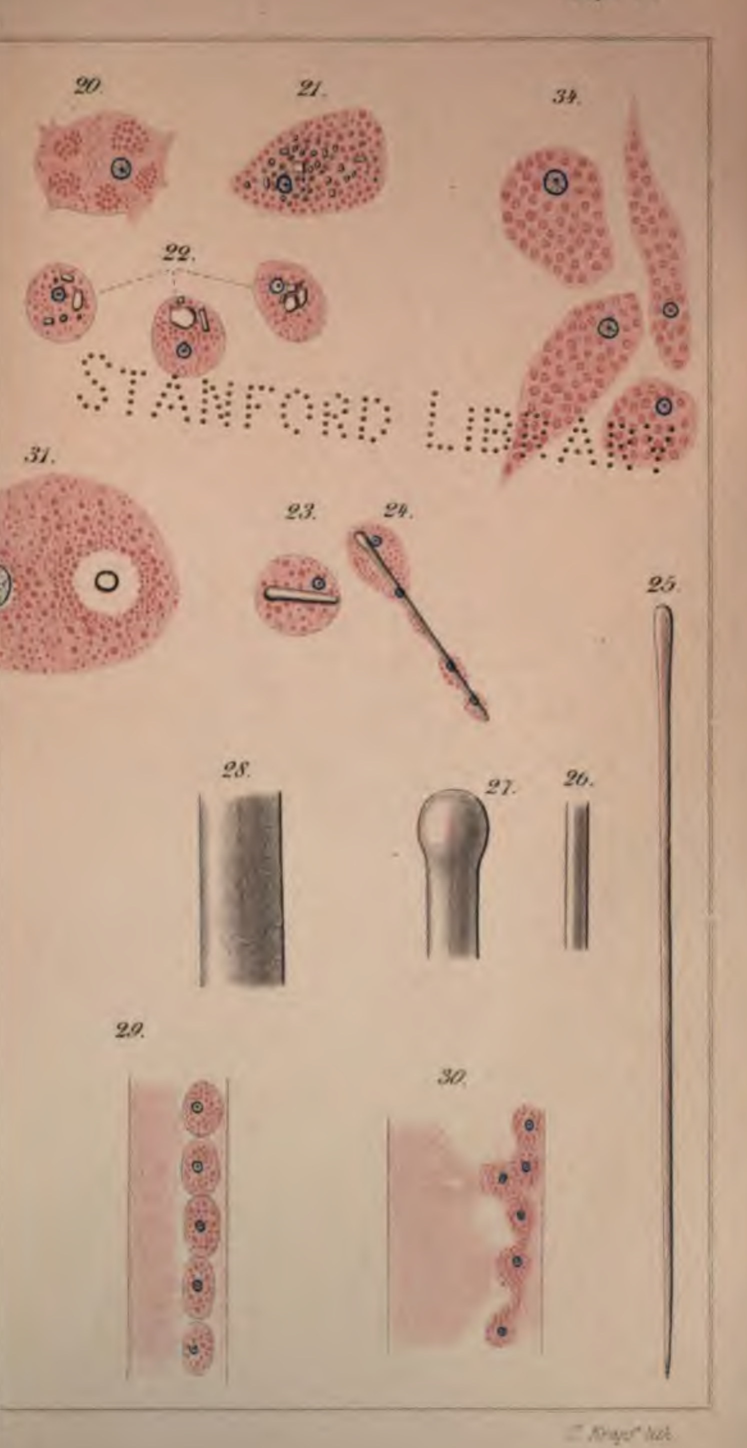
Lith Hub. Köhler, München



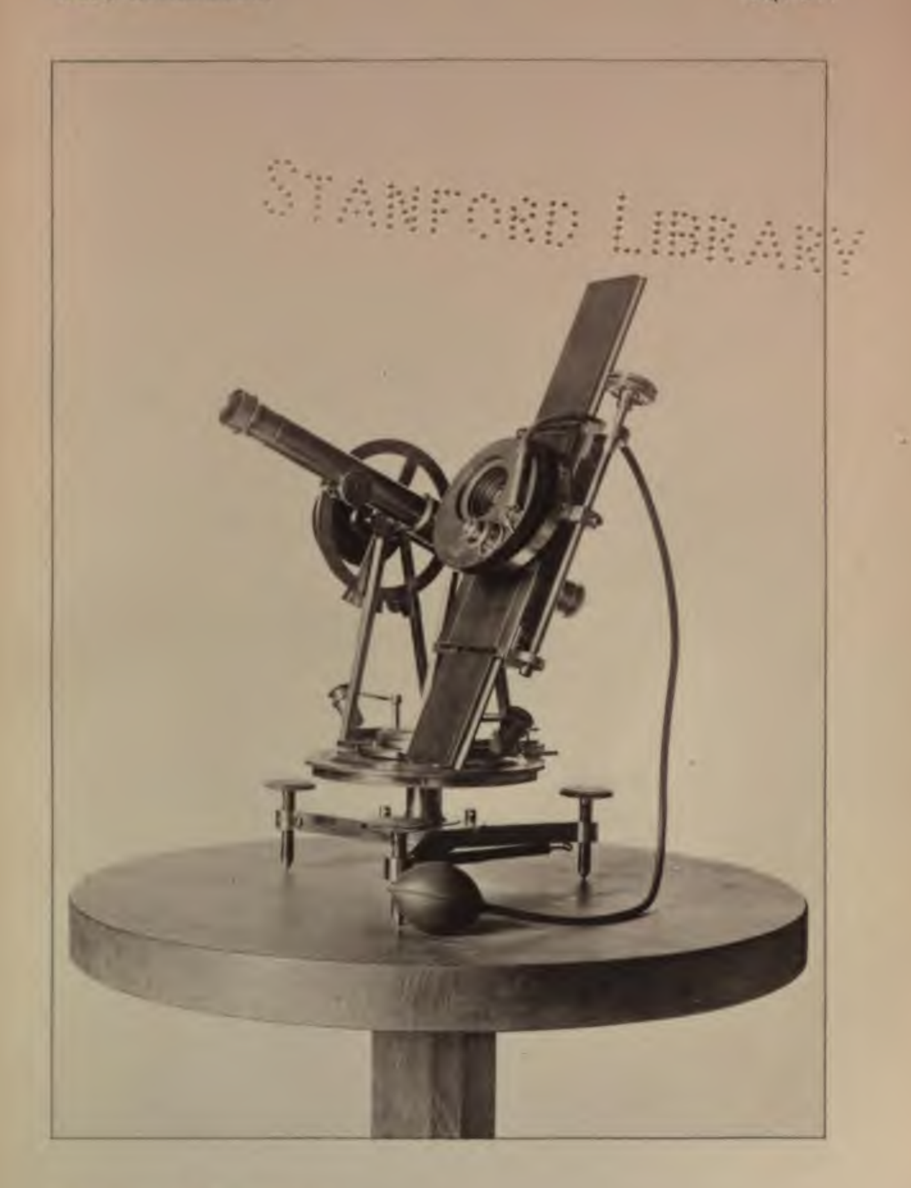
Lith. Hub. Köhler, München



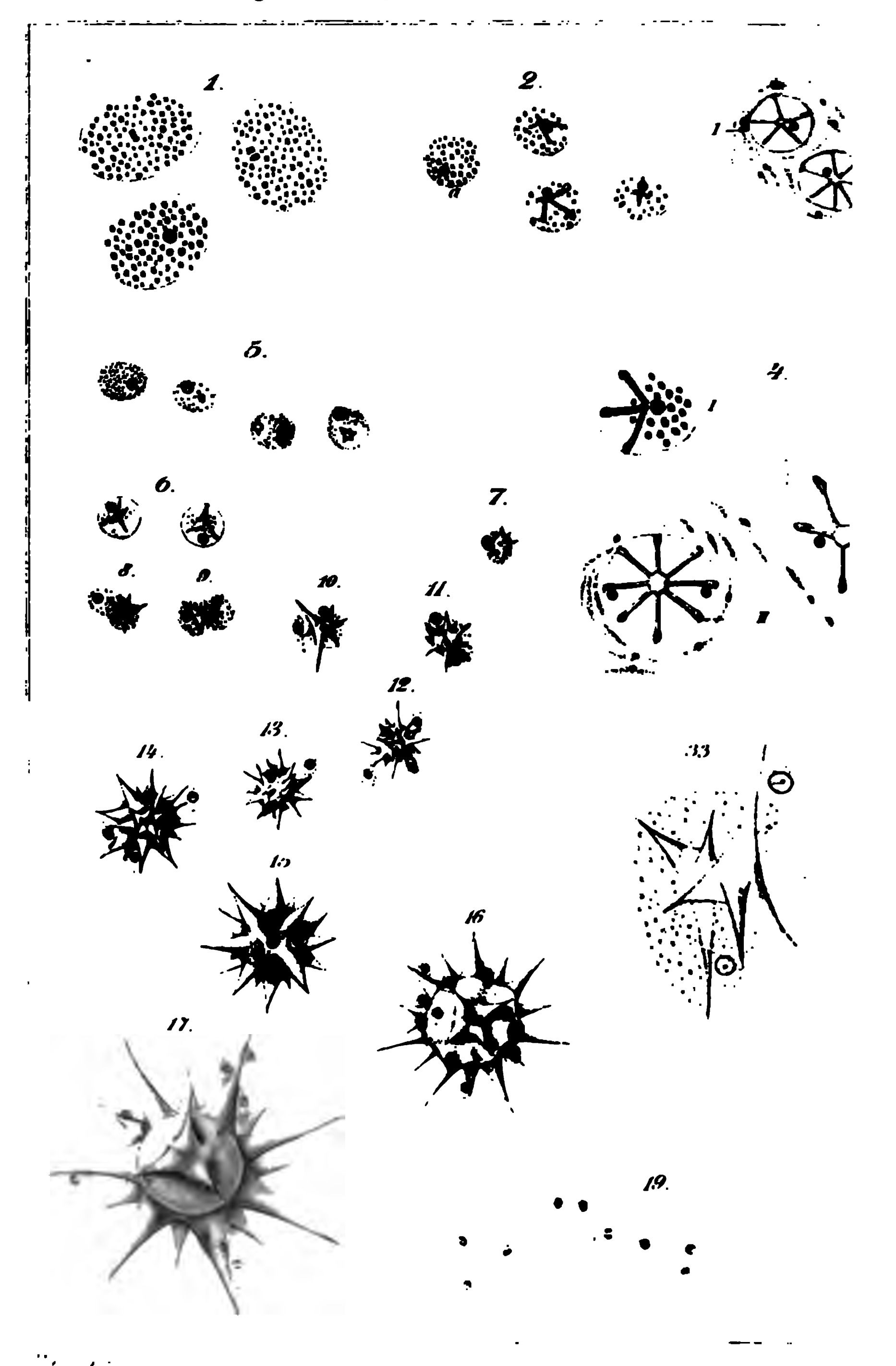

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig 5.
Fig. 6.



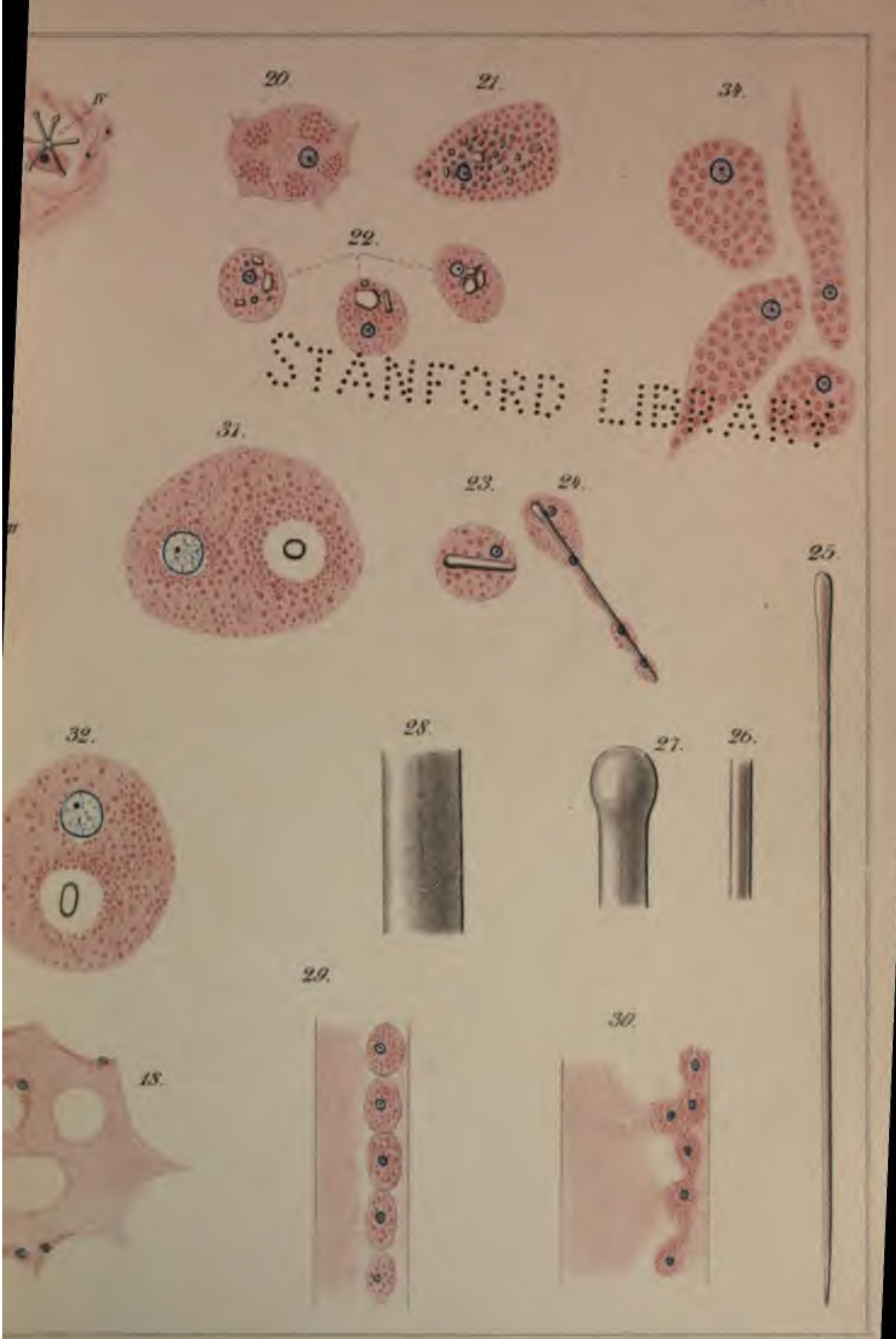
E. Krapf lith.






1.
2.
5.
4.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
16
17.
19.

Taf. V.










date last



